Sinais aleatórios: aplicações em sinais biomédicos

Sérgio S Furuie

Plano de aula

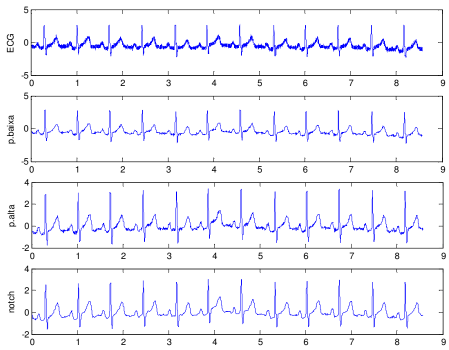
- Motivação
- Tipos de sinais e representação de sinais
- Ruídos
- Processos estocásticos
- Correlação/correlação cruzada

ECG com ruído: o que fazer?

< 70 Hz

> 0.05 Hz

exclusão 60, 180,



Ruídos

- Ruídos inerentes ao fenômeno físico
  - efeito da respiração em ECG;
  - sinal da Mãe em ECG fetal
- Ruído ambiente, incluindo interferências
  - Acoplamento/indução de 60 Hz em sinais
- Ruído do transdutor
  - Detector de fótons (processo Poisson)
- Ruído eletrônico (DC a ~10^{12} Hz): branco
  - Ruído térmico (Johnson): fontes resistivas
  - Ruído de disparo (shot noise):semicondutores

Filtro de média síncrona

Tirando proveito da aleatoriedade do ruído

Ruído aditivo com média zero

Exemplo de redução da variância na média

- Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_N$: amostras independentes de uma variável aleatória X com média 0 e variância σ^2
- Y: a média de X
- Qual a média e variância de Y?

$$Y = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$$

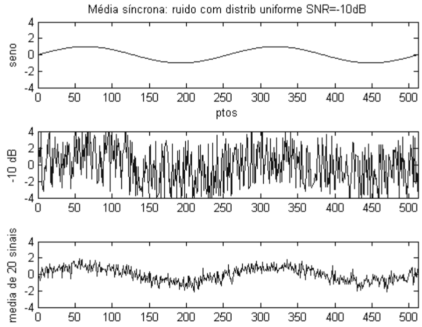
$$E(Y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E(X_i) = 0$$

$$\mathrm{var}(Y) = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N} \mathrm{var}(X_i)$$

$$= \frac{N.\sigma_X^2}{N^2} = \frac{\sigma_X^2}{N}$$

$$\therefore \sigma_Y = \frac{\sigma_X}{\sqrt{N}}$$

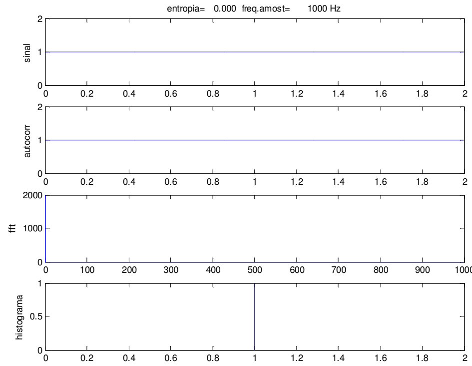
Exemplo em Matlab =>



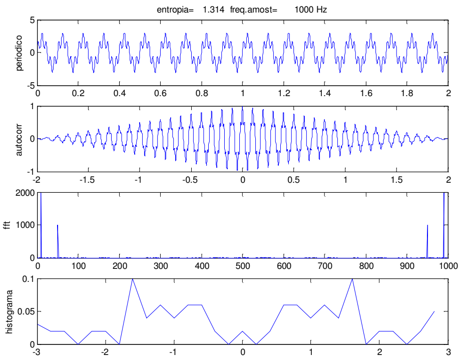
Representação de sinais

1. Sinal no tempo x(t)
   - Evolução temporal
   - Derivadas, duração, amplitudes, ...
2. Qual o conteúdo em frequência do sinal? Tipos de ruído? => Sinal no domínio da frequência [reversível]
3. Qual a distribuição das amplitudes do sinal x(t)? Variabilidade? Valores com maior ocorrência? => função densidade de probabilidade (pdf) [irreversível]
4. Como se relaciona com os pontos vizinhos? => Autocorrelação [irreversível] (obs.: relacionado com 2)
5. Qual o padrão (assinatura) do sinal? Representação multidimensional. Qual a correlação entre sinais?=> scatterplot [reversível]

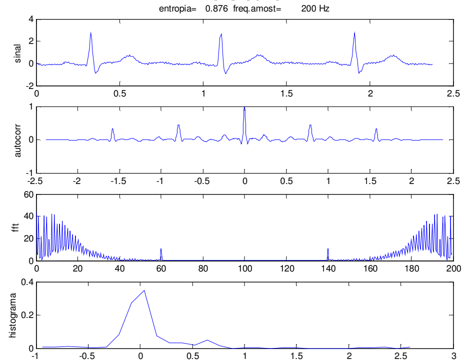
Sinal constante: determinístico



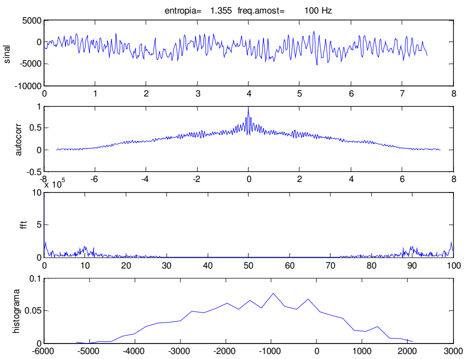
Sinal periódico: determinístico



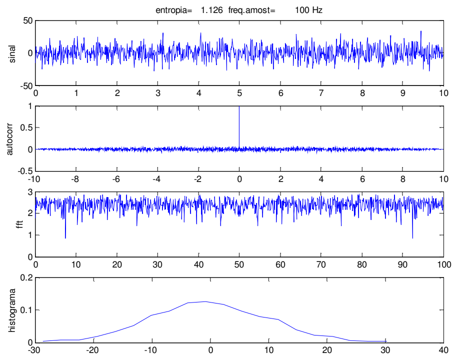
Sinal ECG:quasi-periódico, quasi-estac.



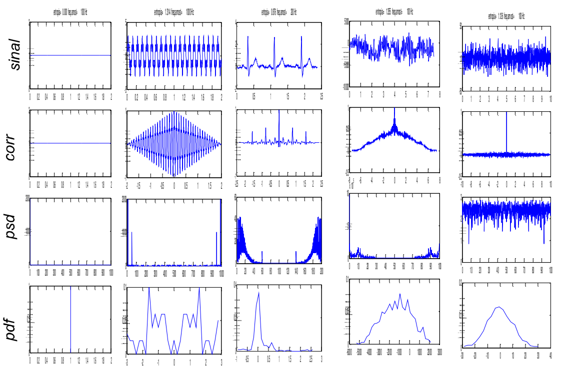
sinal estacionário



Sinal branco gauss.: aleat..estac.,não-corr.

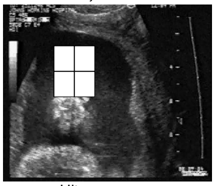


sinais



Campos aleatórios

- Extensão multi-variada de v.a
- vetores de v.a
  - $\mathbf{X}$=[X_1 X_2 ... X_n]'
  - Ex.: pixels vizinhos em imagens médicas, EEG, ECG de múltiplos canais, ...



Ultra-som

I	II	III	aVF	...

Processos estocásticos

- Variável aleatória com dependência temporal (contínua ou discreta)
  - X(t)
  - Ex.: ECG

Motivação / Importância

- Muitos fenômenos físicos de interesse da engenharia são representados por sinais temporais
  - determinísticos: velocidade, aceleração (em condições ideais), ...
  - E aqueles que não podem ser preditos com precisão=> dados e fenômenos randômicos
    - Ex.: intervalo RR do ritmo cardíaco

Importância

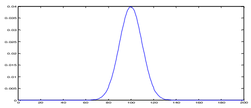
- Lidar com a indeterminação na medição
  - valor esperado
  - variabilidade
  - intervalo de confiança
  - Ex.: T=37 ± 0,5
- Caracterização do ruído
  - otimização da estimativa das variáveis
  - otimização de processos estocásticos
  - Ex.: filtro de Wiener, Maximum likelihood

Teoria: definição de V.A

- Dado um fenômeno aleatório com observável X
- Probabilidade: função Prob: A -> [0,1]
  - A é subconjunto do espaço amostral Ω
  - Prob(Ω)=1
  - Prob(U $\{A_j\}$)=Σ Prob(A_j), $A_j$disjuntos

Variável aleatória

- Variável aleatória
  - v.a discreta: assume valores num conjunto enumerável com certa probabilidade [Prob(X=a)=p]
    - número de enfartes
  - v.a contínua: assume valores num intervalo de números reais [Prob(a≤X<b)=p]
    - temperatura, intervalo RR
- Função
- E(X)
- Momentos



PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Sinais biomédicos: processos estocásticos

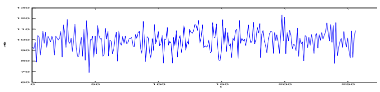
Teoria: função distr. Prob.

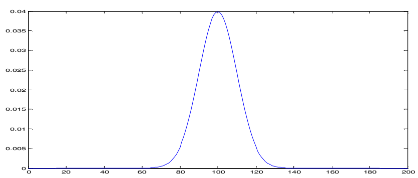
- Função discreta de probabilidade
  - X: v.a discreta com espaço amostral Ω
  - f(x)=Prob(X=x)
- Função densidade de probabilidade
  - X: v.a contínua
  - $\int_a^b f(x)dx = Prob(a \le X \le b)$
  - f(x) >=0
- Função de distribuição de probabilidade
  - F(x)=Prob(X ≤ x)

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Sinais biomédicos: processos estocásticos

Exemplos: distribuição normal

$$p(x) = N(\mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$



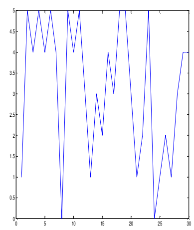


PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Sinais biomédicos: processos estocásticos

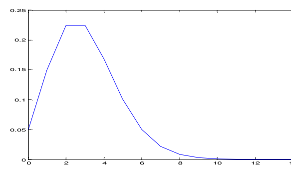
Distribuição Poisson

$$P_\lambda(X = n) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^n}{n!}$$

Sequência de eventos (λ=3)



Ex. de fdp com λ=3



PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Sinais biomédicos: processos estocásticos

Valor esperado: E( )

v.a discreta	v.a contínua
$E(X) = \sum_{k=1}^{n} p_i . x_i$	$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x . f(x).dx$
$E[g(X)] = \sum_{k=1}^{n} p_i . g(x_i)$	$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x). f(x).dx$

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Sinais biomédicos: processos estocásticos

Momentos de VA

$$E(X^k) = \sum_{k=1}^{n} p_i . x_i^k \qquad E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k . f(x).dx$$

Valor médio (momento de ordem 1): $\mu = E(X)$

Momento de ordem 2: $\mu_2 = E(X^2)$

Momentos centrais de ordem k: $\sigma_k = E[(X - \mu)^k]$

Estimadores

Dada uma amostra da v.a X: $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$

$$\mu = E(X) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} x_i$$

$$\sigma_2 = E[(X-\mu)^2] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} (x_i-\mu)^2$$

Êrro de tendência (bias) do estimador $= E(\hat{\phi}) - \phi = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} \hat{\phi}_i - \phi$

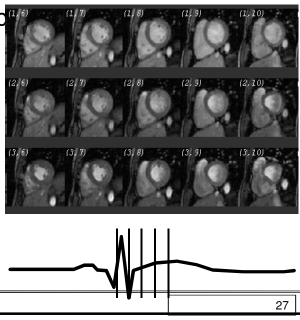
Coef. Variação do estimador $= \varepsilon_r = \dfrac{\sqrt{E[(\hat{\phi} - E(\hat{\phi}))^2]}}{\phi}$

Variabilidade na estimativa da média

	Estimador	variabilidade ε_r
Média em ensemble	$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} x_i$	$\frac{\sigma_x}{\mu_x\sqrt{n}}$
Média no tempo	$\hat{\mu} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t).dt$	$\frac{\sigma_x}{\mu_x\sqrt{2BT}}$

Exemplo

- Melhorar o estimador (variabilidade) com a raiz quadrada do número de amostras
  - potencial evocado
  - gated blood pool
  - gated SPECT
  - gated MRI



Vetor (campo) randômico

$$\vec{X} = [X_1, X_2, ..., X_n]'$$

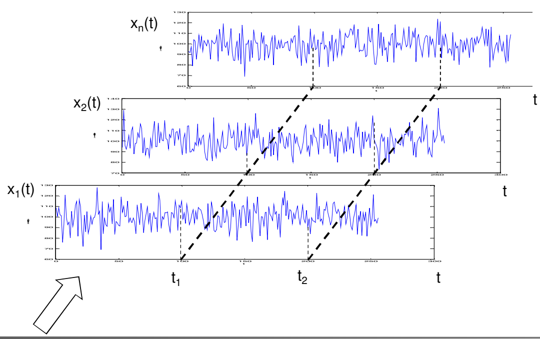
$$P(X) = \text{Prob}\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, ... X_n \le x_n\}$$

$$p(x_1, x_2, ... x_n) = \frac{\partial^n P(X)}{\partial x_1 . \partial x_2 .. \partial x_n}$$

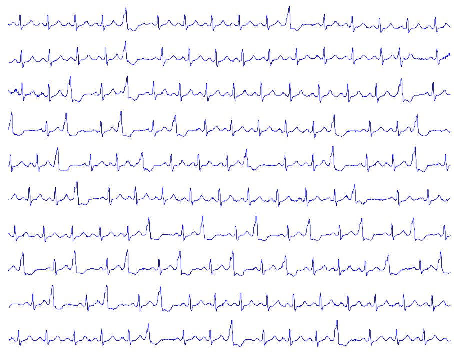
Processo aleatório

- Para um dado fenômeno aleatório, que produz o registro x(t):
  - *Ensemble*: conjunto de todos os registros que poderiam ter sido produzidos: $\{x_i(t)\}$
  - processo aleatório: descrição do fenômeno representado por $\{x_i(t)\}$ i=1,2,...

Ensemble de processos estocásticos



ECGs adquiridos em instantes de tempo diferentes:50000ptos



Processos estacionários

- Dado *ensemble* {x(t)}, X(t) é:
- fortemente estacionário se:
  - momentos de qq ordem independem de t (em geral 1 e 2)

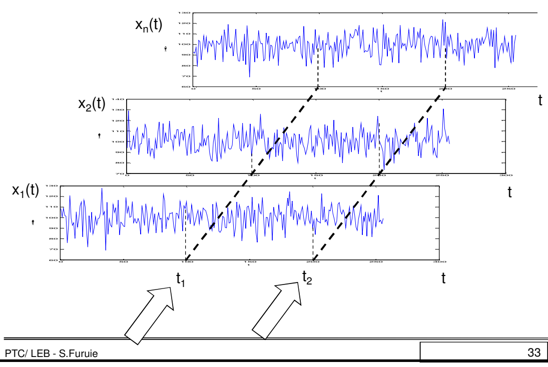
$$\mu^k = E[X_t^k] = \int_{-\infty}^{\infty} x_t^k . f(x_t).dx_t \qquad \forall t$$

- fracamente estacionário se:
  - média e autocorrelação independem do instante t

$$\mu = E[X_t] \qquad \forall t$$

$$R_{XX}(\tau) = R_{XX}(t,\tau) = E[X_t . X_{t+\tau}]$$

processos estocásticos estacionários

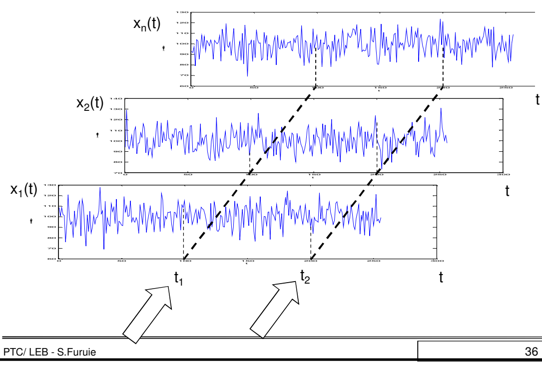


Processos estocásticos: exemplos

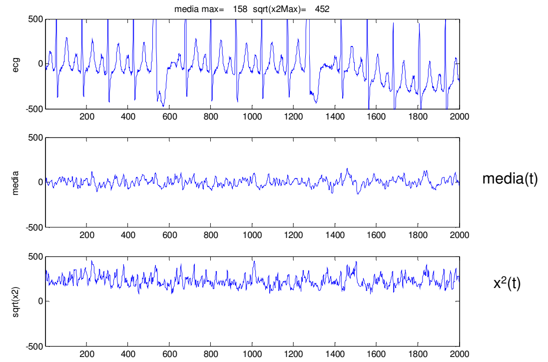
- v.a contínua com tempo contínuo
  - ECG
- v.a discreta com tempo contínuo
  - número de fótons em imagens de excreção renal em Medicina Nuclear
- v.a contínua com tempo discreto
  - série de pressão sistólica, intervalo RR
- v.a discreta com tempo discreto
  - número de nascimentos por região por dia

ECGs adquiridos em instantes de tempo diferentes:50000ptos

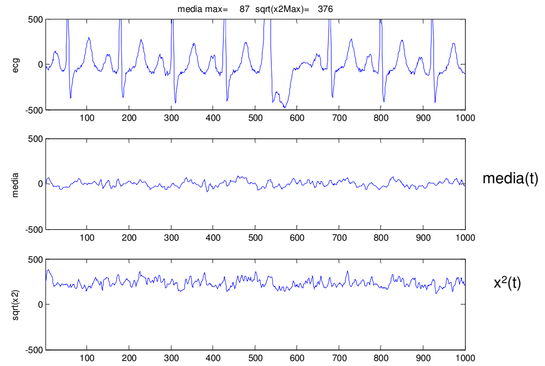
processos estocásticos estacionários



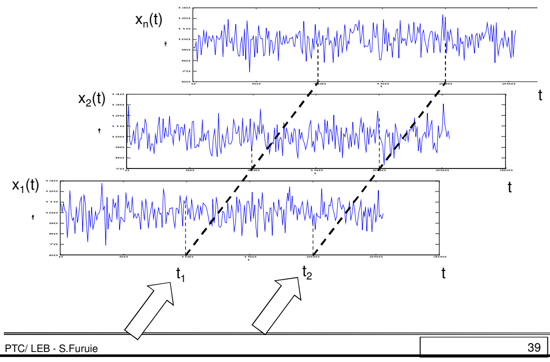
Estatística sobre 25 segmentos de 2000 ptos



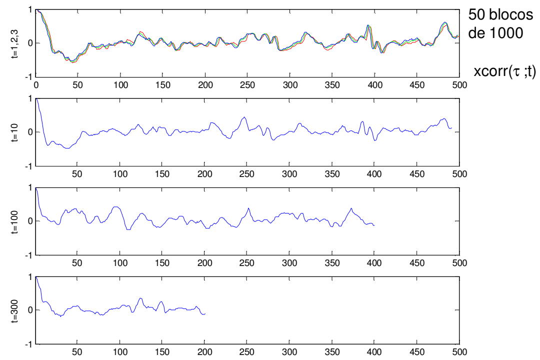
Estatística sobre 50 segmentos de 1000 ptos



Correlação em instantes de tempo



Correlação em instantes de tempo



Processos ergódicos

- Processos estacionários com momentos e autocorrelações iguais aos obtidos nos sinais temporais

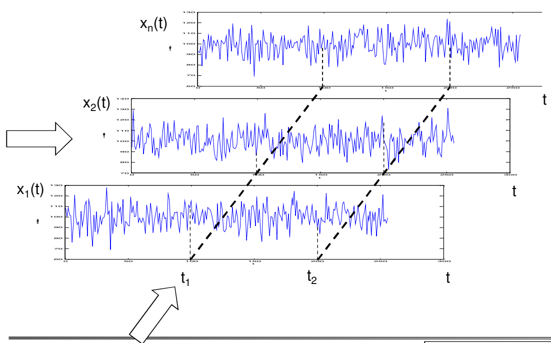
$$E[X_t^k] = \int_{-\infty}^{\infty} x_t^k . f(x_t).dx_t = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x^k(t).dt$$

$$R_{XX}(\tau) = E[X_t . X_{t+\tau}]$$

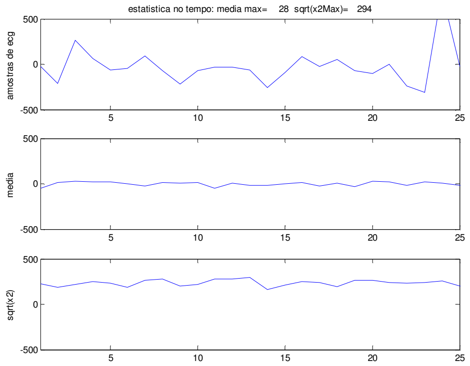
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i(t).x_i(t+\tau) \qquad \forall t$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x_i(t).x_i(t+\tau)dt \qquad \forall i$$

processos estocásticos ergódicos

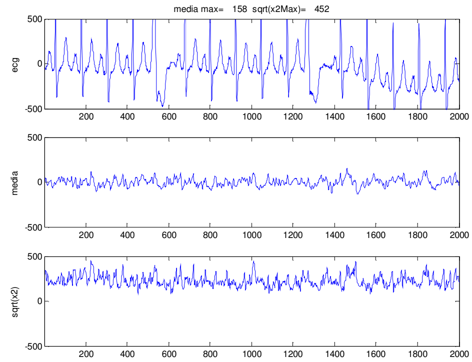


Ergodicidade: amostras no instante

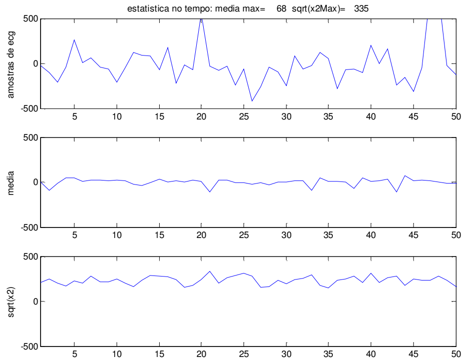


k=1
25 sinais

Estatística sobre 25 segmentos de 2000 ptos

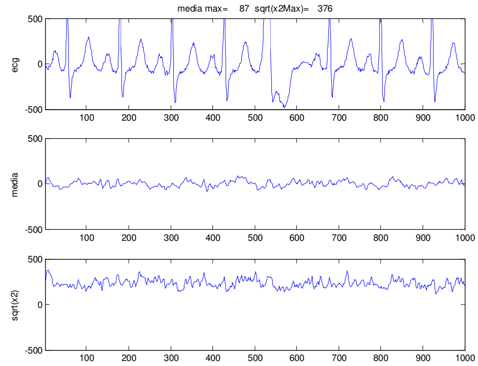


Ergodicidade: amostras no instante

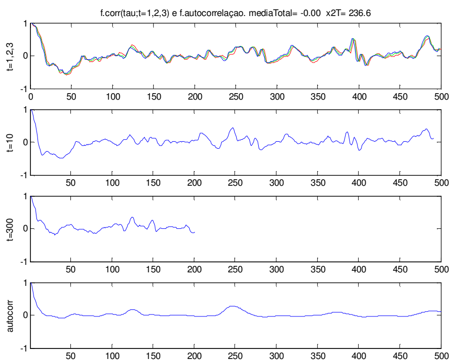


k=1
50 sinais

Estatística sobre 50 segmentos de 1000 ptos



comparação com autocorrelação



50 blocos

xcorr(τ ;t)

autocorr(τ)

Estimadores

$$\hat{R}_{xx}(\tau) = \frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau} x(t).x(t+\tau).dt$$

$$\hat{R}_{xy}(\tau) = \frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau} x(t).y(t+\tau).dt$$

Estimadores sem bias:

$$\lim_{T\to\infty} E(R_{xx} - \hat{R}_{xx}) \to 0$$

$$\lim_{T\to\infty} E(R_{xx} - \hat{R}_{xx})^2 \to 0$$

via dens. espectrais

Periodogramas de x(t)
Sinais estacionários

$$\hat{S}_{xx}(w) = \frac{1}{N}\left|X(w)\right|^2$$

$$\hat{R}_{xy}(\tau) = \frac{T}{T-\tau} F^{-1}\{S_{xy}(f)\}$$

$$\hat{S}_{xx}(f) = \frac{1}{n.T}\sum_{k=1}^{n} |X_k(f,T)|^2$$

Bartlett: particionamento
R(τ) negligível p/ τ > T

$$\hat{S}_{xy}(f) = \frac{1}{n.T}\sum_{k=1}^{n} X_k^*(f,T).Y_k(f,T)$$

$$\hat{\gamma}_{xy}^2(f) = \frac{|\hat{S}_{xy}(f)|^2}{\hat{S}_{xx}(f).\hat{S}_{yy}(f)}$$

Exemplo

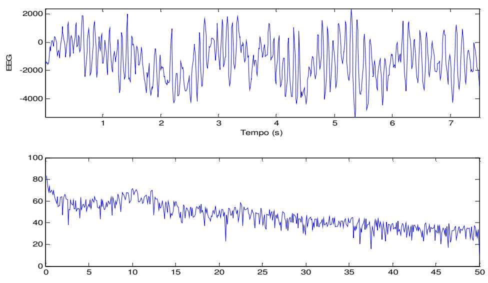
Welch: estimador de $S_{xx}(f)$
1) Janelamento c/ Hamming, Hanning... de x(n) p/ evitar descontinuidades
2) Periodogramas
3) Média

$$S_i(w) = \frac{1}{M.E_w} \left| \sum_{k=0}^{M-1} x_i(n).w(n).e^{-jwn} \right|^2$$

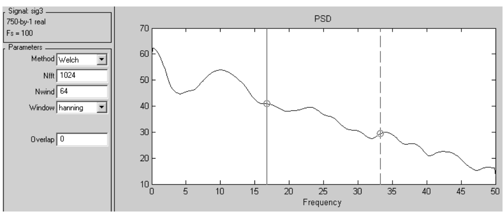
$$E_w = \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1} w^2(n)$$

$$\hat{S}_{xx}(w) = \frac{1}{K}\sum_{i=1,K} S_i(w)$$

Periodograma do sinal inteiro (sem partição)



Espectro estimado pelo método de Welch

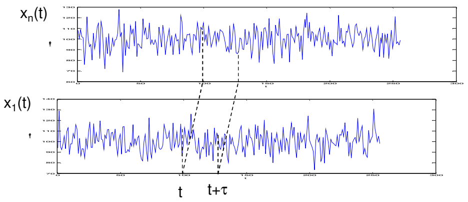


Window de Hanning
64 pontos
overlap de 0%

Correlação, covariância, dens. espect

- Análise facilitada se processo for ergódico
  - espaço amostral <=> sinal temporal
- Processo estocástico ergódico
  - {x(t)} e {y(t)}
  - representados pelas amostras x(t), y(t)

Correlação entre x(t) e x(t+τ)



$$R_{xx}(\tau) = E[x(t).x(t+\tau)]$$

Se ergódicos=> autocorrelação:

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x(t).x(t+\tau)dt$$

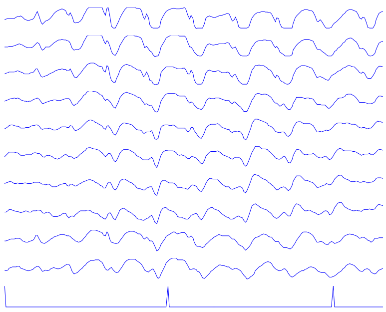
Correlação

$$R_{xx}(0) = \sigma_x^2 + \mu_x^2$$

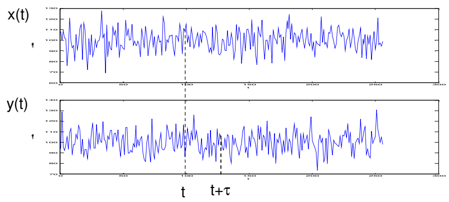
Coeficiente de correlação:

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{\mathrm{cov}_{xy}(\tau)}{\sigma_x.\sigma_y} = \frac{R_{xy}(\tau) - \mu_x.\mu_y}{\sigma_x.\sigma_y}$$

Exemplo: EEGs



Correlação cruzada entre x(t) e y(t+τ)



Estacionários:

$$R_{xy}(\tau) = E[x(t).y(t+\tau)]$$

Se ergódicos:

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x(t).y(t+\tau)dt$$

Relação entre corr. e convolução

$$x * y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t).y(\tau - t)dt$$

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x(t).y(t+\tau)dt$$

$$v(t) = y(-t)$$

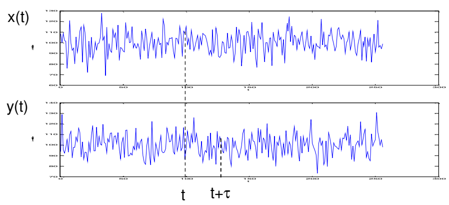
$$V(f) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t).e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{\infty} y(-t).e^{-j2\pi ft}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y(t).e^{j2\pi ft}dt = Y'(f)$$

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x(t).v(-\tau - t)dt$$

$$= x * v(-\tau) \Rightarrow X.Y'$$

Covariância entre x(t) e y(t+τ)



Estacionários:

$$\mathrm{cov}_{xy}(\tau) = E[(x(t) - \mu_x)(y(t+\tau) - \mu_y)]$$

Se ergódicos:

$$\mathrm{cov}_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T (x(t) - \mu_x).(y(t+\tau) - \mu_y)dt$$

Densidade espectral de potência

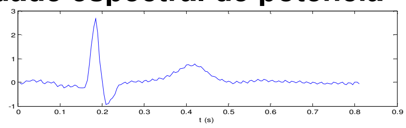
- Motivação
  - energia do sinal para cada banda de frequência
  - espectro cruzado entre sinais
  - relação entre SDF e correlação

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Sinais biomédicos: processos estocásticos

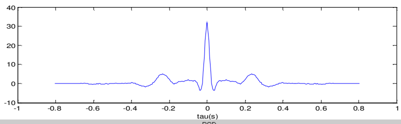
EPUSP PTC/ LEB - S.Furuie 61

Densidade espectral de potência

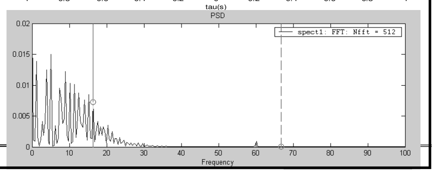
ECG



Autocorrelação



Espectro

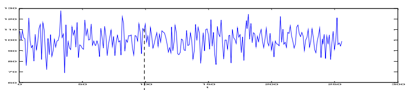


PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Sinais biomédicos: processos estocásticos

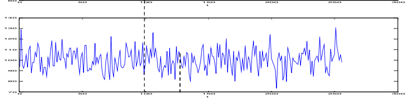
EPUSP PTC/ LEB - S.Furuie

Densidade espectral de potência: conceito

$x_k(t)$



$y_k(t)$



$$S_{xx}(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} E[|X_k(f,T)|^2]$$

$$S_{xy}(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} E[X_k^*(f,T).Y_k(f,T)]$$

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Sinais biomédicos: processos estocásticos

EPUSP PTC/ LEB - S.Furuie 63

Correlação <=> espectro

$$F\{R_{xy}(\tau)\} = S_{xy}(f)$$

$$F\{R_{xx}(\tau)\} = S_{xx}(f)$$

Função coerência [0,1]:

$$\gamma_{xy}^2(f) = \frac{|S_{xy}(f)|^2}{S_{xx}(f).S_{yy}(f)}$$

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Sinais biomédicos: processos estocásticos

EPUSP PTC/ LEB - S.Furuie 64

Bibliografia

- Biomedical Signal Analysis. R.M. Rangayyan. Wiley Interscience, 2002
- Signals and Systems (2nd Edition) A.V. Oppenheim, A. S. Willsky, S. H. Nawab Hardcover: 957 pages. Publisher: Prentice Hall; 1996. ISBN-10: 0138147574.

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Sinais biomédicos: processos estocásticos

EPUSP PTC/ LEB - S.Furuie 65