Conversão Análogico-Digital (ADC)

Prof. Sérgio S Furuie
LEB/PTC/EPUSP

Abordagem: motivação – intuição - formalização

Bibliografia indicada: cap. 7 do Oppenheim

Avaliação (da 2ª metada da disciplina)

- Participação (+ 10%)
- Prova de 12/05 (2ª. Prova)
  - Questões da Profa. Cinthia (1h)
  - Questões do Prof. Furuie (1h)
    - 4 questões, das quais 2 escolhidas entre as sugeridas pelos estudantes até 08/05/2009 (sexta-feira)
      - Até 1 questão pertinente e inteligente por estudante, com tempo de resolução menor do que 15 minutos.
- Terceira prova: projeto (20/05-16/06) com defesa em 16/06

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Aula 13: Conversão Analógico-Digital, discretização

Plano de aula

- Motivação
- Exemplos em sinais e imagens
- Tipos e características de ADCs
- Quantização
- Discretização/Amostragem
- Efeito no domínio da frequência
- Interpolação

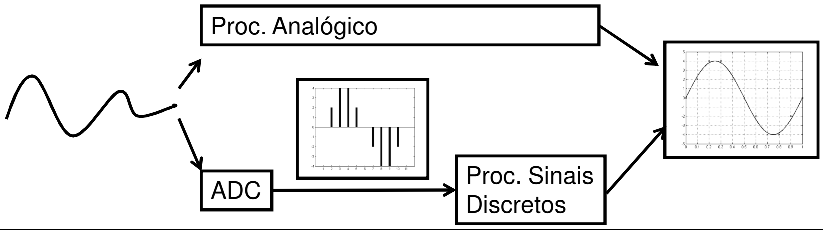
PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Aula 13: Conversão Analógico-Digital, discretização

Plano de aula

- Motivação
- Exemplos em sinais e imagens
- Tipos e características de ADCs
- Quantização
- Discretização
- Efeito no domínio da frequência
- Interpolação

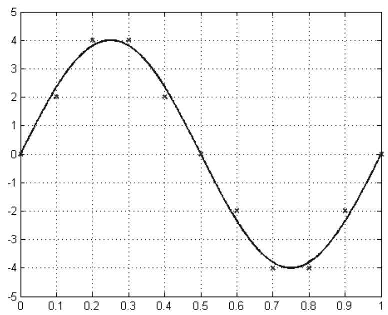
Sinal contínuo

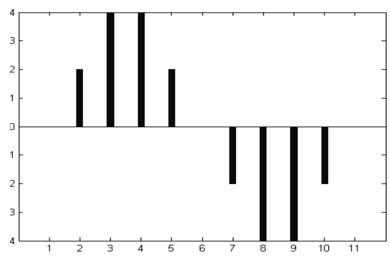
- Processamento e análise:
  - Processamento analógico: p. ex. filtro analógico
  - Processamento digital
    - Converter para sinal discreto
    - Processamento digital: p. ex. filtro discreto



Ainda há necessidade de filtro analógico?

Amostragem e quantização





Série numérica:
[0 2 4 4 2 0 -2 -4 -4 -2 0]

Vetor=[0 2 4 4 2 0 -2 -4 -4 -2 0]^T

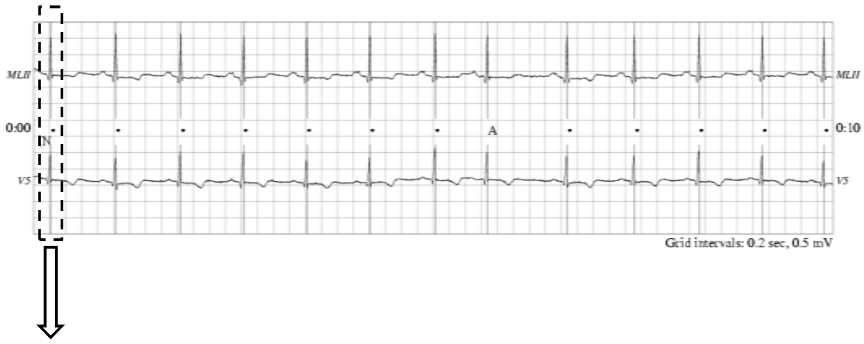
PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Aula 13: Conversão Analógico-Digital, discretização

Plano de aula

- Motivação
- Exemplos em sinais e imagens
- Tipos e características de ADCs
- Quantização
- Discretização
- Efeito no domínio da frequência
- Interpolação

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Aula 13: Conversão Analógico-Digital, discretização

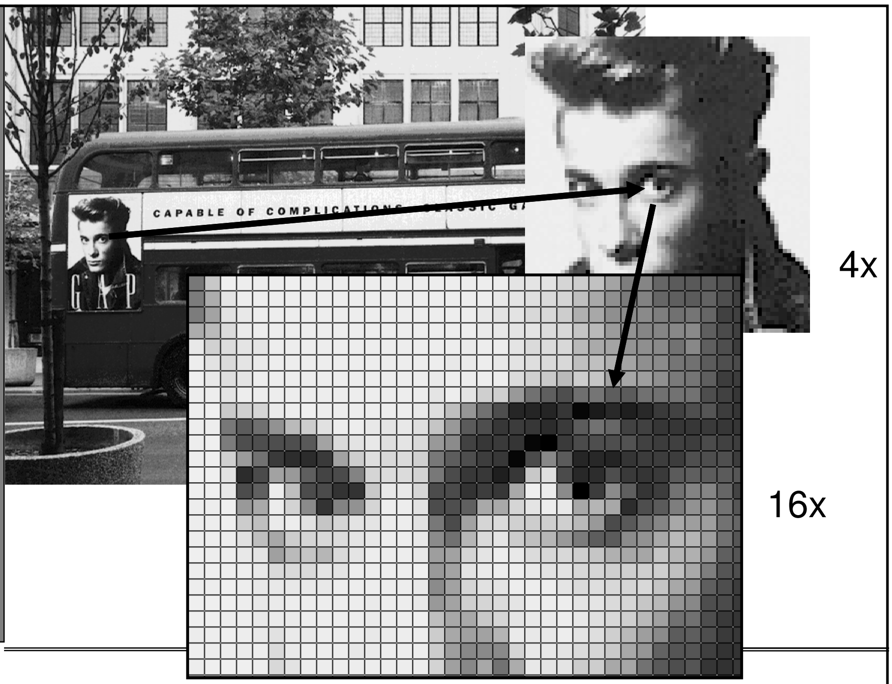
Exemplo: Sinais de ECG



Séries numéricas:
S1=[0 2 4 4 2 0 -2 12 45 166 50 33 -2 0 ...]^T
S2=[0 3 3 4 0 0 -2 11 47 146 30 13 -1 3 ...]^T

Bloqueio do ramo esquerdo

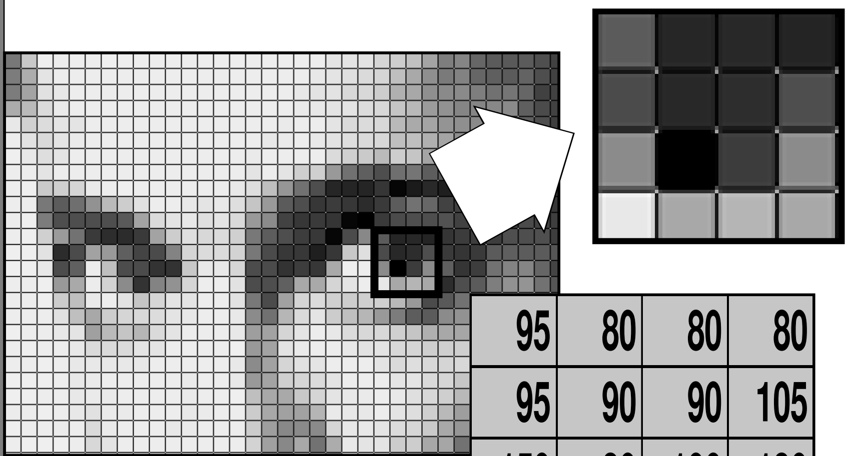
PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Aula 13: Conversão Analógico-Digital, discretização



EPUSP PTC/ LEB - S.Furuie

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Aula 13: Conversão Analógico-Digital, discretização

Processo de Discretização



95	80	80	80
95	90	90	105
150	20	100	130
220	150	160	150

256 tons de cinza
Pixel= picture element (local, valor)
Voxel=volume element

EPUSP PTC/ LEB - S.Furuie

Bits, bytes

- Representação numérica na base 2
- Bits {0, 1} : dígitos na base 2
- Byte: composto por 8 bits

2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
0	0	0	0	0	1	0	1
					x	x	x
					2^2	2^1	2^0

4 + 0 + 1=5

Resumindo:Discretização, ADC

- Converte valores analógicos em digitais
  - Em geral valores de tensão elétrica, pois a maioria dos transdutores convertem para parâmetros elétricos (efeitos fotoelétrico, piezoelétrico, termistores, strain gauges, ...)

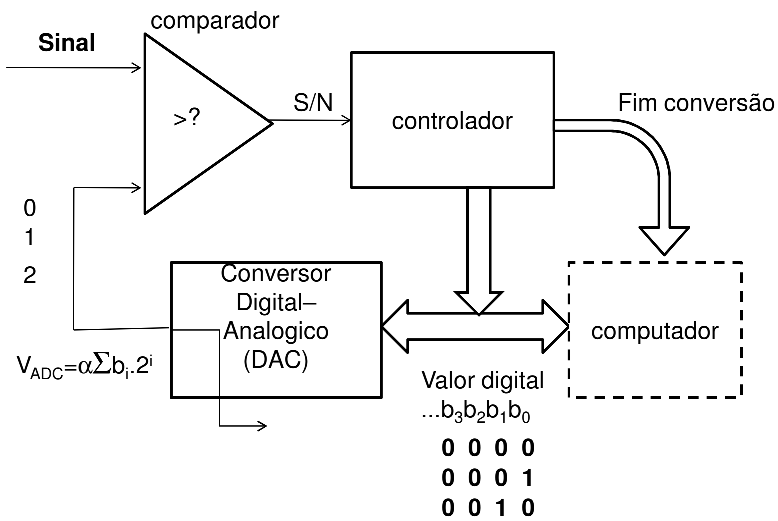
Transdutor → Condicionador/ amplificador → ADC → Computador
-processamento
-análise
-controle
- ...

Quais as características importantes de um ADC ?

Plano de aula

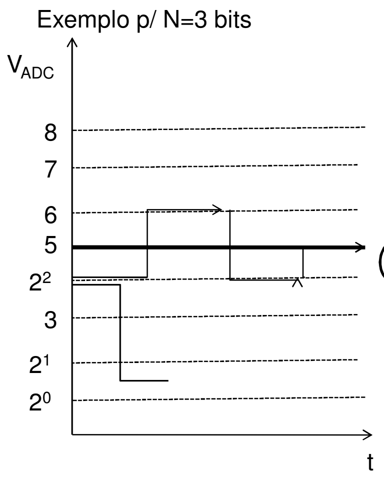
- Motivação
- Exemplos em sinais e imagens
- Tipos e características de ADCs
- Quantização
- Discretização
- Efeito no domínio da frequência
- Interpolação

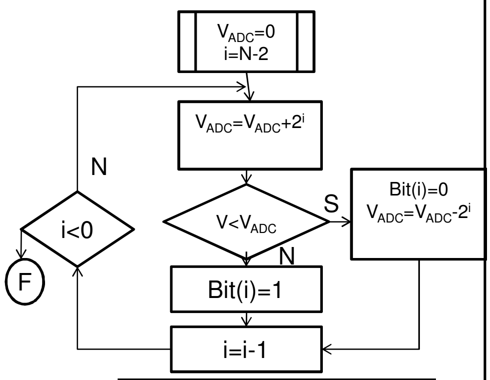
Diagrama em blocos – ADC



Aproximação sequencial

ADC: aprox. sucessiva





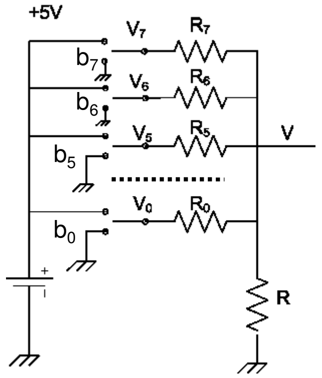
i	b_2	b_1	b_0	V_{ADC}
2	1	0	0	4
1	1	1	0	6
0	1	0	1	5

• tempo de conversão constante

Como obter um DAC?

- Bits *on* ou *off* => níveis TTL
  - Rede de resistores
  - Amplificadores operacionais
  - ...

Rede de resistores



$$V = \frac{\frac{V_0}{R_0} + \frac{V_1}{R_1} + \ldots + \frac{V_7}{R_7}}{1 + R(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_1} + \ldots + \frac{1}{R_7})}$$

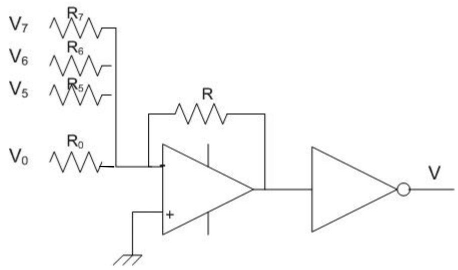
$$V = \sum_{k=0}^{7} a_k V_k$$

$$\text{se } \mathrm{R_k} = \frac{R}{2^k}$$

$$\text{e } \mathrm{V_k} = 5b_k \quad (\mathrm{b} = 0 \text{ ou } 1)$$

$$V = \frac{5}{256R} \sum_{k=0}^{7} b_k 2^k$$

DAC com amp.op.



$$V = R.\left(\frac{V_0}{R_0} + \frac{V_1}{R_1} + \ldots + \frac{V_7}{R_7}\right)$$

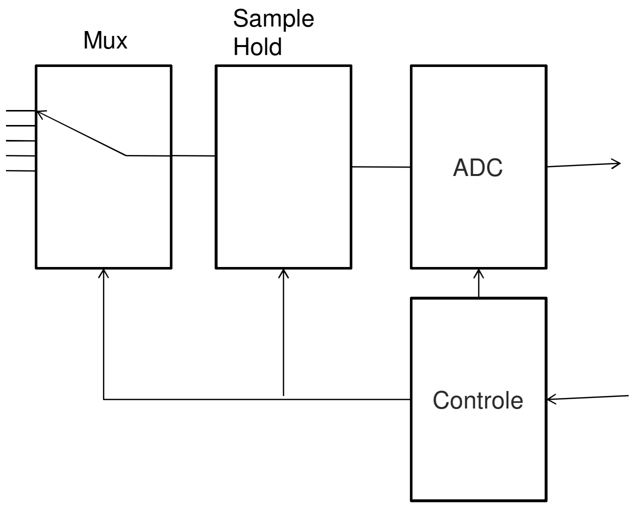
$$V = \sum_{k=0}^{7} a_k V_k$$

$$\text{se } \mathrm{R_k} = \frac{R}{2^k}$$

$$\text{e } \mathrm{V_k} = 5b_k \quad (\mathrm{b} = 0 \text{ ou } 1)$$

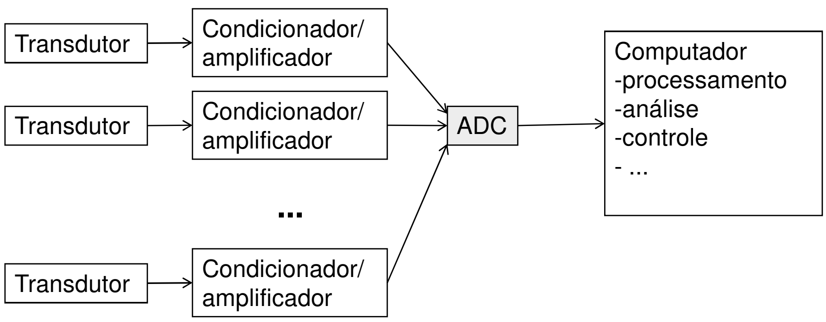
$$V = 5\sum_{k=0}^{7} b_k 2^k$$

ADC com múltiplos canais



Resumindo:Discretização, ADC

- Converte valores analógicos em digitais



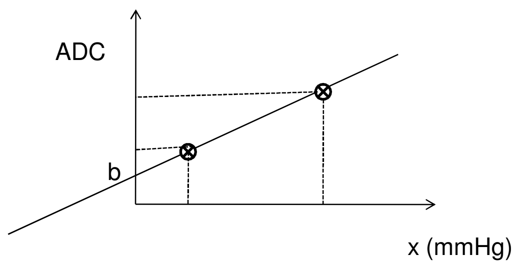
Quais as características importantes de um ADC ?

Características importantes: ADC

- Linearidade
- Frequência de amostragem (discretização temporal) máxima: kHz, MHz, GHz
- Resolução (quantização, número de bits): 8, 12, 14, 16
- Faixa dinâmica (valores mínimos e máximos): [-1,1], [-5,5], [-40,40], ...
- Número de canais simultâneos:2, 4, 8, 64, ...

Linearidade e calibração

- calibração

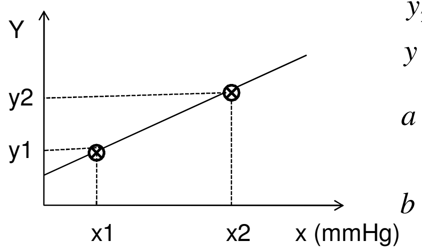


ADC=a.x + b

Tendo-se **a** e **b**, pode-se determinar
o valor de **x** em *mmHG* dado o valor do **ADC**

Exercício: linearidade, calibração

- Considere um ADC com a resposta abaixo:
  - Obtenha a relação y(x), dados (x1,y1), (x2,y2)
  - Se o valor de saída do ADC para:
    - x1=50 mmHg => y1=100
    - x2=100 mmHg =>y2=200
  - Qual a pressão se o valor do ADC for 150?



$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

$$y=a.x+b$$

$$a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$b=\frac{x_2.y_1-x_1.y_2}{x_2-x_1}$$

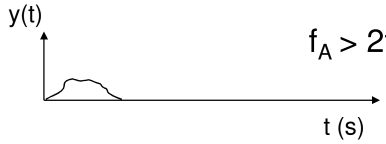
$$y=(1-\alpha).y_1+\alpha.y_2$$

$$\alpha=\frac{x\ -x_1}{x_2-x_1}$$

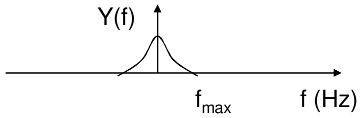
(combinação linear)

Frequência de amostragem

- Critério de Nyquist da amostragem (teorema de Shannon)
  - A frequência de amostragem deve ser <u>maior do que o dobro</u> da maior frequência do sinal (para evitar *aliasing*)
  - ECG: banda 0 a 100Hz
  - Ultra-som obstétrico: 5 MHz
  - Ultra-som intra-vascular: 40 MHz



$f_A > 2f_{max}$



Exercício sobre ADC (1/2)

Você tem um sinal de ECG analógico x(t), amplificado na faixa de -1 a 1V para ser analisado/processado digitalmente. Sabendo que:

a) Sinal de ECG tem banda em freq.: [0.01 a 100] Hz;
b) Existe ruído branco aditivo da ordem de 0.1V;
c) O ADC é de 8 bits e configurado na faixa de -1 a 1V;

Questões:

1) Qual a frequência de amostragem (f_a) mínima do ADC desconsiderando o ruído?
2) Qual a frequência de corte do filtro analógico?
3) Qual a f_a mínima p/ x(t) se o filtro analógico for um passa-baixa com 2 pólos? Assuma aliasing, devido ao ruído, desprezível se SNR=60dB em $f_a/2$

solução

1. Fa=200 Hz
2. Fc=100 Hz

3.

$s = 1$ (sinal)

$20\log(s/r_n) = 60 \therefore s/r_n = 1000$

$\therefore r_n = 0.001$ (ruido na freq. de Nyquist)

$$\mathrm{G(f)} = \begin{cases} \mathrm{K} \quad \text{para } \mathrm{f} \le \mathrm{f_c} \text{ (frequencia de corte)} \\ \dfrac{\mathrm{K}}{(\frac{\mathrm{f - f_c}}{\mathrm{f_c}})^2} \quad \text{para } \mathrm{f} > \mathrm{f_c} \end{cases}$$

$r_c = 0.1$ (ruido na freq. de corte)

$r_c = 0.1 = r_0.\mathrm{G(f_c)} = r_0.K$

$r_n = 0.001 = r_0.\mathrm{G(f_a/2)} = r_0.\dfrac{\mathrm{K}}{(\frac{\mathrm{f_a/2 - f_c}}{\mathrm{f_c}})^2}$

dividindo as 2 expressões acima,

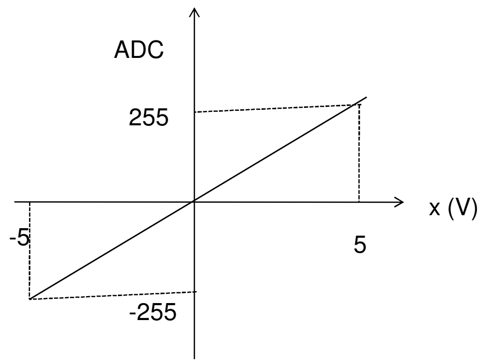
$10 = \dfrac{\mathrm{f_a/2 - f_c}}{\mathrm{f_c}}$

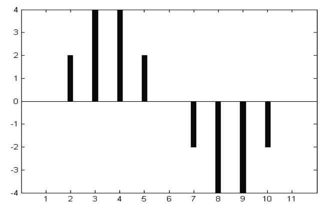
$\therefore \mathrm{f_a} = 22\mathrm{f_c} = 2200Hz$

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Aula 13: Conversão Analógico-Digital, discretização

Resolução na quantização

- Está associada ao número de bits do ADC e à faixa-dinâmica da entrada





$$resolucao = \frac{V_{max} - V_{min}}{2^N - 1}$$

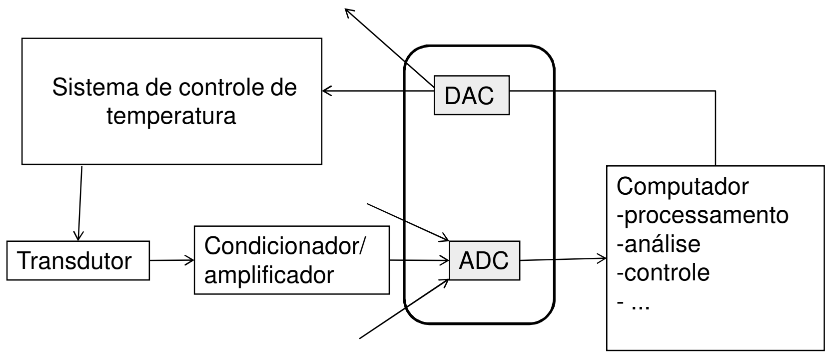
N : número de bits

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Aula 13: Conversão Analógico-Digital, discretização

Outras características

- Saída analógica: DAC
- Entrada digital: DI
- Saída digital: DO
- Conexão: USB, ethernet, socket (PCI, PCX, ...)

Canais, entradas, saídas



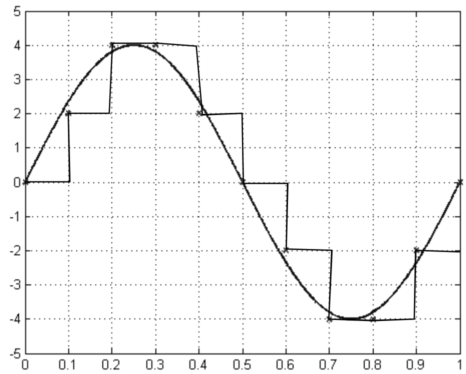
Exemplos de ADCs

- Lynx (BR)
  - 16 canais de entrada, 12 bits,20k amostras/s por canal, 16 entradas e saídas digitais
- National Instruments (EUA)
  - 8 analog inputs at 12 bits, 48 kS/s, 2 analog outputs at 12 bits, 12 TTL/CMOS digital I/O lines
  - 4 SE/4 DI,10 MS/s/ch,12 bits,8 DIO TTL

Plano de aula

- Motivação
- Exemplos em sinais e imagens
- Tipos e características de ADCs
- Quantização
- Discretização: amostragem temporal
- Efeito no domínio da frequência
- Interpolação

Quantização



$$unidade = u = \frac{V_{max} - V_{min}}{2^N - 1}$$

N : número de bits

Exemplo:

$$N = 12$$

$$u = \frac{10}{4095} = 2{,}44 \ mV$$

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

$\hat{x}(t)$: sinal do ADC convertido em unidades de x

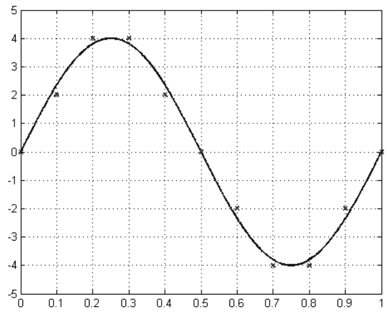
Erro=e(t): distribuição uniforme entre [-u/2, u/2] (p/ N >>10)

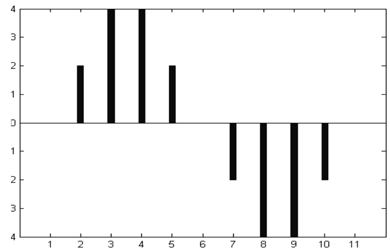
$$\mathrm{var}(e) = \int e^2 . p(e) . de$$

$$p(e) = \frac{1}{u}$$

$$\mathrm{var}(e) = \frac{u^2}{12}$$

Amostragem temporal





Vetor=$[0\ 2\ 4\ 4\ 2\ 0\ -2\ -4\ -4\ -2\ 0]^T$

F_A=10 Hz => Δ_T=0.1 s

$y(n.\ \Delta_T)=y(t)|_{t=\ n.\ \Delta T}$

Exercício sobre ADC (2/2)

Você tem um sinal de ECG analógico x(t), amplificado na faixa de -1 a 1V para ser analisado/processado digitalmente. Sabendo que:

a) Sinal de ECG tem banda em freq.: [0.01 a 100] Hz;
b) Existe ruído branco aditivo da ordem de 0.1V;
c) O ADC é de 8 bits e configurado na faixa de -1 a 1V;

<u>Questões</u>:

4) Qual a resolução da quantificação do ADC (u=valor de uma unidade do ADC em V)?
5) Se o valor amostrado for 100, qual o valor real da amostra em V?
6) Há erro de quantização. Qual a precisão da quantização (desvio padrão do erro)? Suponha que o erro tem distribuição uniforme entre [-u/2 e u/2]. Variância=$u^2/12$. Interprete.

solução

4) u=2/255

5) v=200/255

6) $dp^2=u^2/12$

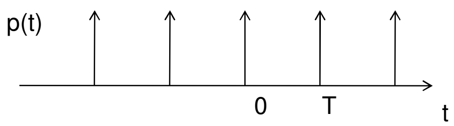
Plano de aula

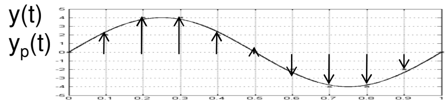
- Motivação
- Exemplos em sinais e imagens
- Tipos e características de ADCs
- Quantização
- Discretização
- Efeito no domínio da frequência
- Interpolação

Efeito da amostragem no domínio do tempo

- Amostragem regular (freq. Constante)

Trem de impulsos=p(t)





$y_d(k)$= [0 2 4 4 2 0 -2 -4 -4 -2 0]

$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\delta(t-nT)$$

$$y_p(t)=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}y(t).\delta(t-nT)$$

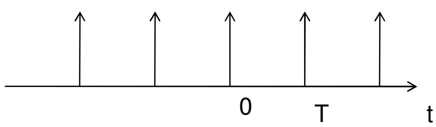
$$y_p(t)=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}y(nT).\delta(t-nT)$$

$$y_d(k)=y_p(kT)$$

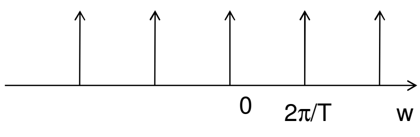
PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Aula 13: Conversão Analógico-Digital, discretização

Efeito da amostragem no dom. freq.

- Amostragem regular (freq. Constante)



$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\delta(t-nT)$$



$$P(w)=\frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\delta(w-n.\frac{2\pi}{T})$$

Efeito da amostragem no domínio da frequencia: *aliasing*

$$y_p(t) = y(t).p(t)$$

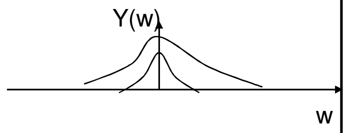
$$Y_p(w) = Y(w) * P(w)$$

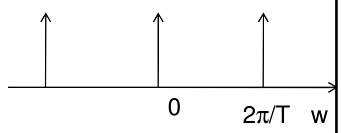
$$Y_p(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y(w').P(w-w')dw'$$

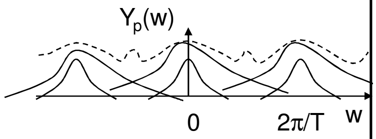
$$Y_p(w) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(w').\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\delta(w-w'-n.\frac{2\pi}{T}).dw'$$

$$Y_p(w) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Y(w').\delta(w-w'-n.\frac{2\pi}{T})dw'$$

$$Y_p(w) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} Y(w-n.\frac{2\pi}{T}).$$





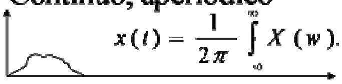


Aliasing ...

Domínio do tempo | Domínio da frequência

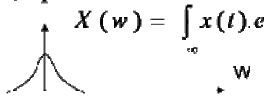
Contínuo, aperiódico

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{\infty} X(w).e^{jwt}dw$$



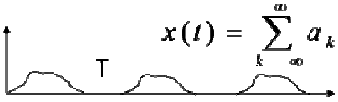
Contínuo, aperiódico

$$X(w) = \int_{\infty}^{\infty} x(t).e^{jwt}dt$$



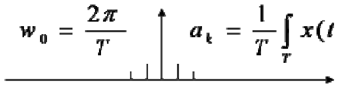
Contínuo, periódico(T)

$$x(t) = \sum_{k=\infty}^{\infty} a_k.e^{jkw_0t}$$



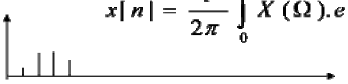
Discreto(2π/T), aperiódico

$$w_0 = \frac{2\pi}{T} \qquad a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t).e^{jkw_0t}dt$$



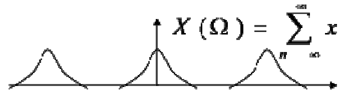
Discreto (nΔ), aperiódico

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(\Omega).e^{j\Omega n}d\Omega$$



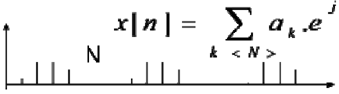
Contínuo, periódico(2π/Δ)

$$X(\Omega) = \sum_{n=\infty}^{\infty} x[n].e^{j\Omega n}$$



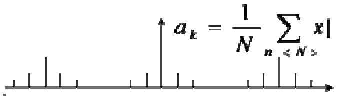
Discreto(nΔ), periódico(T)

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k.e^{j2\pi\frac{k}{N}n}$$



Discreto(2π/T), periódico(2π/Δ)

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n].e^{j2\pi\frac{n}{N}k}$$



nCor/EPUSP SF 32

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Aula 13: Conversão Analógico-Digital, discretização

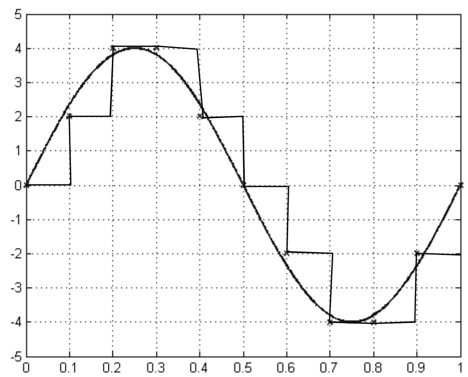
Plano de aula

- Motivação
- Exemplos em sinais e imagens
- Tipos e características de ADCs
- Quantização
- Discretização
- Efeito no domínio da frequência
- Interpolação/ restauração do sinal

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Aula 13: Conversão Analógico-Digital, discretização

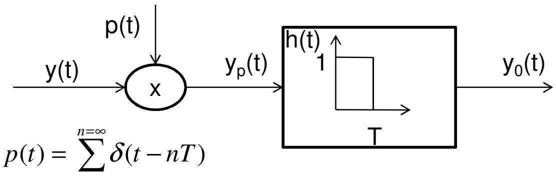
Interpolação

- Ordem 0
- Linear
- Polinomial
- B-Spline
- Ideal (sinc(t))



Convolução de impulsos com pulsos de duração T

Interpolação de ordem 0



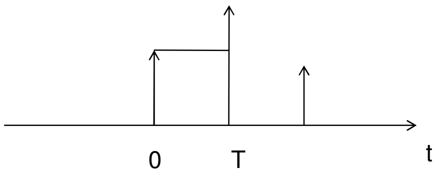
$$y_o(t) = y_p(t) * h(t)$$

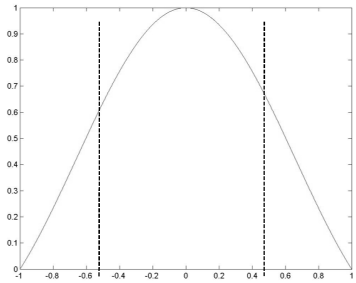
$$H(w) = \int h(t).e^{-jwt}\,dt$$

$$H(w) = 2e^{-jw\frac{T}{2}}.\frac{sen(\frac{wT}{2})}{w}$$

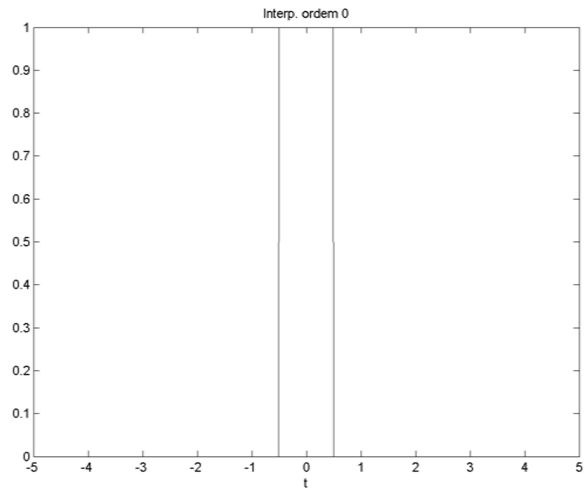
$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \delta(t - nT)$$

$$y_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} y(t).\delta(t - nT)$$

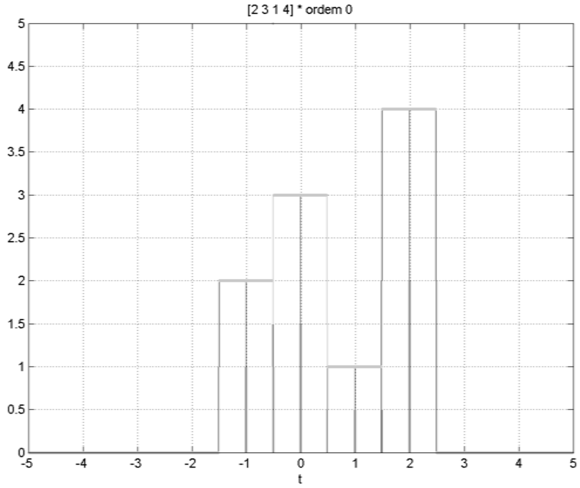




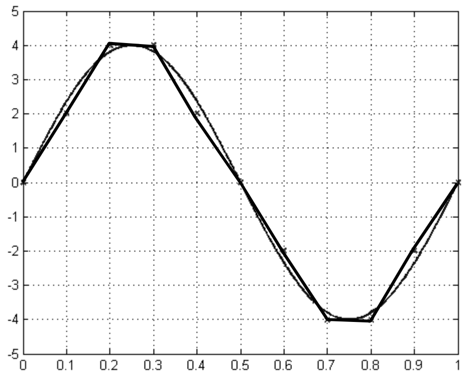
Base interpolação ordem 0

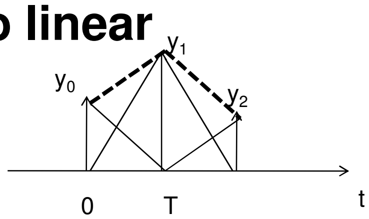


Exemplo com fase 0 (centrado)



Interpolação linear





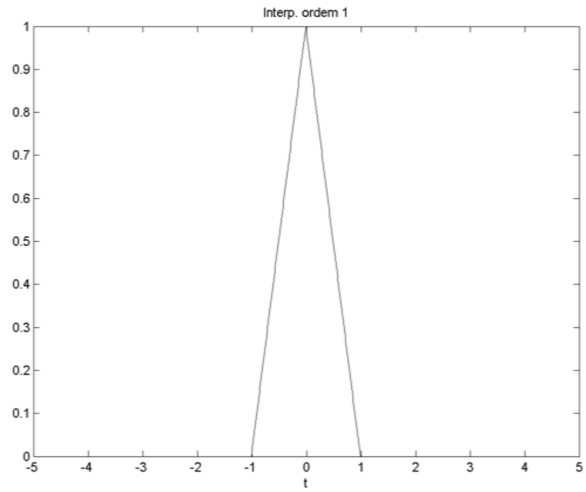
Convolução de impulsos com Triângulos com base [-T,T]

$$H(w) = \frac{1}{T}\left(\frac{sen(\frac{wT}{2})}{\frac{w}{2}}\right)^2$$

Obs.: H(w) pode ser obtida considerando que a função triângulo é a convolução de 2 funções retangulares

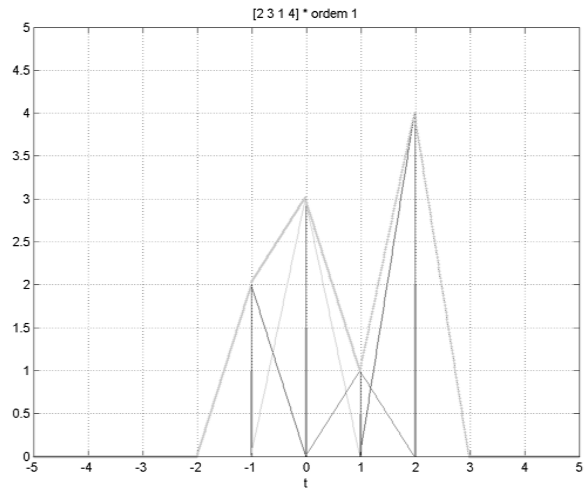
PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Aula 13: Conversão Analógico-Digital, discretização

Base interpolação ordem 1

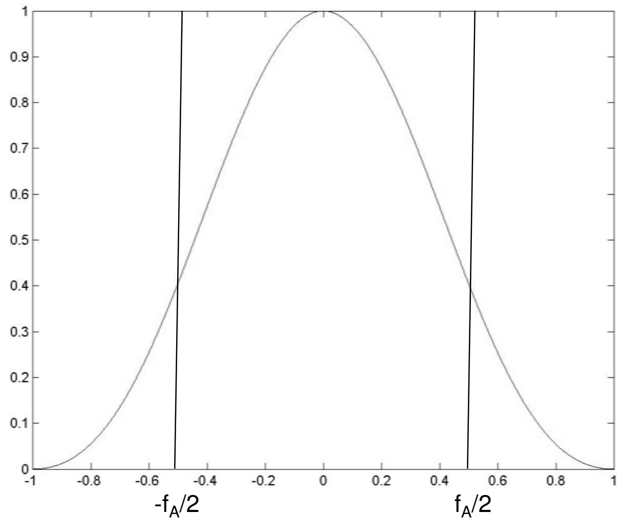


PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Aula 13: Conversão Analógico-Digital, discretização

Exemplo



Interpolação linear no dom. freq.



Interpolação polinomial

- Fitting (least-square) com polinômio de grau n
- Spline cúbica
  - Interpolação (fitting) com função cúbica por intervalo
  - Continuidade das derivadas até 2ª ordem
  - Solução consistente para todos as N amostras => sistema de equações lineares
- B-spline cúbica (splines com funções base)

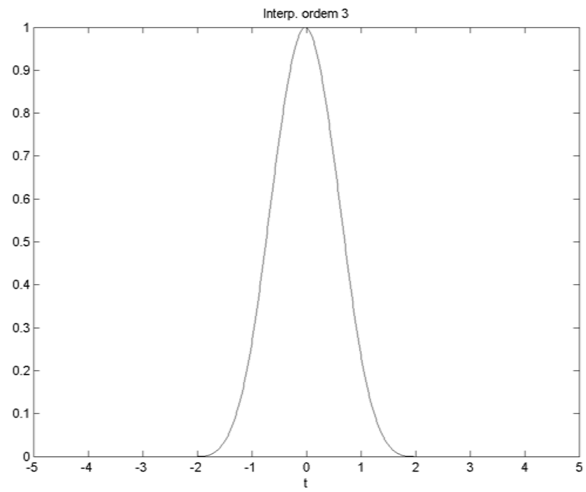
B-spline cúbica

- Não necessariamente passa pelos pontos
- Base obtida recursivamente a partir da ordem 0
- Considera 4 pontos adjacentes p/ obter a função interpolante em cada intervalo

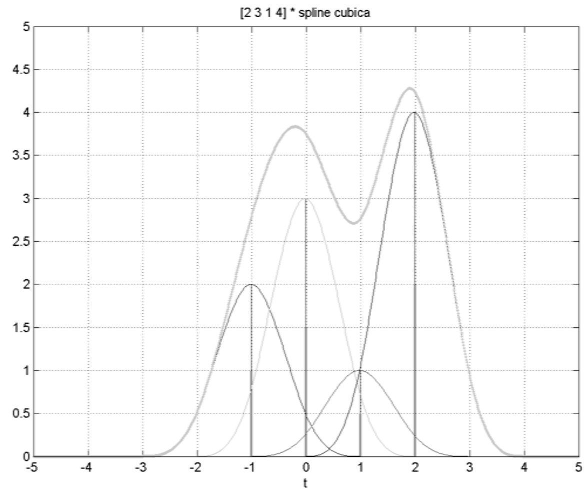
$$\mathbf{S}_i(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{i-1} \\ \mathbf{p}_i \\ \mathbf{p}_{i+1} \\ \mathbf{p}_{i+2} \end{bmatrix}$$

t: [0,1]

B-spline cúbica: base



B-spline cúbica



Interpolação ideal

$$Q(w) = 1 \text{ para } \left(\frac{-\mathrm{w_A}}{2} \le w \le \frac{\mathrm{w_A}}{2}\right)$$

$$q(t) = \frac{\sin(\frac{\mathrm{w_A}}{2}t)}{\pi t}$$

$$Y(w) = Y_d(w).Q(w)$$

$$y(t) = y_d(t) * q(t)$$

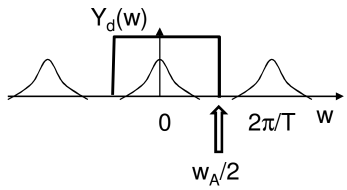
$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} q(t')y_d(t-t')dt'$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} q(t')\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} y(t-t').\delta(t-t'-nT)dt'$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\int_{-\infty}^{\infty} q(t')y(t-t').\delta(t-t'-nT)dt'$$

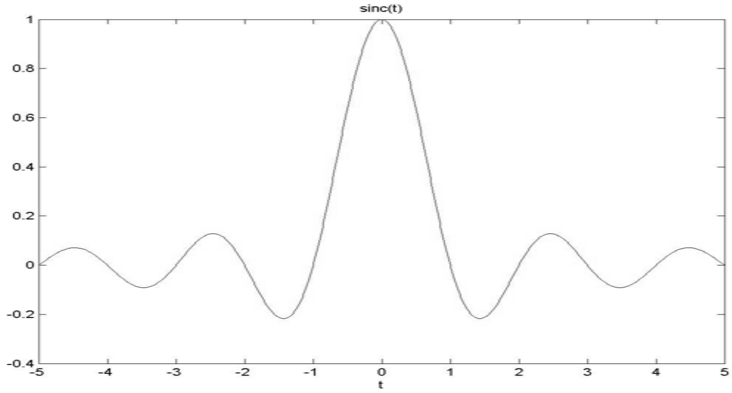
$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} q(t-nT)y(nT)$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} y(nT).q(t-nT)$$



Convolução das amostras com a função sen(w_A.t/2)/(π.t) sinc(x)=sen(πx)/(πx)

$$\frac{\sin(\frac{w_A t}{2})}{\pi t} = \frac{\sin(\frac{2\pi t/T}{2})}{\pi t} = \frac{1}{T}\frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} = \frac{1}{T}.\mathrm{sinc}(\frac{t}{T})$$



Exercício sobre interpolação

Uma vez que o sinal foi processado (y(n)), você gostaria de apresentar o resultado visualmente em unidades físicas, não somente os pontos digitais isolados. Seja y(n)=[0 20 10] onde f_a=100 Hz e 1 unidade ADC=u=100 mV. Obtenha todos os valores (em V) de 2 em 2 ms considerando uma interpolação linear.

Bibliografia

- Apostila de Processamento de Sinais de Tempo Discreto. C Itiki, V H Nascimento
- Biomedical Signal Analysis. R.M. Rangayyan. Wiley Interscience, 2002
- Signals and Systems (2nd Edition) A.V. Oppenheim, A. S. Willsky, S. H. Nawab Hardcover: 957 pages. Publisher: Prentice Hall; 1996. ISBN-10: 0138147574.
- Biosignal and Medical Image Processing. John L. Semmlow.CRC Press,2009