



Conversão Analógico-Digital (ADC)

Prof. Sérgio S Furuie
LEB/PTC/EPUSP

Abordagem: motivação – intuição - formalização

Bibliografia indicada: cap. 7 do Oppenheim



Plano de aula

- Motivação
- Exemplos em sinais e imagens
- Tipos e características de ADCs
- Quantização
- Discretização/Amostragem
- Efeito no domínio da frequência
- Interpolação

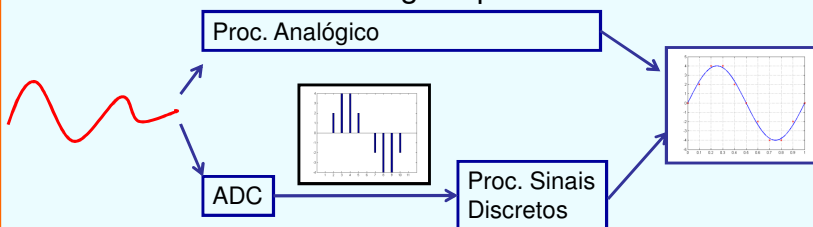
Plano de aula

- **Motivação**
- Exemplos em sinais e imagens
- Tipos e características de ADCs
- Quantização
- Discretização
- Efeito no domínio da frequência
- Interpolação

3

Sinal contínuo

- Processamento e análise:
 - Processamento analógico: p. ex. filtro analógico
 - Processamento digital
 - Converter para sinal discreto
 - Processamento digital: p. ex. filtro discreto

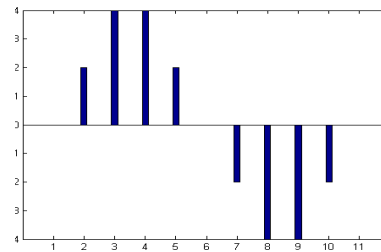
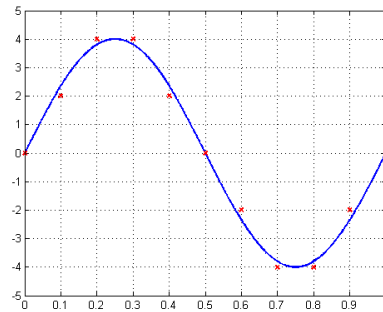


Ainda há necessidade de filtro analógico?

4



Amostragem e quantização



Série numérica:

[0 2 4 4 2 0 -2 -4 -4 -2 0]

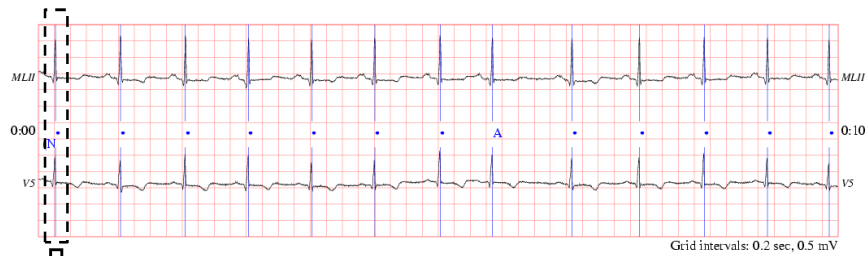
Vetor=[0 2 4 4 2 0 -2 -4 -4 -2 0]^T



Plano de aula

- Motivação
- Exemplos em sinais e imagens
- Tipos e características de ADCs
- Quantização
- Discretização
- Efeito no domínio da frequência
- Interpolação

Exemplo: Sinais de ECG



Séries numéricas:

$S1 = [0 \ 2 \ 4 \ 4 \ 2 \ 0 \ -2 \ 12 \ 45 \ 166 \ 50 \ 33 \ -2 \ 0 \ \dots]^T$

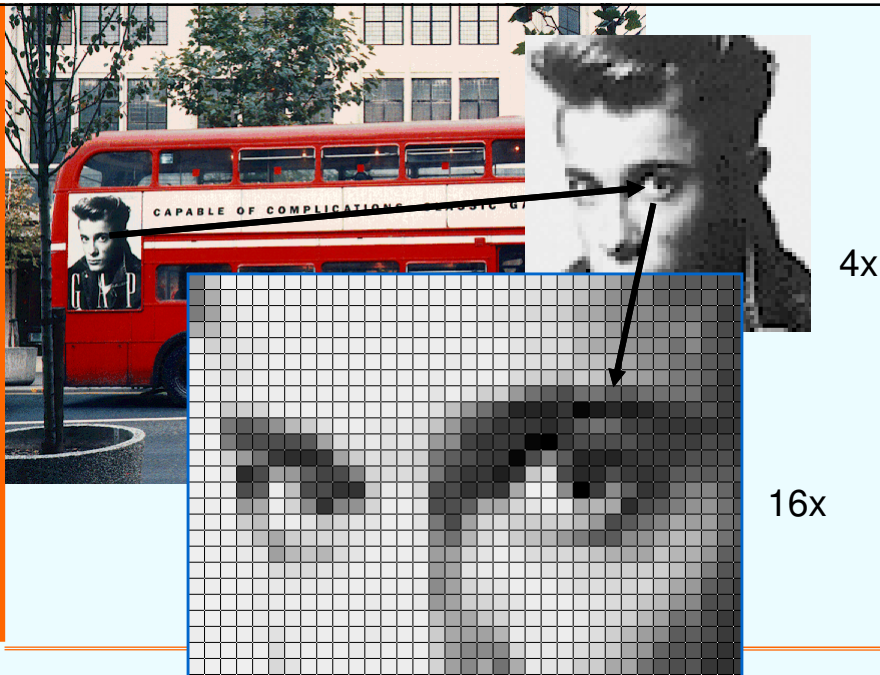
$S2 = [0 \ 3 \ 3 \ 4 \ 0 \ 0 \ -2 \ 11 \ 47 \ 146 \ 30 \ 13 \ -1 \ 3 \ \dots]^T$



PTC/ LEB - S.Furuie

Bloqueio do ramo esquerdo

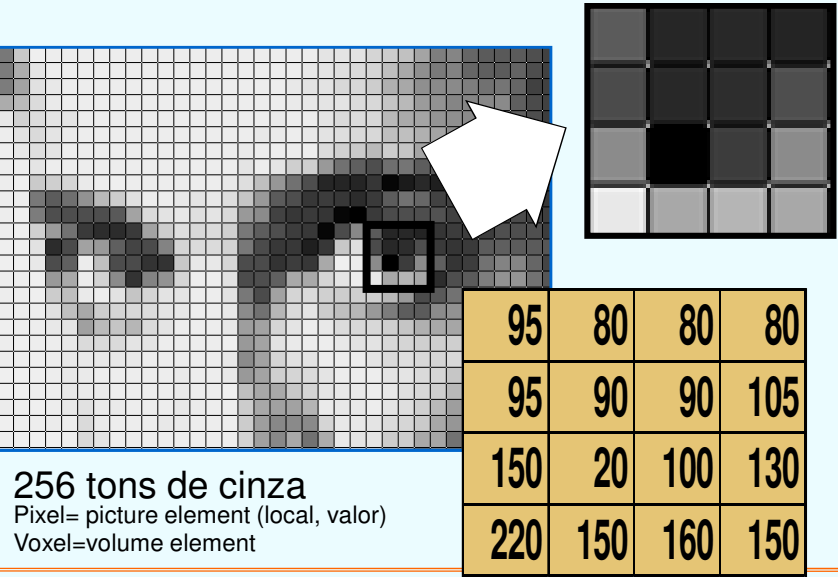
7



PTC/ LEB - S.Furuie

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Aula 13: Conversão Analógico-Digital, discretização

Processo de Discretização



256 tons de cinza
Pixel= picture element (local, valor)
Voxel=volume element

95	80	80	80
95	90	90	105
150	20	100	130
220	150	160	150

EPUSP PTC/ LEB - S.Furuie

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Aula 13: Conversão Analógico-Digital, discretização

Bits, bytes

- Representação numérica na base 2
- Bits {0, 1} : dígitos na base 2
- Byte: composto por 8 bits

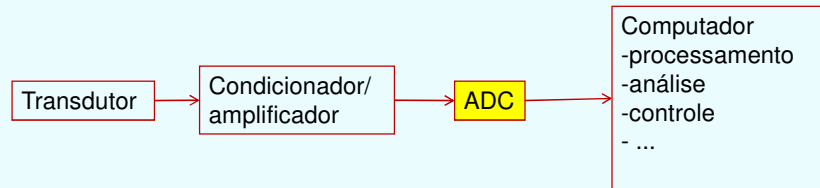
2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
0	0	0	0	0	1	0	1

$$\begin{array}{r}
 \times \times \\
 2^2 2^1 2^0 \\
 \hline
 4 + 0 + 1 = 5
 \end{array}$$

EPUSP PTC/ LEB - S.Furuie

Resumindo: Discretização, ADC

- Converte valores analógicos em digitais
 - Em geral valores de tensão elétrica, pois a maioria dos transdutores convertem para parâmetros elétricos (efeitos fotoelétrico, piezoelétrico, termistores, strain gauges, ...)



EPUSP

PTC/ LEB - S.Furuie

Quais as características importantes de um ADC ?

11

Plano de aula

- Motivação
- Exemplos em sinais e imagens
- **Tipos e características de ADCs**
- Quantização
- Discretização
- Efeito no domínio da frequência
- Interpolação

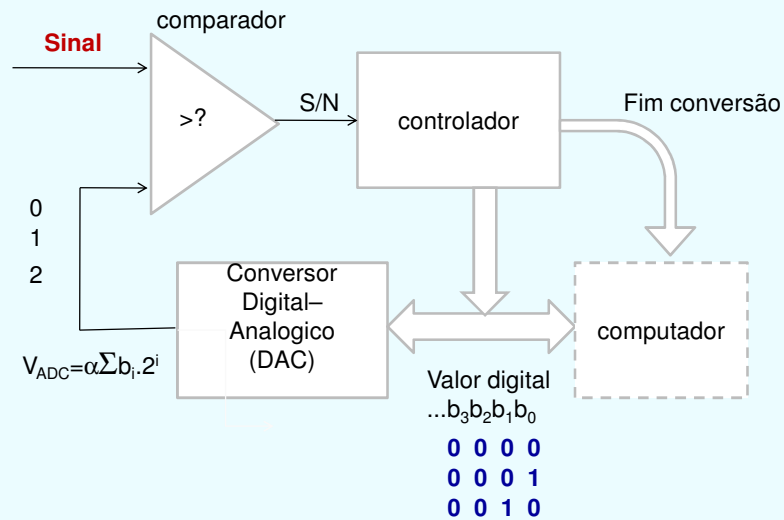


EPUSP

PTC/ LEB - S.Furuie

12

Diagrama em blocos – ADC



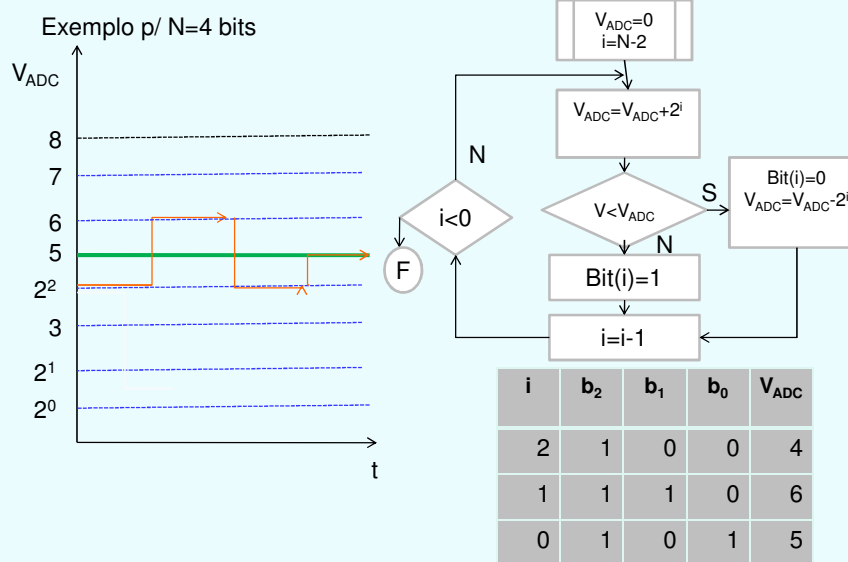
Aproximação sequencial



PTC/ LEB - S.Furuie

13

ADC: aprox. sucessiva



• tempo de conversão constante



PTC/ LEB - S.Furuie

14



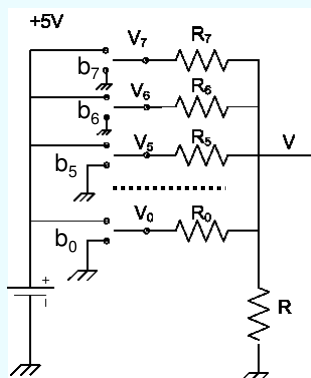
Como obter um DAC?

- Bits *on* ou *off* => níveis TTL
 - Rede de resistores
 - Amplificadores operacionais
 - ...

15



Rede de resistores



$$V = \frac{\frac{V_0}{R_0} + \frac{V_1}{R_1} + \dots + \frac{V_7}{R_7}}{1 + R\left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_1} + \dots + \frac{1}{R_7}\right)}$$

$$V = \sum_{k=0}^7 a_k V_k$$

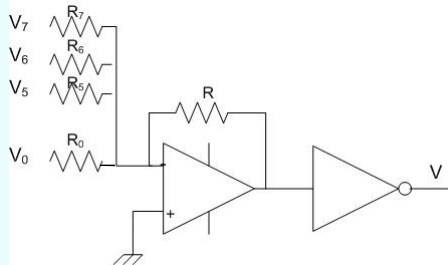
$$\text{se } R_k = \frac{R}{2^k}$$

$$\text{e } V_k = 5b_k \quad (b = 0 \text{ ou } 1)$$

$$V = \frac{5}{256R} \sum_{k=0}^7 b_k 2^k$$

16

DAC com amp.op.



$$V = R \cdot \left(\frac{V_0}{R_0} + \frac{V_1}{R_1} + \dots + \frac{V_7}{R_7} \right)$$

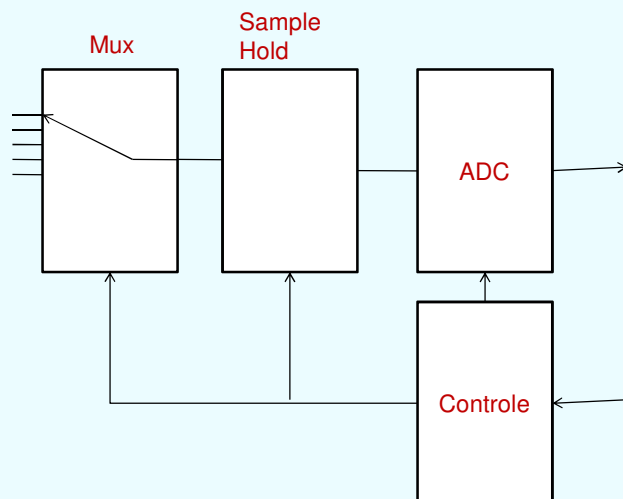
$$V = \sum_{k=0}^7 a_k V_k$$

$$\text{se } R_k = \frac{R}{2^k}$$

$$\text{e } V_k = 5b_k \text{ (b = 0 ou 1)}$$

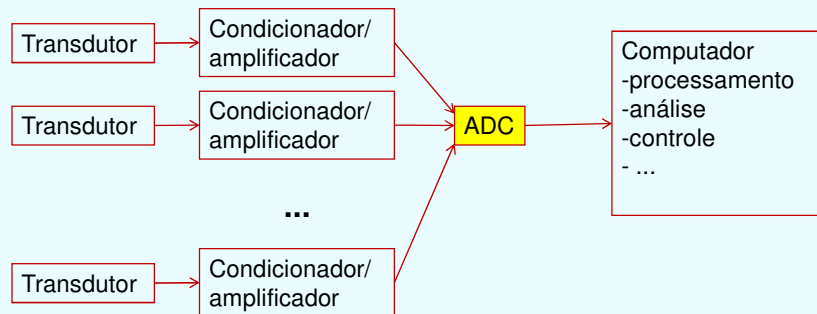
$$V = 5 \sum_{k=0}^7 b_k 2^k$$

ADC com múltiplos canais



Resumindo: Discretização, ADC

- Converte valores analógicos em digitais



Quais as características importantes de um ADC ?

19

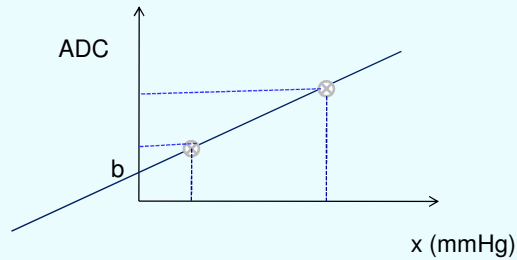
Características importantes: ADC

- Linearidade
- Frequência de amostragem (discretização temporal) máxima: kHz, MHz, GHz
- Resolução (quantização, número de bits): 8, 12, 14, 16
- Faixa dinâmica (valores mínimos e máximos): [-1,1], [-5,5], [-40,40], ...
- Número de canais simultâneos: 2, 4, 8, 64, ...

20

Linearidade e calibração

- calibração

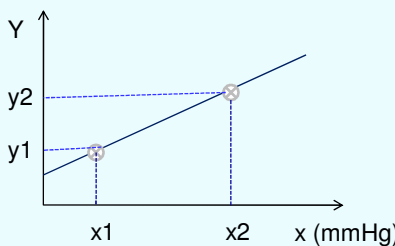


$$ADC = a \cdot x + b$$

Tendo-se **a** e **b**, pode-se determinar o valor de **x** em *mmHG* dado o valor do **ADC**

Exercício: linearidade, calibração

- Considere um ADC com a resposta abaixo:
 - Obtenha a relação $y(x)$, dados (x_1, y_1) , (x_2, y_2)
 - Se o valor de saída do ADC para:
 - $x_1 = 50 \text{ mmHg} \Rightarrow y_1 = 100$
 - $x_2 = 100 \text{ mmHg} \Rightarrow y_2 = 200$
 - Qual a pressão se o valor do ADC for 150?



$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$y = a \cdot x + b$$

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$b = \frac{x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2}{x_2 - x_1}$$

$$y = (1 - \alpha) \cdot y_1 + \alpha \cdot y_2$$

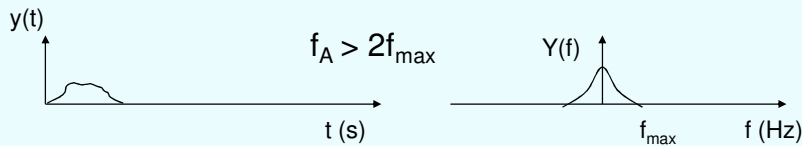
$$\alpha = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

(combinação linear)



Frequência de amostragem

- Critério de Nyquist da amostragem (teorema de Shannon)
 - A frequência de amostragem deve ser maior do que o dobro da maior frequência do sinal (para evitar *aliasing*)
 - ECG: banda 0 a 100Hz
 - Ultra-som obstétrico: 5 MHz
 - Ultra-som intra-vascular: 40 MHz



Exercício sobre ADC (1/2)

Você tem um sinal de ECG analógico $x(t)$, amplificado na faixa de -1 a 1V para ser analisado/processado digitalmente. Sabendo que:

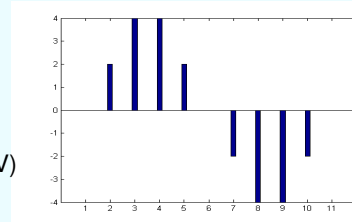
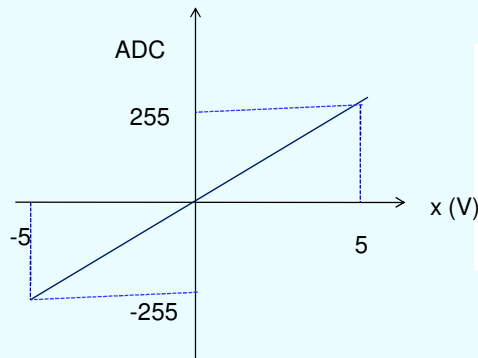
- Sinal de ECG tem banda em freq.: [0.01 a 100] Hz;
- Existe ruído branco aditivo da ordem de 0.1V;
- O ADC é de 8 bits e configurado na faixa de -1 a 1V;

Questões:

- Qual a frequência de amostragem (f_a) mínima do ADC desconsiderando o ruído?
- Qual a frequência de corte do filtro analógico?
- Qual a f_a mínima p/ $x(t)$ se o filtro analógico for um passa-baixa com 2 pólos? Assuma aliasing, devido ao ruído, desprezível se $\text{SNR} = -60\text{dB}$ em $f_a/2$

Resolução na quantização

- Está associada ao número de bits do ADC e à faixa-dinâmica da entrada



$$resolucao = \frac{V_{max} - V_{min}}{2^N - 1}$$

N : número de bits

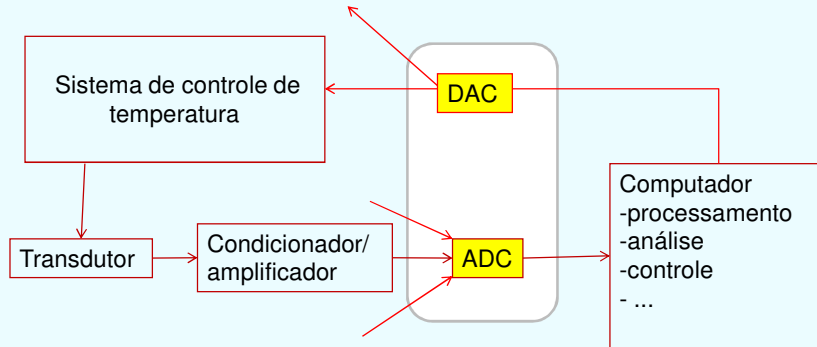
25

Outras características

- Saída analógica: DAC
- Entrada digital: DI
- Saída digital: DO
- Conexão: USB, ethernet, socket (PCI, PCX, ...)

26

Canais, entradas, saídas



Exemplos de ADCs

- Lynx (BR)
 - 16 canais de entrada, 12 bits, 20k amostras/s por canal, 16 entradas e saídas digitais
- National Instruments (EUA)
 - 8 analog inputs at 12 bits, 48 kS/s, 2 analog outputs at 12 bits, 12 TTL/CMOS digital I/O lines
 - 4 SE/4 DI, 10 MS/s/ch, 12 bits, 8 DIO TTL

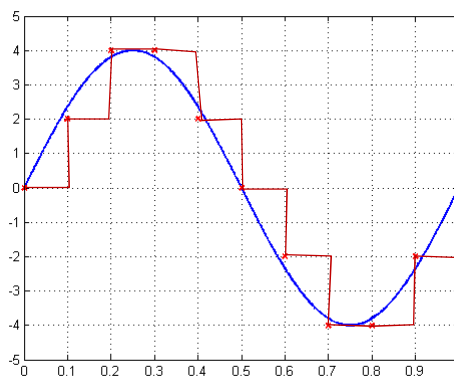


Plano de aula

- Motivação
- Exemplos em sinais e imagens
- Tipos e características de ADCs
- **Quantização**
- Discretização: amostragem temporal
- Efeito no domínio da frequência
- Interpolação



Quantização



$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

$\hat{x}(t)$: sinal do ADC convertido em unidades de x

Erro= $e(t)$: distribuição uniforme entre $[-u/2, u/2]$ ($p/N \gg 10$)

$$unidade = u = \frac{V_{\max} - V_{\min}}{2^N - 1}$$

N : número de bits

Exemplo:

$$N = 12$$

$$u = \frac{10}{4095} = 2,44 \text{ mV}$$

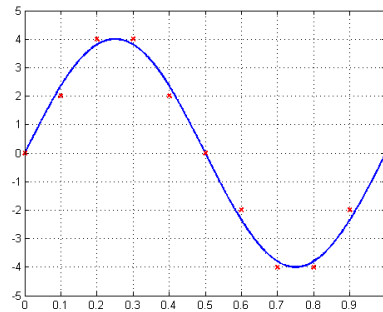
$$\text{var}(e) = \int e^2 \cdot p(e) \cdot de$$

$$p(e) = \frac{1}{u}$$

$$\text{var}(e) = \frac{u^2}{12}$$

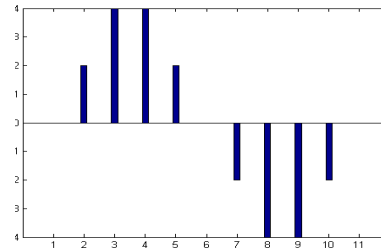


Amostragem temporal



$$F_A = 10 \text{ Hz} \Rightarrow \Delta_T = 0.1 \text{ s}$$

$$y(n, \Delta_T) = y(t)|_{t=n \cdot \Delta_T}$$



Vetor=[0 2 4 4 2 0 -2 -4 -4 -2 0]^T



Exercício sobre ADC (2/2)

Você tem um sinal de ECG analógico $x(t)$, amplificado na faixa de -1 a 1V para ser analisado/processado digitalmente. Sabendo que:

- Sinal de ECG tem banda em freq.: [0.01 a 100] Hz;
- Existe ruído branco aditivo da ordem de 0.1V;
- O ADC é de 8 bits e configurado na faixa de -1 a 1V;

Questões:

- Qual a resolução da quantificação do ADC (u =valor de uma unidade do ADC em V)?
- Se o valor amostrado for 100, qual o valor real da amostra em V?
- Há erro de quantização. Qual a precisão da quantização (desvio padrão do erro)? Suponha que o erro tem distribuição uniforme entre $[-u/2$ e $u/2]$. Variância= $u^2/12$. Interprete.



Plano de aula

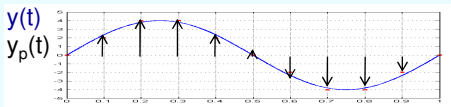
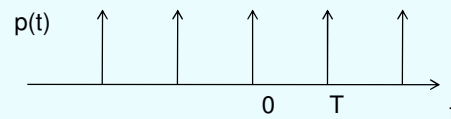
- Motivação
- Exemplos em sinais e imagens
- Tipos e características de ADCs
- Quantização
- Discretização
- **Efeito no domínio da frequência**
- Interpolação

33



Efeito da amostragem no domínio do tempo

- Amostragem regular (freq. Constante)
Trem de impulsos= $p(t)$



$$y_d(k) = [0 \ 2 \ 4 \ 4 \ 2 \ 0 \ -2 \ -4 \ -4 \ -2 \ 0]$$

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \delta(t - nT)$$

$$y_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} y(t) \cdot \delta(t - nT)$$

$$y_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} y(nT) \cdot \delta(t - nT)$$

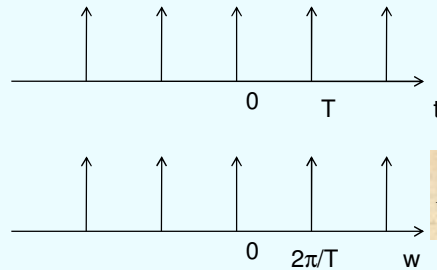
$$y_d(k) = y_p(kT)$$

34



Efeito da amostragem no dom. freq.

- Amostragem regular (freq. Constante)



$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

$$P(w) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(w - n \cdot \frac{2\pi}{T})$$

35



Efeito da amostragem no domínio da frequência: *aliasing*

$$y_p(t) = y(t) \cdot p(t)$$

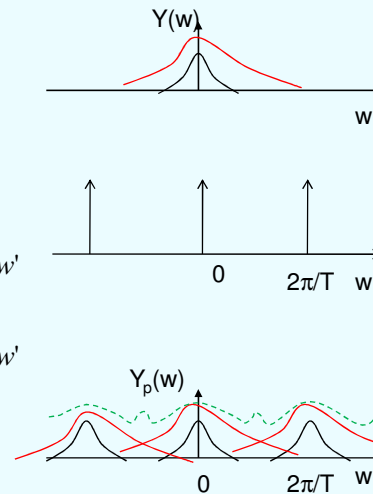
$$Y_p(w) = Y(w) * P(w)$$

$$Y_p(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(w') \cdot P(w - w') dw'$$

$$Y_p(w) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(w') \cdot \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(w - w' - n \cdot \frac{2\pi}{T}) dw'$$

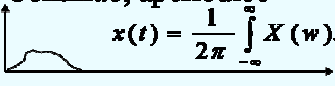
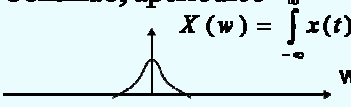
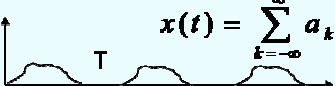
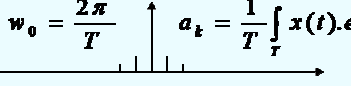
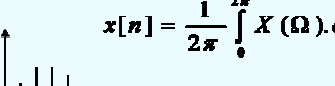
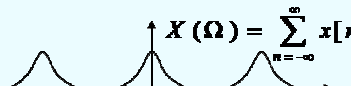
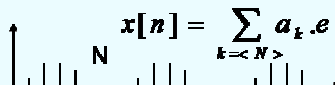
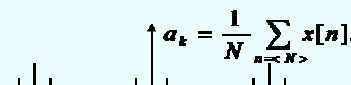
$$Y_p(w) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Y(w') \cdot \delta(w - w' - n \cdot \frac{2\pi}{T}) dw'$$

$$Y_p(w) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y(w - n \cdot \frac{2\pi}{T})$$



Aliasing ...

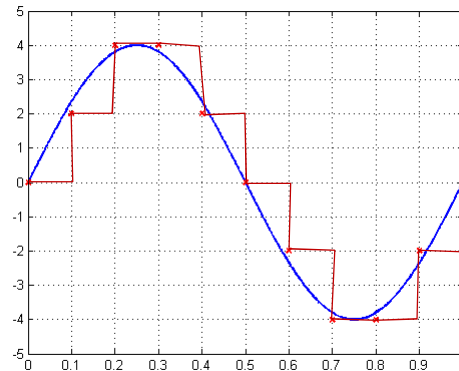
36

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos Aula 13: Conversão Analógico-Digital, discretização EPUSP	Domínio do tempo Contínuo, aperiódico $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$ 	Domínio da frequência Contínuo, aperiódico $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$ 
	Contínuo, periódico(T) $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{j\omega_0 t}$ 	Discreto(2π/T), aperiódico $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) \cdot e^{-j\omega_0 t} dt$ 
	Discreto (nΔ), aperiódico $x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(\Omega) \cdot e^{j\Omega n} d\Omega$ 	Contínuo, periódico(2π/Δ) $X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-j\Omega n}$ 
	Discreto(nΔ), periódico(T) $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{j2\pi \frac{k}{N} n}$ 	Discreto(2π/T), periódico(2π/Δ) $a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-j2\pi \frac{n}{N} k}$ 
InCor/EPUSP SF		32
PTC/ LEB - S.Furuie		37

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos Aula 13: Conversão Analógico-Digital, discretização EPUSP	Plano de aula • Motivação • Exemplos em sinais e imagens • Tipos e características de ADCs • Quantização • Discretização • Efeito no domínio da frequência • Interpolação/ restauração do sinal
	PTC/ LEB - S.Furuie 38

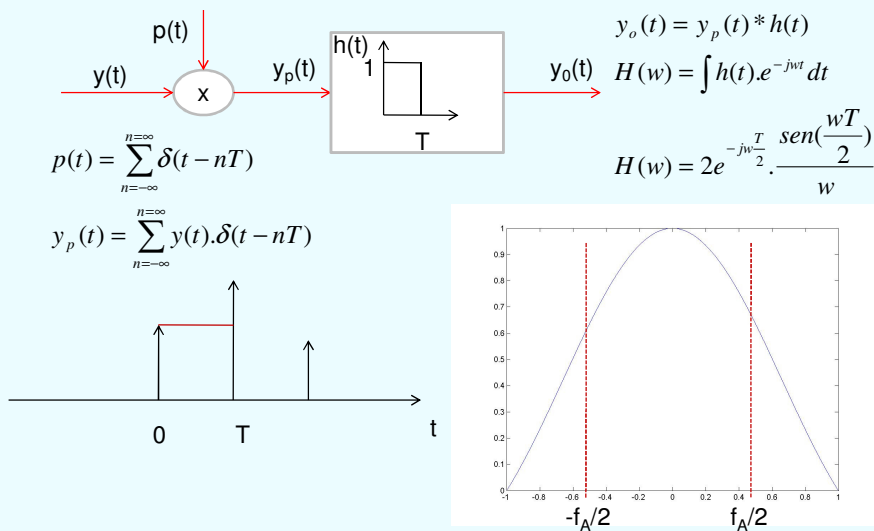
Interpolação

- Ordem 0
- Linear
- Polinomial
- B-Spline
- Ideal (sinc(t))

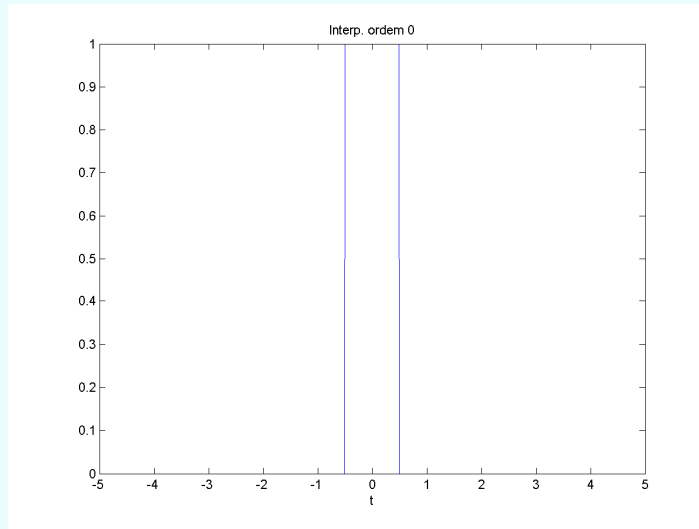


Convolução de impulsos com pulsos de duração T

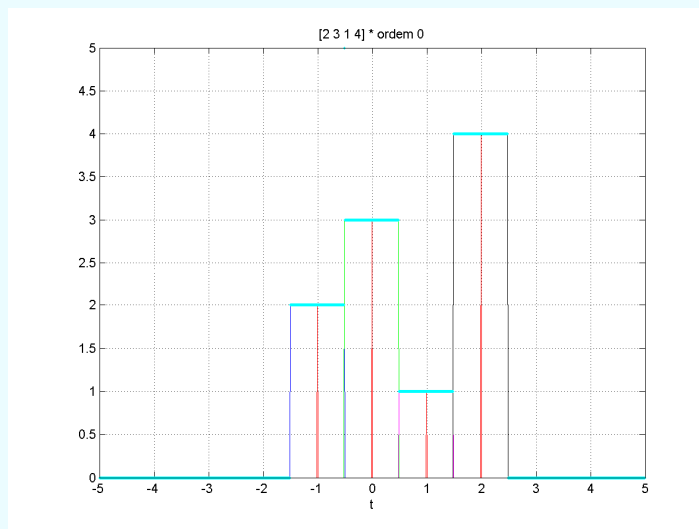
Interpolação de ordem 0



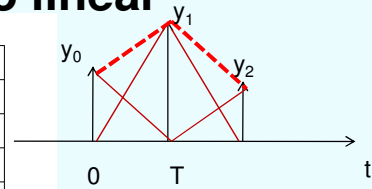
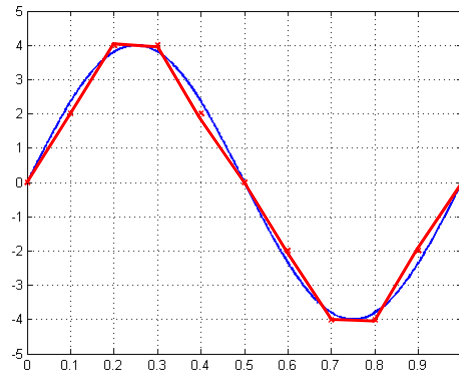
Base interpolação ordem 0



Exemplo com fase 0 (centrado)



Interpolação linear



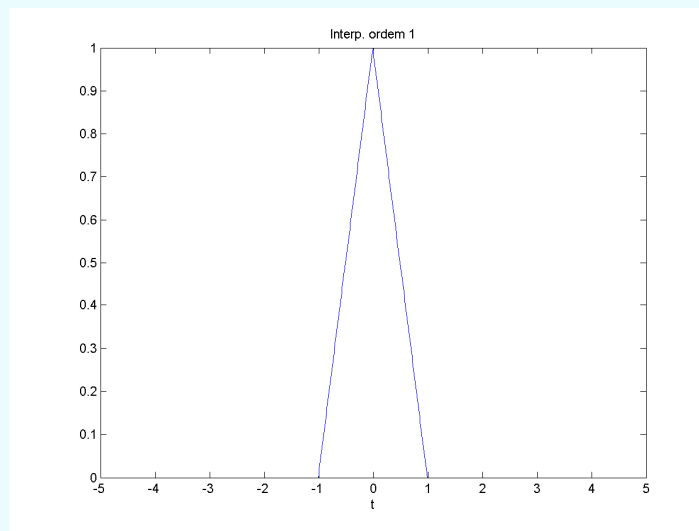
Convolução de impulsos com Triângulos com base $[-T, T]$

$$H(w) = \frac{1}{T} \left(\frac{\text{sen}\left(\frac{wT}{2}\right)}{\frac{w}{2}} \right)^2$$

Obs.: $H(w)$ pode ser obtida considerando que a função triângulo é a convolução de 2 funções retangulares

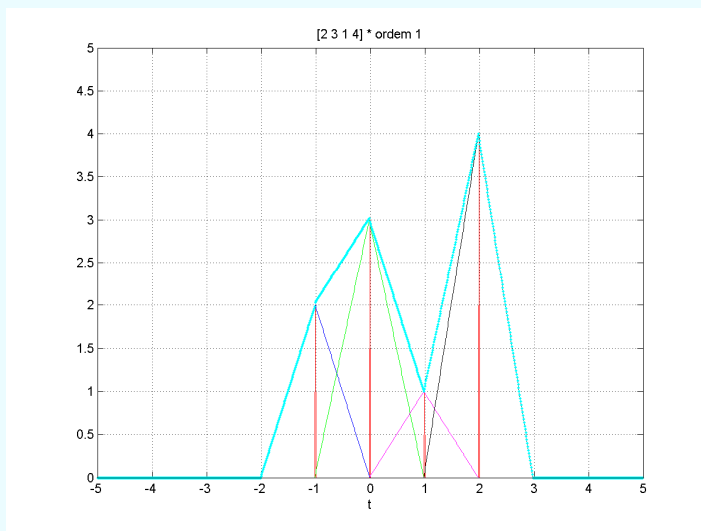


Base interpolação ordem 1





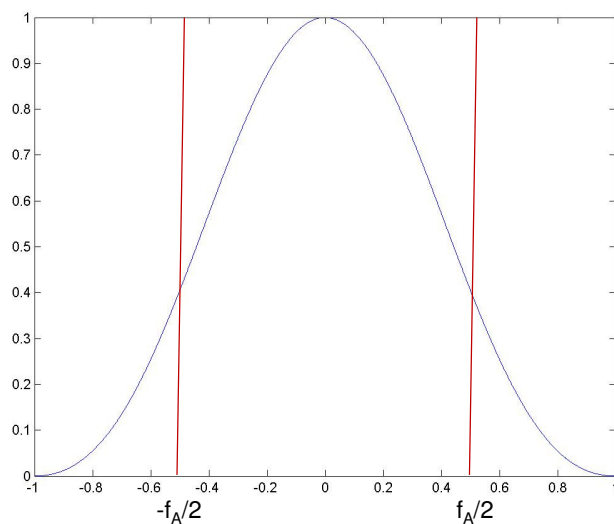
Exemplo



45



Interpolação linear no dom. freq.



46



Interpolação polinomial

- Fitting (least-square) com polinômio de grau n
- Spline cúbica
 - Interpolação (fitting) com função cúbica por intervalo
 - Continuidade das derivadas até 2ª ordem
 - Solução consistente para todos as N amostras => sistema de equações lineares
- B-spline cúbica (splines com funções base)

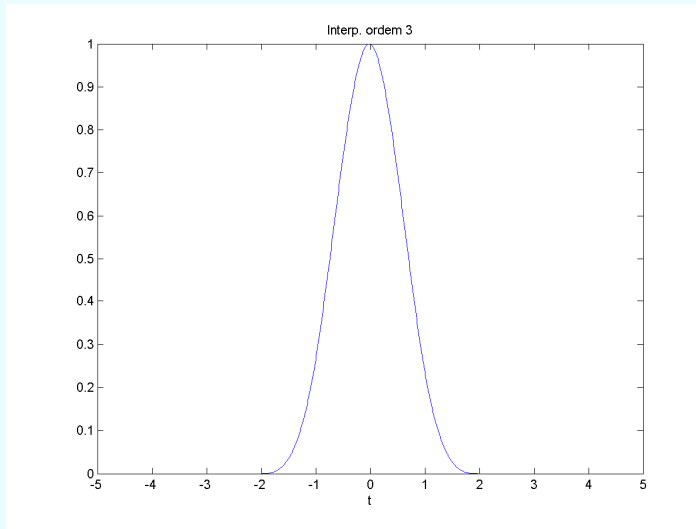


B-spline cúbica

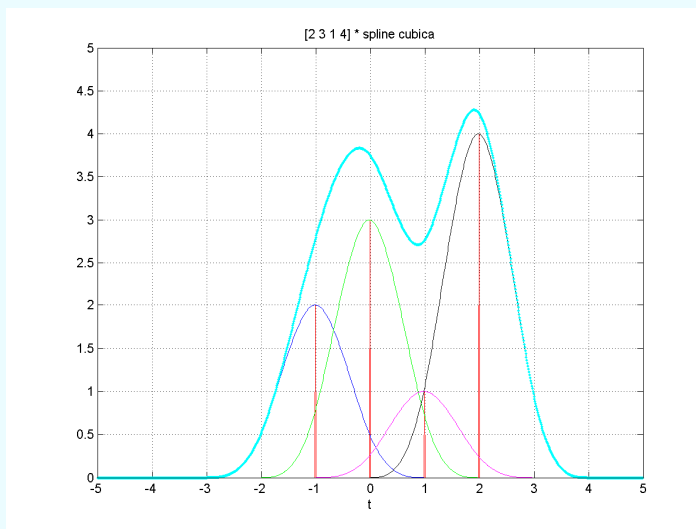
- Não necessariamente passa pelos pontos
- Base obtida recursivamente a partir da ordem 0
- Considera 4 pontos adjacentes p/ obter a função interpolante em cada intervalo

$$S_i(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{i-1} \\ p_i \\ p_{i+1} \\ p_{i+2} \end{bmatrix} \quad t: [0,1]$$

B-spline cúbica: base



B-spline cúbica





Interpolação ideal

$$Q(w) = 1 \text{ para } \left(-\frac{w_A}{2} \leq w \leq \frac{w_A}{2}\right)$$

$$q(t) = \frac{\sin\left(\frac{w_A}{2}t\right)}{\pi}$$

$$Y(w) = Y_d(w) \cdot Q(w)$$

$$y(t) = y_d(t) * q(t)$$

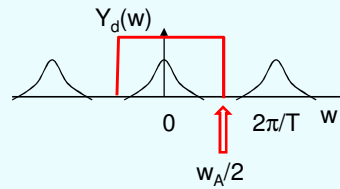
$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} q(t') y_d(t-t') dt'$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} q(t') \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_d(t-t'-nT) dt'$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} q(t') y_d(t-t'-nT) dt'$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q(t-nT) y_d(nT)$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_d(nT) q(t-nT)$$

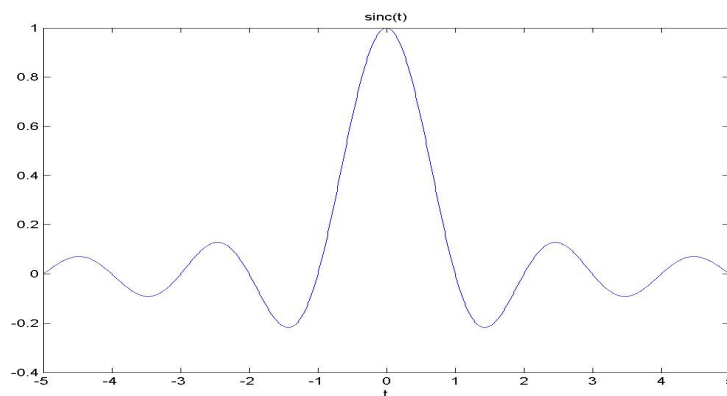


Convolução das amostras com a função $\text{sen}(w_A t/2)/(\pi t)$



$$\text{sinc}(x) = \frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi x}$$

$$\frac{\sin\left(\frac{w_A t}{2}\right)}{\pi} = \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)}{\pi} = \frac{1}{T} \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi/T} = \frac{1}{T} \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$$





Exercício sobre interpolação

Uma vez que o sinal foi processado ($y(n)$), você gostaria de apresentar o resultado visualmente em unidades físicas, não somente os pontos digitais isolados. Seja $y(n)=[0 \ 20 \ 10]$ onde $f_a=100$ Hz e 1 unidade ADC= $u=100$ mV. Obtenha todos os valores (em V) de 2 em 2 ms considerando uma interpolação linear.



Bibliografia

- Apostila de Processamento de Sinais de Tempo Discreto. C Itiki, V H Nascimento
- Biomedical Signal Analysis. R.M. Rangayyan. Wiley Interscience, 2002
- Signals and Systems (2nd Edition) A.V. Oppenheim, A. S. Willsky, S. H. Nawab Hardcover: 957 pages. Publisher: Prentice Hall; 1996. ISBN-10: 0138147574.
- Biosignal and Medical Image Processing. John L. Semmlow. CRC Press, 2009