

Filtros do tipo FIR e IIR

Finite Impulse Response Infinite Impulse Response

Prof. Sérgio S Furuie

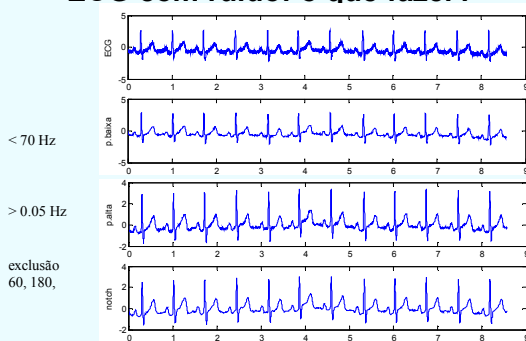


Plano de aula

- Motivação
- Exemplos em sinais e imagens
- Ruído
- Características de filtros
- Filtros tipo FIR
- Analisando filtros FIR
- Projetando filtros FIR



ECG com ruído: o que fazer?



Motivação / Importância de filtros

- restauração de sinais e imagens
- Melhoria da relação Sinal/Ruído (SNR)
 - Quantificação
 - Análise
 - Reconhecimento de padrões



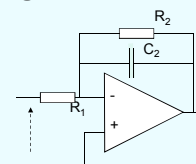
Medidas: bandas e faixas

Parâmetro	Faixa	Banda(Hz)	Transdutor
Fluxo sang.	1-300 ml/s	dc-20	Ultrasom, FEM
Pressão arterial	10-400 mmHg	dc-50	Piezo-el., strain-gage,
ECG (superf.)	0.5 – 4 mV	.01 – 250	eletrodos
Potenciais em nervos	0.01 – 3 mV	Dc – 10000	eletrodos
Respiração	2 – 50 r/min	0.1 – 10	Strain gage, termistor, ..



Filtros analógicos

- Passa-baixa
 - $Z_1=R_1$
 - $Z_2=R_2 \parallel C_2$
- Passa-alta
 - $Z_1=R_1 + C_1$
 - $Z_2=R_2$
- Passa-faixa
 - $Z_1=R_1 + C_1$
 - $Z_2=R_2 \parallel C_2$



$$\frac{S(j\omega)}{E(j\omega)} = -\frac{R_2}{R_1(1 + j\omega R_2 C_2)}$$

Para evitar **aliasing** => filtro analógico (se necessário) antes do processamento digital



Ruídos

- Ruídos inerentes ao fenômeno físico
 - efeito da respiração em ECG;
 - sinal da Mãe em ECG fetal
- Ruído ambiente, incluindo interferências
 - Acoplamento/indução de 60 Hz em sinais
- Ruído do transdutor
 - Detector de fótons (processo Poisson)
- Ruído eletrônico (DC a $\sim 10^{12}$ Hz): branco
 - Ruído térmico (Johnson): fontes resistivas
 - Ruído de disparo (shot noise): semicondutores



Ruído térmico (resistivo)

$$V_j^2 = 4k.T.R.B_w$$

T : temperatura (K)

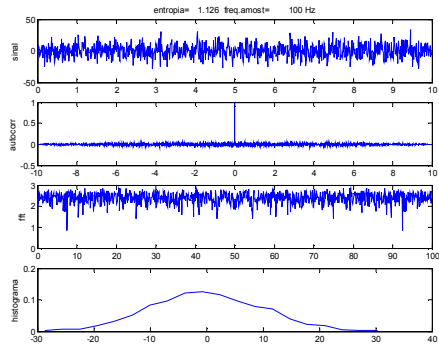
R : resistência

B_w : banda em frequência

k : constante de Boltzmann



Sinal branco gauss.: aleat..estac..não-corr.



Como quantificar ruído

- Relação Sinal/Ruído (SNR)
 - Razão entre potências do sinal e do ruído

$$SNR = 10 \cdot \log\left(\frac{\text{potencia}(s)}{\text{potencia}(n)}\right) \text{ dB}$$

$$SNR = 10 \cdot \log\left(\frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2}\right) \text{ dB}$$

$$SNR = 20 \cdot \log\left(\frac{\sigma_s}{\sigma_n}\right) \text{ dB}$$

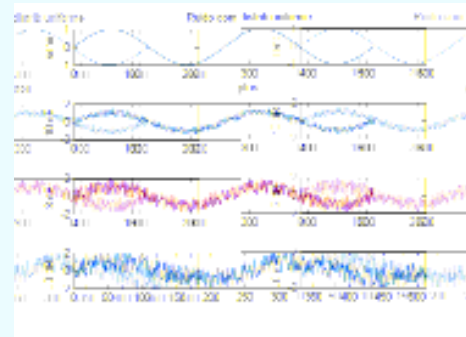


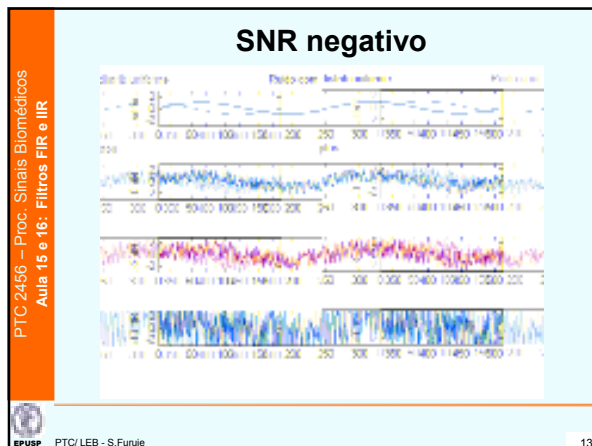
Exemplos de níveis de ruído

- 10 dB (sinal: 10x maior que ruído em potência)
- +3dB (sinal: dobro do ruído em potência)
- 0 dB (sinal: mesmo nível que ruído)
- -3 dB (potência do sinal: metade do ruído)
- -10 dB (potência do sinal: 10x menor)



Exemplos de sinais ruidosos





PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Aula 15 e 16: Filtros FIR e IIR

Plano de aula

- Motivação
- Exemplos em sinais e imagens
- Ruído
- **Características de filtros**
- Filtros tipo FIR
- Analisando filtros FIR
- Projetando filtros FIR

EPUSP PTC/LEB - S.Furule 14

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Aula 15 e 16: Filtros FIR e IIR

Filtros

- Características principais
 - Tipo: passa-baixa, passa-alta, passa-faixa,
 - Banda passante de frequência: frequência de corte
 - Características de atenuação: ordem do filtro, taxa de atenuação
 - Fase linear e não-linear

EPUSP PTC/LEB - S.Furule 15

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Aula 15 e 16: Filtros FIR e IIR

Filtros lineares

Princípio da superposição

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t)$$

$$x_2(t) \rightarrow y_2(t)$$

$$a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t) \rightarrow a \cdot y_1(t) + b \cdot y_2(t)$$

EPUSP PTC/LEB - S.Furule 16

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Aula 15 e 16: Filtros FIR e IIR

Filtros lineares invariantes (LTI)

- Filtros lineares e invariantes (LTI)
 - são suficientemente caracterizados pela resposta ao impulso
 - possibilita tratamento matemático simplificado
 - convolução $\Rightarrow$ resposta do sistema
 - análise no domínio da frequência

EPUSP PTC/LEB - S.Furule 17

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Aula 15 e 16: Filtros FIR e IIR

LTI: caso discreto

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \delta[n-k]$$

$$\delta[n-k] \rightarrow h_k[n]$$

Linearidade $\Rightarrow$ $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h_k[n]$

Invariante $\Rightarrow$ $h_k[n] = h[n-k]$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[n-k]$$

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

EPUSP PTC/LEB - S.Furule 18

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Aula 15 e 16: Filtros FIR e IIR

O que desejamos dos filtros?

- **Analisar** o comportamento em frequência
 - Tipo de filtro: passa-baixa, passa-alta?
 - Frequências de corte
 - Produz degradações? (fase não-linear)
- **Projetar** um filtro com determinado comportamento em frequência

EPUSP PTC/LEB - S.Furule 19

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Aula 15 e 16: Filtros FIR e IIR

Resposta em frequência

De sistemas discretos no tempo

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

TZ

$$a_0 Y + a_1 z^{-1} Y + \dots + a_N z^{-N} Y = b_0 X + \dots + b_M z^{-M} X$$

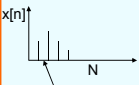
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad z = e^{j\omega}$$

$$H(e^{j\omega})$$

EPUSP PTC/LEB - S.Furule 20

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Aula 15 e 16: Filtros FIR e IIR

Sinal discreto em t



Δt Intervalo de amostragem

$$f_a = \frac{1}{\Delta t} = \text{Frequência de amostragem} \Leftrightarrow 2 \text{ freq. Nyquist}$$

$\Leftrightarrow \omega = 2\pi f_a$
 $\Leftrightarrow \Omega = 2\pi$
 $\Leftrightarrow k=N$

EPUSP PTC/LEB - S.Furule InCor/EPUSP SF 21 1/2

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Aula 15 e 16: Filtros FIR e IIR

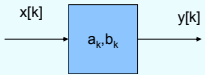
Interpretações

- Resposta impulsiva
- Resposta em frequência
 - Amplitude $H(\omega) = |H(\omega)| \cdot e^{j\Theta(\omega)}$
 - Fase
 - Atraso $-\frac{\Theta(\omega)}{\omega}$
 - Atraso de grupo $-\frac{d\Theta(\omega)}{d\omega}$
- Função de transferência em Z
- Zeros-pólos
- Expansão em frações parciais

EPUSP PTC/LEB - S.Furule 22

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Aula 15 e 16: Filtros FIR e IIR

Sistemas discretos: eq. diferenças



$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

Todas as condições iniciais = 0 $\Rightarrow$ Sistema linear (do contrário, incrementalmente linear)

Eq. Recursiva $\Rightarrow$ IIR
 Eq. Não-recursiva $\Rightarrow$ FIR

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (\text{MA: moving average})$$

EPUSP PTC/LEB - S.Furule 23

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Aula 15 e 16: Filtros FIR e IIR

Modelos de séries temporais

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad \text{MA: moving average (FIR)}$$

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = b_0 x[n] \quad \text{AR: auto regressive (IIR)}$$

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad \text{ARMA (IIR)}$$

EPUSP PTC/LEB - S.Furule 24

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Aula 15 e 16: Filtros FIR e IIR

Representação de eq. Diferenças

$y[n] = b \cdot x[n] - a \cdot y[n-1]$

EPUSP PTC/LEB - S.Furule 25

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Aula 15 e 16: Filtros FIR e IIR

FIR: Finite Impulse Response

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k \cdot x[n - k]$$

Exemplos:

- Filtros passa-baixa $y[n] = \frac{x[n-1] + 2x[n] + x[n+1]}{4}$
- Filtros passa-alta $y[n] = x[n] - x[n-1]$
- Filtros passa-faixa $y[n] = \frac{x[n+1] - x[n-1]}{2}$

EPUSP PTC/LEB - S.Furule 26

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Aula 15 e 16: Filtros FIR e IIR

filtragem digital: MA

EPUSP PTC/LEB - S.Furule 27

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Aula 15 e 16: Filtros FIR e IIR

Filtragem digital: FIR

MA=[1 2 1]/4

$$y[i] = (x[i-2] + 2x[i-1] + x[i]) / 4$$

$$Y = (X \cdot z^{-2} + 2X \cdot z^{-1} + X) / 4$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = (z^{-2} + 2z^{-1} + 1) / 4$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = (z^{-1} + 1)^2 / 4$$

$$\frac{Y(e^{jw})}{X(e^{jw})} = (e^{-jw} + 1)^2 / 4 =$$

$$| | = \left| \frac{1 + \cos w}{2} \right|$$

$$\phi = -w$$

EPUSP PTC/LEB - S.Furule 28

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Aula 15 e 16: Filtros FIR e IIR

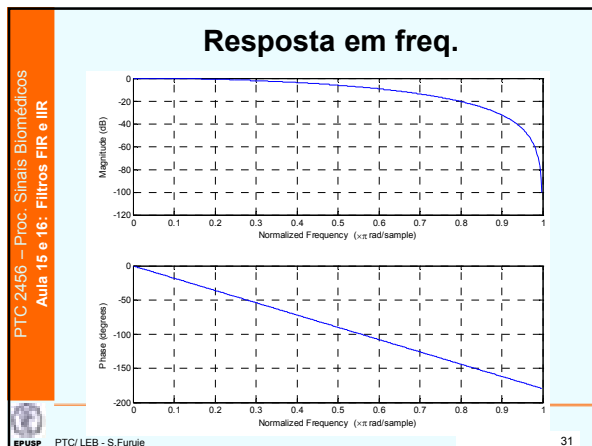
FIR: análise. Resp. Impulsiva

EPUSP PTC/LEB - S.Furule 29

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Aula 15 e 16: Filtros FIR e IIR

zeros

EPUSP PTC/LEB - S.Furule 30



PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Aula 15 e 16: Filtros FIR e IIR

Exercício

Analisar o filtro abaixo no domínio da frequência: ganho e fase

$$y[n] = \frac{x[n+1] - x[n-1]}{2}$$

Passa-baixa? Derivada?

EPUSP PTC/LEB - S.Furule 32

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Aula 15 e 16: Filtros FIR e IIR

Filtros digitais: síntese

- Requisitos
 - freq. de corte
 - ondulações (ripple) de passa-banda
 - atenuação de stopband
 - faixa de transição

EPUSP PTC/LEB - S.Furule 33



PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Aula 15 e 16: Filtros FIR e IIR

FIR

fase linear possível
estável
hardware eficiente

Métodos:

- windowing
- LS
- arbitrário

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \cdot h[n-k]$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k] \cdot x[n-k]$$

$$Y(z) = X(z) \sum_{k=0}^{N-1} h[k] \cdot z^{-k}$$

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} h[k] \cdot z^{-k}$$

EPUSP PTC/LEB - S.Furule 35

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Aula 15 e 16: Filtros FIR e IIR

FIR: fase linear

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} h[k] \cdot z^{-k}$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} h[k] \cdot e^{-jk\omega}$$

se: $h[k] = h[N-1-k]$ h simétrico
 $k = 0, N-1$

fase linear:

$$\Theta(\omega) = -\frac{N-1}{2} \cdot \omega$$

EPUSP PTC/LEB - S.Furule 36

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Aula 15 e 16: Filtros FIR e IIR

N ímpar, h simétrico

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} h[k] e^{-jk\omega}$$

$$= h[0] + h[N-1]e^{-j(N-1)\omega} + h[1]e^{-j\omega} + h[N-2]e^{-j(N-2)\omega} + \dots$$

$$= e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} [h[0](e^{j\frac{N-1}{2}\omega} + e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}) + h[1](e^{j\frac{N-3}{2}\omega} + e^{-j\frac{N-3}{2}\omega}) + \dots]$$

$$= e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} (2 \sum_{k=0}^{\frac{N-3}{2}} h[k] \cos(\frac{N-2k-1}{2}\omega) + h[\frac{N-1}{2}])$$

$$= e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} a_k \cos(k\omega)$$

$$\therefore \Theta(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega$$

$$\text{atraso} = -\frac{\Theta(\omega)}{\omega} = \frac{N-1}{2}$$

$$\text{atraso de grupo} = -\frac{d\Theta(\omega)}{d\omega} = \frac{N-1}{2}$$

EPUSP PTC/LEB - S.Furule 37

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Aula 15 e 16: Filtros FIR e IIR

Se h anti-simétrico:

$$h[k] = -h[N-1-k]$$

$$k = 0, N-1$$

$$\Theta(\omega) = \frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2}\omega$$

EPUSP PTC/LEB - S.Furule 38

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Aula 15 e 16: Filtros FIR e IIR

FIR fase linear: zeros

$h[]$ real, fase linear $\Rightarrow$

$$H(z^{-1}) = \pm z^{N-1} H(z)$$

$\therefore H(z)$ e $H(z^{-1})$ tem mesmo zeros

$\therefore$ se $\exists z_i = r_i e^{j\theta_i} \rightarrow \frac{1}{r_i} e^{-j\theta_i}$ também é zero

como $h[]$ é real $\rightarrow$ os conjugados são zeros

EPUSP PTC/LEB - S.Furule 39

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Aula 15 e 16: Filtros FIR e IIR

Técnicas de projeto de FIR: janela

- 1) Função periódica do filtro desejado no dom. freq.
- 2) Obter resposta impulsiva discreta no tempo $\Rightarrow$
- 3) Aplicar a janela finita (multiplicar no tempo) $\Rightarrow$
- 4) A resposta em freq. real = desejado * janela

Ex.: filtro passa-baixo e janela retangular

$$h[k] = \frac{\sin(\omega_c k)}{\pi k}$$

$$k = -\infty, \dots, \infty$$

$$h[k] = \frac{\sin(\omega_c k)}{\pi k}$$

$$k = -(N-1)/2, \dots, (N-1)/2$$

EPUSP PTC/LEB - S.Furule 40

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Aula 15 e 16: Filtros FIR e IIR

Windowing

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(e^{j\Omega}) e^{-j\Omega n} d\Omega$$

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\Omega n}$$

Limitando no tempo,

Portanto, o resultado final do filtro FIR será a convolução do H com a função de transferência da janela

EPUSP PTC/LEB - S.Furule InCor/EPUSP SF 41

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Aula 15 e 16: Filtros FIR e IIR

FIR com janela retangular

Exemplo:

$$N = 25$$

$$W_R(e^{j\omega}) = \sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} 1 \cdot e^{-j\omega n}$$

$$W_R(e^{j\omega}) = \frac{\sin(\omega N / 2)}{\sin(\omega / 2)}$$

$$= N \frac{\text{sinc}(\frac{\omega N}{2\pi})}{\text{sinc}(\frac{\omega}{2\pi})}$$

EPUSP PTC/LEB - S.Furule 42

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Aula 15 e 16: Filtros FIR e IIR

Janela de Hamming

$$g_H[n] = \alpha + (1 - \alpha) \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$$

$$-\frac{N-1}{2} \leq n \leq \frac{N-1}{2}$$

Ex.: $\alpha=0.54$ (hanning), $N=51$

EPUSP PTC/LEB - S.Furule 43

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Aula 15 e 16: Filtros FIR e IIR

Resposta em freq. do filtro de Hamming em dB

EPUSP PTC/LEB - S.Furule 44

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Aula 15 e 16: Filtros FIR e IIR

Projeto de FIR: otimização

Um filtro FIR é completamente caracterizado por:

- $\{h[n]\}$ ou
- $H(z) \Rightarrow \{h[n]\}$
- $H[k]=\text{DFT de } \{h[n]\} \Rightarrow h[n]=\text{IDFT de } H[k]$

Vale também a relação:

$$H[k] = H(z) \Big|_{z = e^{j\frac{2\pi}{N}k}}$$

Portanto, para se obter um filtro desejado com as características de $H(\cdot)$, deve-se otimizar $H[k]$ (amostras) e então obter o $\{h[n]\}$ pelo IDFT de $H[k]$. Já trata a sequência finita no tempo.

EPUSP PTC/LEB - S.Furule 45

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Aula 15 e 16: Filtros FIR e IIR

FIR: otimização

Expandindo, pode-se mostrar que a resposta em frequência é uma combinação linear de $H[k]$ através de função de interp. No caso de fases lineares,

$$H_{\text{Re}}(w) = Q(e^{jw}) \sum_{n=0}^{L-1} d_n \cos(wn) \quad \text{onde } H[k] \text{ pode ser obtido a partir de } d_n$$

Seja $D(w)$: resp. em freq. desejada

$$E(w) = W(w) \cdot (D(w) - H_{\text{Re}}(w))$$

$$\min_{\{d_n\}} (\max_w |E(w)|)$$

$\cos(wn) \Rightarrow$ Chebyshev $\Rightarrow$ deve ter pelo menos $L+1$ extremos alternantes $\Rightarrow$ solução única e ótima

$$\tilde{W}(w_k) \cdot (\tilde{D}(w_k) - \sum_{n=0}^{L-1} d_n \cos(w_n n)) = (-1)^k \delta$$

EPUSP PTC/LEB - S.Furule 46

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Aula 15 e 16: Filtros FIR e IIR

FIR, fase linear, otimizado: Remez

- 1) Dados:
 - $D(w)$: desejado
 - $W(w)$: peso
 - N : duração do filtro
- 2) Algoritmo de Remez p/ obter os coeficientes
- 3) Obter $H[k] \Rightarrow \{h[n]\}$

EPUSP PTC/LEB - S.Furule 47

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Aula 15 e 16: Filtros FIR e IIR

Resumo

EPUSP PTC/LEB - S.Furule 48

Bibliografia

- Apostila de Processamento de Sinais de Tempo Discreto. C Itiki, V H Nascimento
- Biomedical Signal Analysis. R.M. Rangayyan. Wiley Interscience, 2002
- Signals and Systems (2nd Edition) A.V. Oppenheim, A. S. Willsky, S. H. Nawab Hardcover: 957 pages. Publisher: Prentice Hall; 1996. ISBN-10: 0138147574.
- Biosignal and Medical Image Processing. John L. Semmlow. CRC Press, 2009



Exercício

A banda do ECG é de 0.01 a 100 Hz.

- Supondo:
 - que o sinal é de 1 V pico-a-pico,
 - que há ruído branco aditivo de 0.1V,
 - que há um filtro analógico passa-baixa com 4 pólos
 - que aliasing é desprezível se o sinal for inferior a -60 dB (0.001 V)
- Qual deve ser a frequência de amostragem p/ evitar aliasing?

