Texto complementar n° 1

Gráficos, Proporções e Variações Proporcionais

1. Introdução.

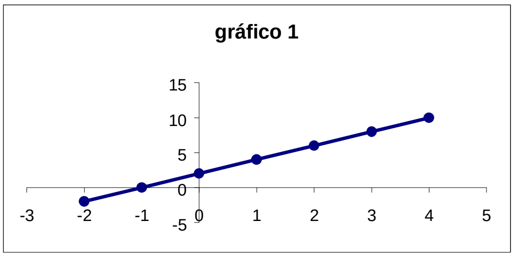
No estudo de um fenômeno físico são realizadas experiências em que diversas grandezas são medidas ao mesmo tempo. A relação entre essas grandezas pode ser expressa por meio de tabelas, gráficos ou fórmulas matemáticas. Muitas vezes também o significado de uma lei da natureza ou de uma equação fica mais claro se as representamos em gráficos. Neste texto, revisamos algumas idéias básicas necessárias à construção e interpretação de gráficos, particularmente das retas.

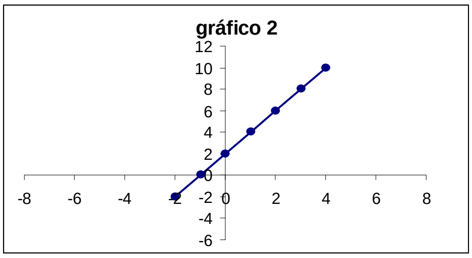
Representamos os gráficos no plano por um sistema de **eixos cartesianos** ortogonais. Para cada eixo adota-se uma escala, sendo que as escalas dos dois eixos podem ser diferentes.

Na construção de um gráfico, a primeira tarefa importante que temos que realizar é **uma escolha conveniente das escalas**. Quando a escala não é conveniente, parte do gráfico pode ficar fora do papel ou, pelo contrário, sair tão pequeno que não poderemos observar seus detalhes. Para escolher bem a escala:

- determine o tamanho do papel, identifique os valores máximos e mínimos das grandezas que serão representadas nos eixos O*x* e O*y* e, a partir dessas dimensões, calcule a escala que permita ocupar o espaço disponível;
- defina a divisão da escala de modo a localizar e marcar os pontos facilmente, bem como permitir uma leitura posterior de valores a partir do gráfico (isso se consegue usando divisões na escala que sejam múltiplos ou submúltiplos de 10, ou seja: ...; 0,1; 1; 10; ...; 0,2; 2; 20; ...; 0,5; 5; 50; ou até mesmo ...; 0,25; 2,5; 25; ..., mas nunca use múltiplos de 3, 7 e 9).

Agora observe os gráficos abaixo e responda rápido: eles representam a mesma função ou funções diferentes?





Para construir um gráfico de uma função, organizamos uma tabela com valores convenientes de *x* e os correspondentes valores de *y*. A seguir localizamos no plano (supondo um sistema de eixos cartesianos) cada par (*x*,*y*). O gráfico da função é obtido ligando-se esses pontos; quando eles não estão alinhados numa reta, ligam-se os pontos sucessivos com curvas que acompanham o comportamento indicado pelos pontos vizinhos.

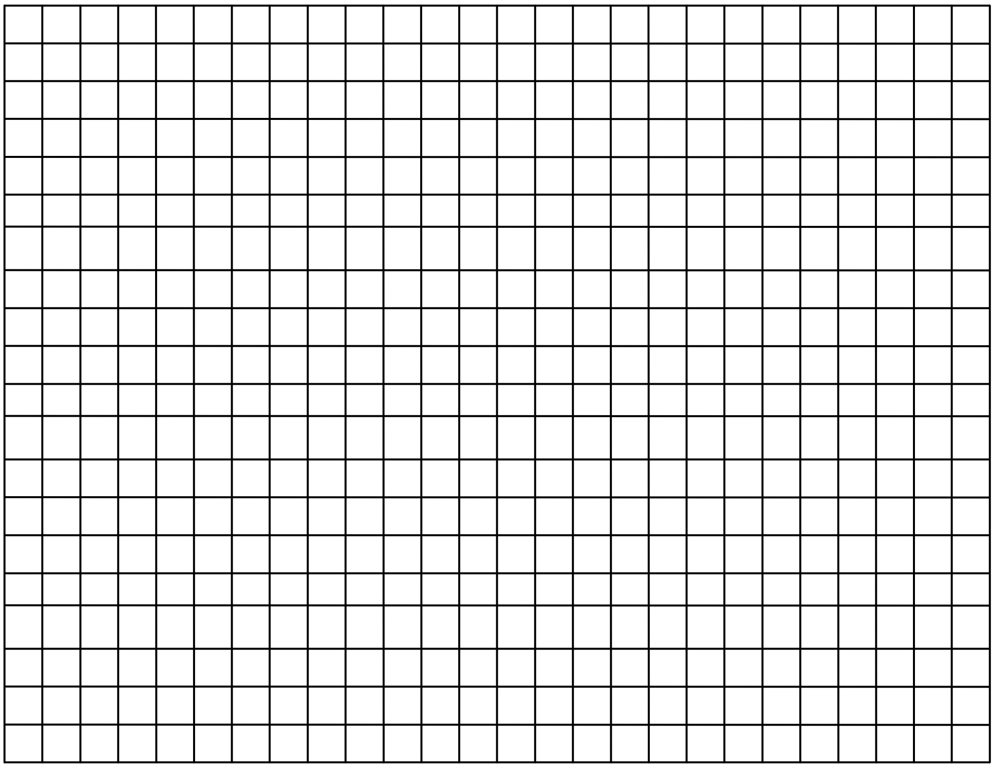
Construa uma tabela com pares de valores *x* e *y* para os dois gráficos acima. Responda novamente: eles representam a mesma função?

2. Quando o gráfico é uma reta.

Uma reta é descrita pela função de primeiro grau (primeiro grau porque a variável *x* aparece elevada à potência 1):

$$y = ax + b$$

onde ***a*** e ***b*** são constantes reais. Dizemos que *y* depende linearmente de *x* ou que a relação entre *y* e *x* é linear.



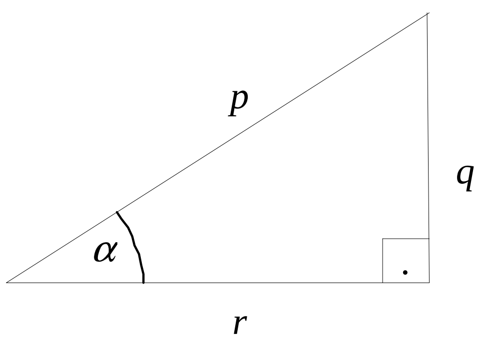
Exercício 1. No quadriculado acima, faça os gráficos das 4 funções indicadas abaixo, para x variando de –6 até +6. <u>Escolha a mesma escala para representar todos os gráficos</u>. Escolha com cuidado a escala no eixo y de forma a ter a melhor ocupação do espaço, mas de maneira que todos os gráficos caibam no papel, no intervalo indicado. Use uma cor diferente para cada gráfico.

(i) $y = 2x + 2$ (ii) $y = 3\,x + 2$ (iii) $y = 2x - 1$ (iv) $y = -2x + 2$

Para cada função dos itens (i), (ii), (iii) e (iv), determine os valores dos coeficientes ***a*** e ***b***. O que há em comum entre as retas (i) e (ii)? E entre as retas (i) e (iii)? O que distingue a reta do item (iv) das demais?

3. Interpretação dos coeficientes *a* e *b* em *y = ax + b* , quando *x* e *y* têm mesma dimensão física.

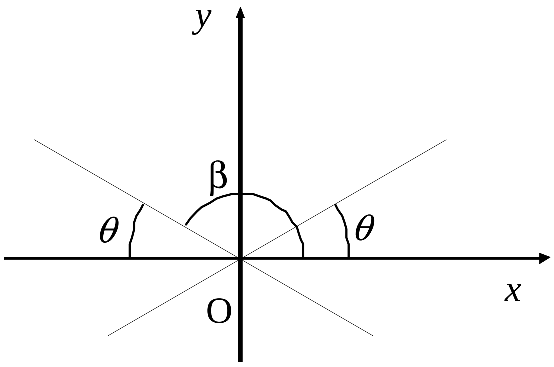
O número real a é denominado coeficiente angular e está associado à inclinação da reta em relação ao eixo Ox. No caso (i) do exercício 1, o coeficiente angular é igual a 2; no caso (ii) é igual a 3. Note que a reta descrita pela função do item (ii) é *mais inclinada* que a do item (i). Se a for negativo ($a < 0$), como no item (iv), a grandeza y decresce à medida que x cresce e a reta forma um ângulo maior que 90º com o eixo x.



Podemos relacionar o coeficiente angular com o ângulo entre a reta e o eixo Ox. Para relembrar, considere o triângulo retângulo abaixo. Os dois lados que formam o ângulo reto são chamados catetos. O lado q é o cateto oposto ao ângulo α e o lado r é o cateto adjacente ao ângulo α. No triângulo retângulo define-se tangente de α (abreviadamente tan α) como a razão entre o cateto oposto a α e o cateto adjacente:

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{cateto adjacente a } \alpha} = \frac{q}{r}$$

Assim, vemos que a constante $\boldsymbol{a}$ é igual à tangente do ângulo que a reta forma com o eixo *Ox*.



Podemos definir as funções trigonométricas, tais como seno, cosseno e tangente, para qualquer ângulo. A tangente de um ângulo na faixa $90^{\circ} < \theta < 180^{\circ}$ tem sinal negativo e é igual em módulo à tan $(180^{\circ} - \theta)$. Com esta definição, o coeficiente $\boldsymbol{a}$ pode ser interpretado como a tangente do ângulo que a reta $\boldsymbol{y = ax + b}$ faz com o eixo x (desde que as escalas em que x e y estão representados sejam iguais). Se $\boldsymbol{a}$ for negativo, o ângulo que a reta forma com o eixo x é obtuso e y diminui se x aumenta. A figura ao lado mostra duas retas com coeficientes angulares de mesmo módulo e sinais contrários. Chamando de $\boldsymbol{a}$ o coeficiente angular da reta que forma ângulo θ com o eixo *Ox*, temos $\boldsymbol{a} > 0$ e a reta que forma ângulo $\beta = 180^{\circ} - \theta$ tem coeficiente angular $\boldsymbol{-a}$.

O número real $\boldsymbol{b}$ corresponde ao valor de y quando $x = 0$, ou seja, indica em que ponto a reta vai "cortar" o eixo y. Note que a reta descrita pela função do item (i) cruza o eixo *Oy* em $y = 2$ e a reta do item (iii) cruza o eixo y em $y = -1$. Como o coeficiente angular das duas retas é o mesmo ($\boldsymbol{a} = 2$), elas têm a mesma inclinação, ou seja, **são paralelas.**

4. Interpretação dos coeficientes a e b em $y = ax + b$, quando x e y não têm mesma dimensão física.

Em física, a maioria das grandezas envolvidas nas equações tem dimensão física, de modo que precisam ser expressas em relação a uma unidade de medida. Isso faz com que a inclinação do gráfico que exprime um fenômeno físico tenha uma unidade de medida e, na maior parte dos casos, não possa ser interpretada simplesmente como a tangente de um ângulo, necessariamente adimensional.

Entretanto, sempre podemos definir a inclinação da reta a partir de um par qualquer de pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2), pela expressão

$$\text{inclinação} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a \quad .$$

Assim, o coeficiente $\boldsymbol{a}$ é uma grandeza com dimensão física quando as grandezas x e y não têm a mesma dimensão física. Por exemplo, se y mede posição em m e x mede tempo em s, a inclinação tem dimensão de comprimento por tempo e mede-se em unidades de 1 m/s.

É importante, ainda, ter atenção para o fato de que, apesar da reta que representa o gráfico $y(x)$ formar um ângulo com o eixo *Ox* que pode ser medido, por exemplo, com um transferidor, não podemos dizer que o coeficiente $\boldsymbol{a}$ seja a tangente desse ângulo. *Isso ocorre porque este ângulo depende da maneira como você escolhe as escalas*. Por isso, deve-se calcular $\boldsymbol{a}$ usando a expressão para a inclinação dada acima.

Em relação ao coeficiente ***b***, a interpretação é a mesma da situação anterior, exceto pelo fato dele possuir também uma dimensão física na maior parte dos casos.

5. Inclinação vs. tangente.

Agora que deixamos claro que somente quando os eixos Ox e Oy estão na mesma escala a inclinação é a tangente do ângulo, vamos entender porque essa inclinação também atende pelo nome *coeficiente angular*. Vamos, então, recuperar a interpretação simples do caso isométrico (=que tem as mesmas dimensões), onde a tangente do ângulo é a inclinação.

Vamos lidar com um gráfico de posição por tempo, onde um carro desloca-se numa avenida congestionada entre $x_i = 5$ m no instante $t_i = 3$ s e $x_f = 95$ m no instante $t_f = 48$ s, com velocidade constante. Note que falamos até agora em gráfico de y por x (x costuma ser o eixo horizontal quando usamos esses dois nomes) e vamos fazer um gráfico x contra t, onde o x vai ser o eixo vertical. Exatamente para que o nome do eixo não importe, temos que adaptar todas as expressões aritméticas para os novos nomes. Assim, a inclinação, que era a razão entre Δy e Δx, agora será a razão entre Δx e Δt.

Para desenhar o gráfico num papel quadriculado de 10 cm por 10 cm, escolhemos uma escala em x tal que 100 m são representados em 10 cm do papel e uma escala de tempo em que 50 s são representados em 10 cm do papel. Os fatores de escala definidos são, portanto,

$$f_x = \frac{10\ \mathbf{cm}}{100\ \mathbf{m}} = 0{,}1\frac{\mathbf{cm}}{\mathbf{m}} \quad \text{e} \quad f_t = \frac{10\ \mathbf{cm}}{50\ \mathbf{s}} = 0{,}2\frac{\mathbf{cm}}{\mathbf{s}}.$$

Quando calculamos a inclinação da reta no intervalo [3 s, 48 s], encontramos

$$v = \frac{90\,\mathrm{m}}{45\,\mathrm{s}} = 2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \quad .$$

Se medirmos a tangente do ângulo no papel encontraremos, porém,

$$\tan(\theta) = \frac{9\,\mathrm{cm}}{9\,\mathrm{cm}} = 1$$

– note que o ângulo é mesmo 45º, que é o arco cuja tangente vale 1, portanto o cálculo está certo. A diferença das respostas vem das escalas, que não poderiam ser iguais uma vez que as dimensões físicas envolvidas nos dois eixos são diferentes. Assim, quando calculamos a tangente trigonométrica, usamos segmentos, portanto

$$\tan\theta = \frac{\Delta x\ f_x}{\Delta t\ f_t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\frac{f_x}{f_t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}0{,}5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

ou seja, a tangente do ângulo está relacionada com a inclinação por um fator que só depende das escalas usadas; no nosso caso, o valor numérico da tangente do ângulo é metade do valor numérico da velocidade do carro expressa em m/s.

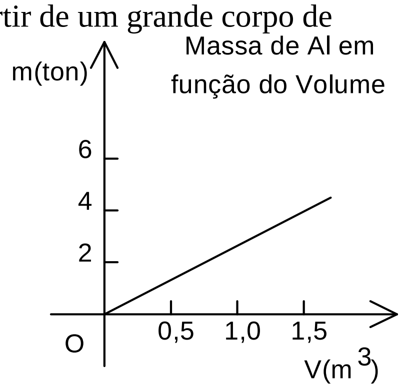
Enfim, a inclinação da reta está relacionada com a tangente do ângulo, bastando incluir a razão dos fatores de escala e não nos confundirmos com as unidades. Na prática, nunca medimos o ângulo de inclinação da reta com transferidores, mas sim calculamos a inclinação com a razão $\Delta x/\Delta t$, inclusive porque sempre precisamos desse valor com as unidades de medida correspondentes, que não podem estar embutidas na tangente trigonométrica.

6. Variação Proporcional vs. Proporção

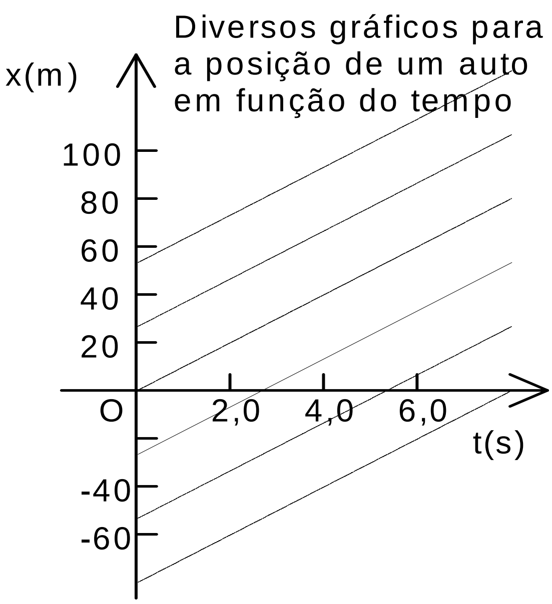
Estamos muito habituados a "fazer regra de três" em situações do cotidiano. Calculamos muito rapidamente que, se a dúzia de laranjas custa R$2,40, uma dúzia e meia custará R$3,60. Dizemos que o preço do saco de laranjas é *proporcional* ao número de laranjas. Existem muitas outras situações onde há proporcionalidade entre grandezas, por exemplo, um mol de moléculas contém 6×10^{23} moléculas.

Questão 1. Chamando de M o número de moles e de **N** o número de moléculas, escreva uma relação matemática entre o número de moles e o de moléculas numa substância.

Um exemplo de grandeza física que é uma proporção entre duas outras grandezas é a densidade dos corpos homogêneos – a densidade é a razão entre a massa e o volume do corpo. Dizer que o corpo é homogêneo significa dizer que as propriedades de qualquer fragmento são as mesmas do corpo todo. Para fixar idéias nesta discussão, imagine uma usina de Alumínio. A densidade do Al é 2,7 g/cm^3 = $2{,}7\times10^3$ kg/m^3 . A fábrica produz, a partir de um grande corpo de Alumínio que podemos considerar puro nesta discussão, perfis, panelas e papel de Alumínio. Dizer que o grande corpo de Al é homogêneo, em relação à densidade, significa dizer que a proporção entre massa e volume é a mesma para qualquer pedaço desse corpo. Assim, tanto para um pedaço de papel de Alumínio quanto para um caco da panela ou um fragmento de um trilho de cortina, a razão entre massa e volume é $\rho = 2{,}7\times10^3$ kg/m^3. Podemos, portanto, sempre deduzir o volume V de um objeto de Al como $V = m/\rho$. Quando o objeto tem volume conhecido, podemos deduzir sua massa m a partir da relação $m = \rho V$.



O gráfico da figura acima representa essa propriedade do Alumínio metálico puro nas condições ambientes normais. Note a propriedade, absolutamente importante, do gráfico da massa de Alumínio em função do volume passar pela origem do sistema de coordenadas, identificada pelo ponto O.



Quando lidamos com a velocidade de um objeto, tendemos a pensar que ela representa uma proporção. Afinal, dizer que um automóvel está correndo a 10 m/s significa que ele corre 10 m em 1 s. No entanto, a velocidade *não é* uma proporção entre a posição e o tempo. Veja, na figura ao lado, diferentes possíveis gráficos da posição em função do tempo de um mesmo automóvel com velocidade v = 10 m/s.

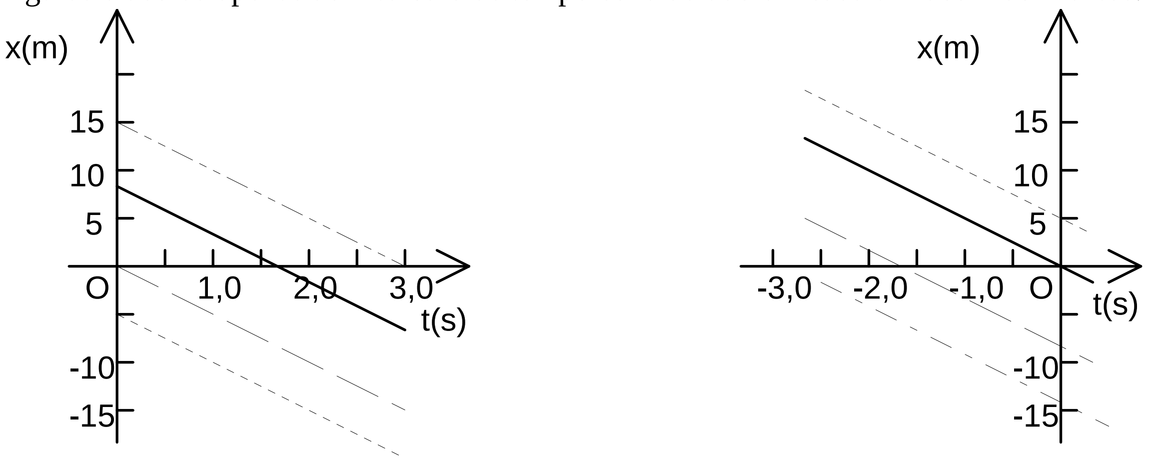
Caso você, equivocadamente, imaginasse a velocidade como uma proporção entre posição e tempo, deduziria que a posição do automóvel em t = 6,0 s é x = 60 m. Vemos no gráfico acima que, exceto no referencial onde o movimento é descrito pela linha tracejada, a posição do automóvel em t = 6,0s NÃO é x = 60 m.

Se a velocidade não é uma proporção, o que ela é? Resposta: é uma *variação proporcional*. Ela representa o deslocamento — uma variação de posição — num *intervalo* de tempo. Assim, a velocidade não é a proporção entre a posição e o tempo, mas sim a proporção entre variação de posição e "variação" de tempo. Quando um corpo desloca-se à velocidade constante, sua **variação** de posição é **proporcional** ao intervalo de tempo considerado, portanto, é uma **variação proporcional**; ou simplesmente proporção das variações.

Questão 2: Qual a propriedade da curva tracejada do gráfico acima que faz com que a velocidade possa ser confundida com uma proporção simples?

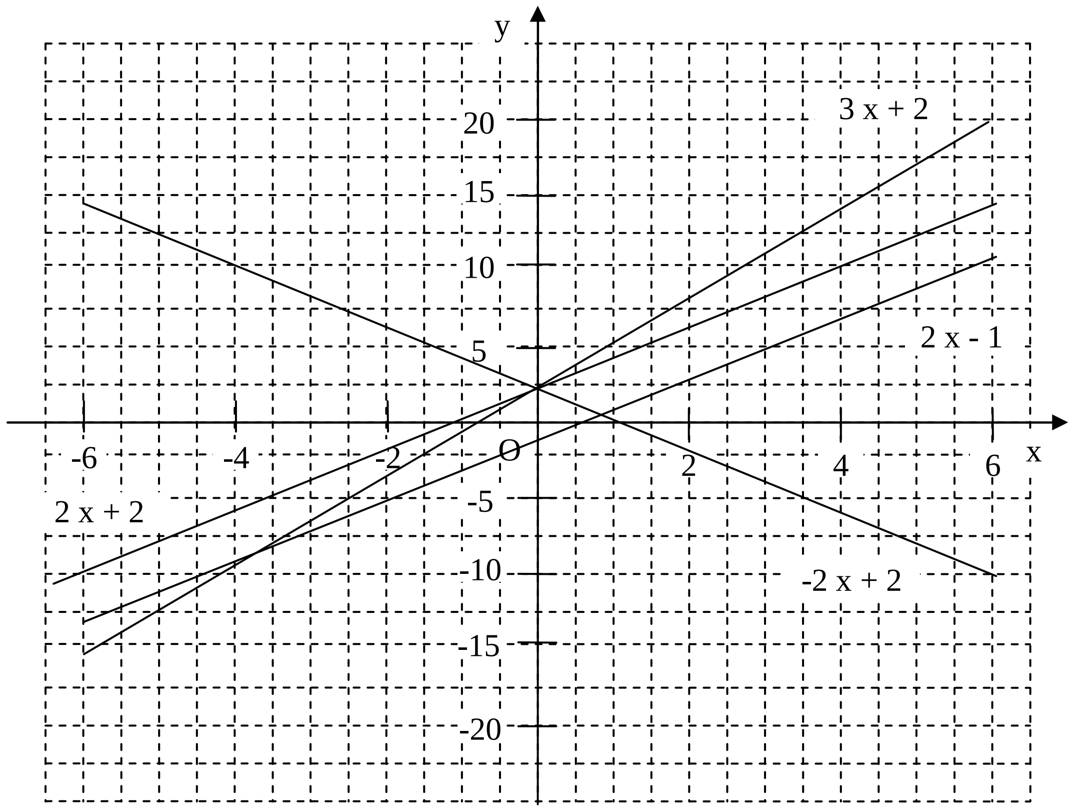
Nas situações mais simples onde há apenas um objeto em movimento uniforme, você pode escolher a origem do sistema de coordenadas de maneira que em t = 0 s ele esteja na origem. No entanto, isso não pode ser feito em geral, de maneira que NUNCA devemos pensar na velocidade como uma proporção entre posição e tempo, mesmo que isso dê certo em alguma situação muito particular.

Uma variação proporcional pode, com freqüência, ser expressa por números negativos, o que raramente faz sentido com proporções. Nas figuras abaixo mostramos alguns possíveis gráficos de posição em função do tempo para um objeto à velocidade de –5 m/s. A diferença entre as duas figuras é devida apenas ao intervalo de tempo considerado em cada um dos movimentos.



Questão 3. Descreva uma situação física de Movimento Uniforme onde você defina tempos negativos. Veja que basta escolher uma origem para a coordenada tempo que seja posterior ao instante em que você começa a descrever a situação.

Gabarito do Exercício 1.



As escalas escolhidas foram: 1cm para cada unidade no eixo x e 1 cm para cada 5 unidades no eixo y.

Se você teve dificuldade em desenhar os gráficos, lembre que bastam dois pontos para desenhar uma reta. Deve-se escolher pontos distantes para minimizar o erro gráfico, que é devido ao tamanho da ponta do lápis e à precisão da localização do ponto no papel pelo olho humano. Assim, para traçar a reta –2x+2, localizamos os pontos extremos: (–3,10) e (3,14) e os ligamos por uma reta. Para ver se acertamos, conferimos que em x= 0 ele passa pelo ponto y = 2, o que está de acordo com a equação.