



IF – FAP0291– Eletromagnetismo para Geociências

Lei de Coulomb

$$\vec{F} = k \frac{qQ}{r^2} \hat{r} \quad \text{Campo elétrico} \longrightarrow \vec{E} = k \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

A lei de Coulomb descreve o campo elétrico criado por uma distribuição de cargas. Aprendemos que, dado um ponto, podemos determinar o campo produzido pela porção infinitesimal de carga em torno deste ponto. (Usamos a lei de Coulomb). Depois, calculamos o campo total usando o princípio da superposição.

Ao desenhar diagramas de linhas de campo, adquirimos a visão de como uma distribuição de de cargas afeta todo o espaço: temos uma perspectiva *global*.

A seguir, vamos introduzir a *lei de Gauss*, que expressa esta relação global entre a carga e o campo. Ela não contém novas informações; simplesmente expressa a mesma informação que a lei de Coulomb, de uma forma diferente.

A partir deste ponto expressaremos a constante k por:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad \text{Campo elétrico} \longrightarrow \vec{E} = \frac{(Q / \epsilon_0)}{4\pi r^2} \hat{r}$$



Fluxo elétrico

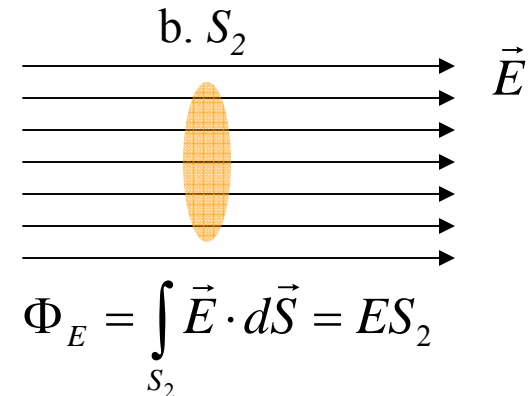
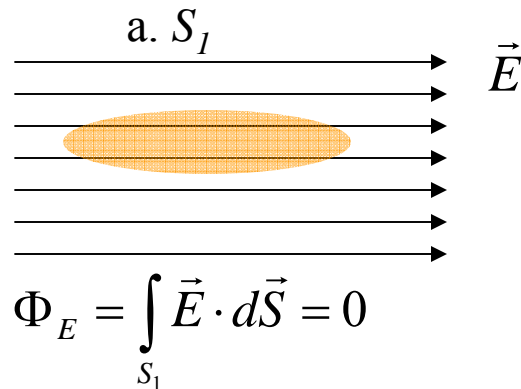
Para tornarmos quantitativa esta relação global entre a carga elétrica e o campo elétrico, precisamos introduzir a definição de **fluxo elétrico**, Φ_E .

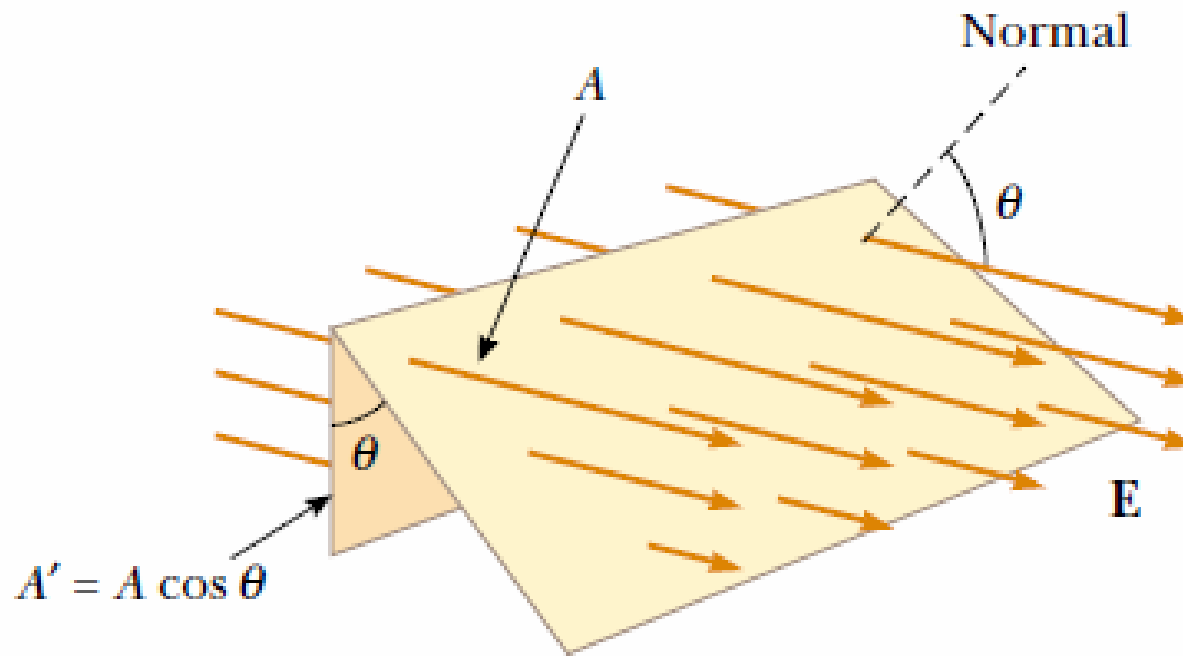
$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Onde a superfície S pode ser aberta ou fechada.

Exemplo

→ Em certa região do espaço temos um campo elétrico cujas linhas de campo estão separadas uniformemente (como entre as duas placas condutoras que estudamos anteriormente). Calcule o fluxo elétrico nas superfícies representadas na figura.

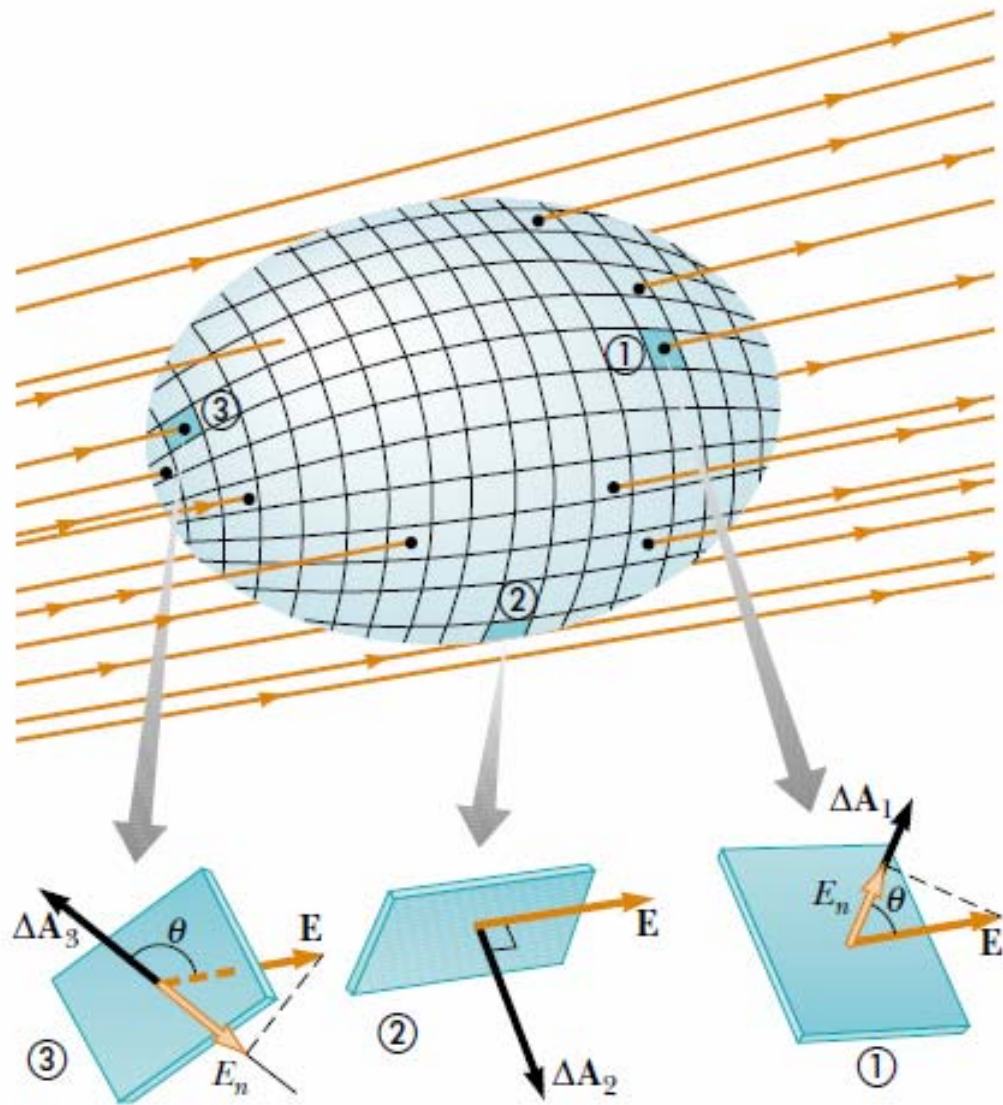




$$\phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = E_n A = EA'$$

$$\vec{A} = A\vec{n}$$

Proporcional ao número de linhas de campo elétrico penetrando alguma superfície



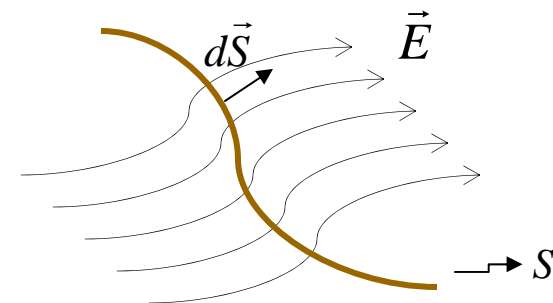
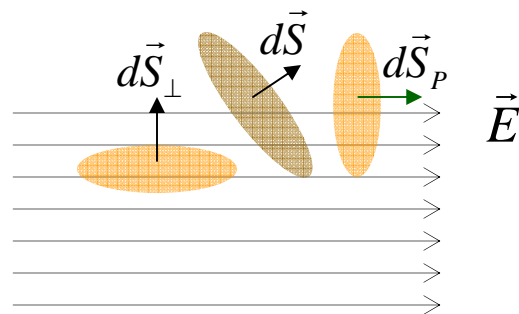


Fluxo elétrico

Observamos que o fluxo elétrico pode ser expresso por uma integral sobre elementos de superfície paralelos ao campo, dS_P .

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S E dS_P = \int_S E_n dS$$

Na ilustração, representamos a decomposição do elemento de superfície em suas componentes paralela e perpendicular ao campo elétrico.
(Os elementos estão separados para uma melhor visualização simbólica).



Visão lateral da superfície S



Fluxo elétrico

Exemplo

→ Calcule o fluxo elétrico através de uma caixa cúbica colocada num campo elétrico uniforme, tal que quatro de suas faces (S_1, S_2, S_3 e S_4) são perpendiculares ao campo.

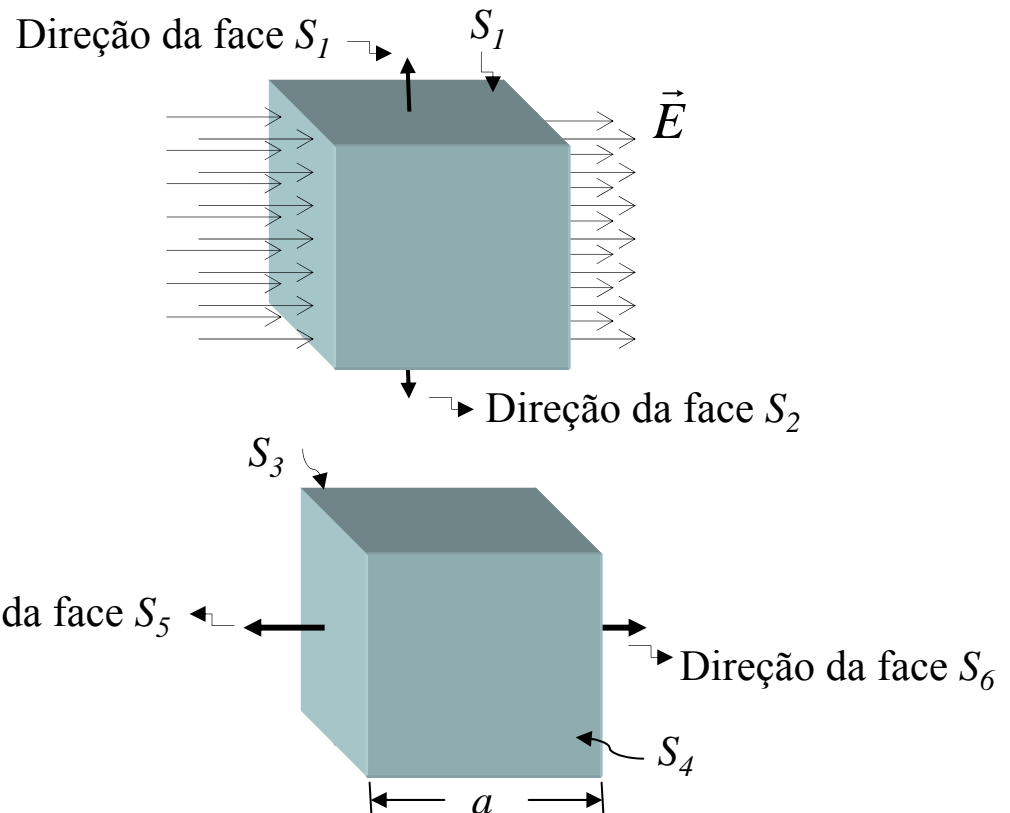
Resposta: $\Phi_E = 0$

Obsevamos que $\Phi_E = 0$ nas superfícies perpendiculares ao campo. Enquanto que

$$\Phi_{E \rightarrow S_5} = -Ea^2$$

e

$$\Phi_{E \rightarrow S_6} = +Ea^2$$





Fluxo elétrico

Exemplo

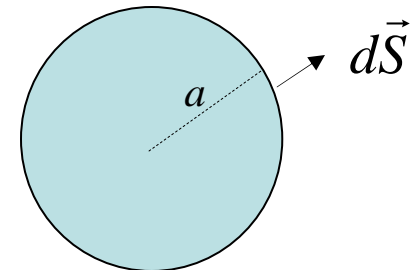
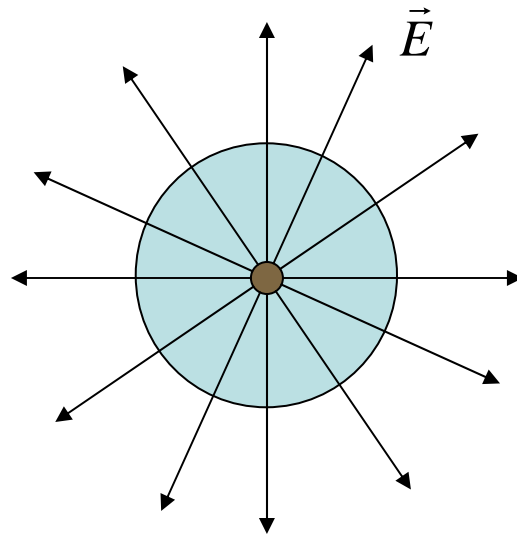


Uma carga puntiforme Q encontra-se na origem do sistema de coordenadas. Calcule o fluxo elétrico através de uma superfície esférica de raio $r = a$, centrada na origem.

Resposta

$$\Phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Carga Q na origem



Superfície imaginária de raio a



Fluxo elétrico

Exemplo

→ Uma carga puntiforme Q encontra-se na origem do sistema de coordenadas.
Calcule o fluxo elétrico através de uma superfície esférica de raio $r = a$, centrada na origem.

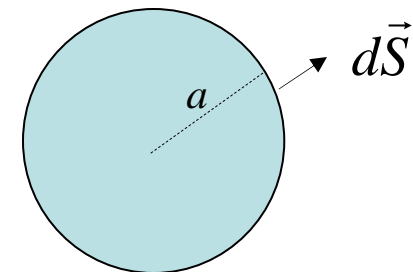
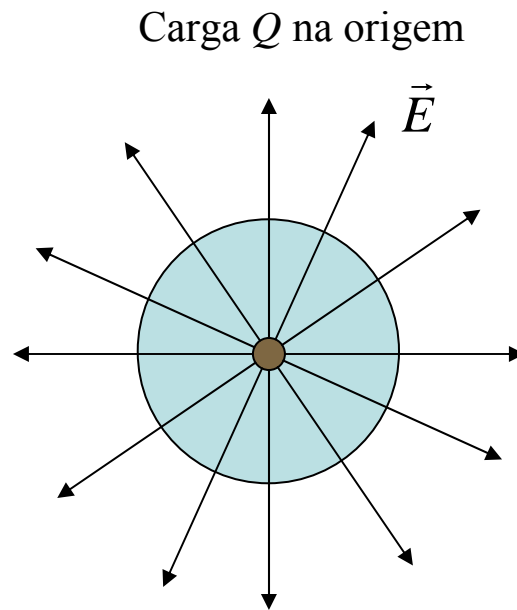
O fluxo elétrico é calculado por:

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$\Phi_E = \int_S E dS$$

$$\Phi_E = \int_S \left[\frac{(Q/\epsilon_0)}{4\pi a^2} \right] dS$$

$$\Phi_E = \left[\frac{(Q/\epsilon_0)}{4\pi a^2} \right] \int_S dS = \left[\frac{(Q/\epsilon_0)}{4\pi a^2} \right] (4\pi a^2) \Rightarrow \Phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0}$$



Superfície imaginária de raio a



Lei de Gauss para o campo elétrico

A relação formal entre a carga elétrica e o fluxo elétrico é conhecida como *lei de Gauss*.

O fluxo de campo elétrico total emergindo de um volume arbitrário, V , é igual a carga elétrica efetiva Q contida neste volume dividida por ϵ_0 .

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Onde a superfície S delimita o volume V .

Lei de Gauss

Exemplo



Uma caixa cúbica possui em seu interior uma carga efetiva de $6 \mu C$. O fluxo elétrico medido através de uma das faces do cubo é:

$$\Phi_E = 8 \times 10^5 \frac{N \cdot m^2}{C}$$

Qual o fluxo total através das outras cinco faces?

Lembre que:

$$\epsilon_0 = 8,9 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}$$

Resposta:

Isto é possível? Explique.

$$\Phi = -1,26 \times 10^5 \frac{N \cdot m^2}{C}$$

$$\phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{6 \times 10^{-6}}{8,9 \times 10^{-12}} = 6,74 \times 10^5$$

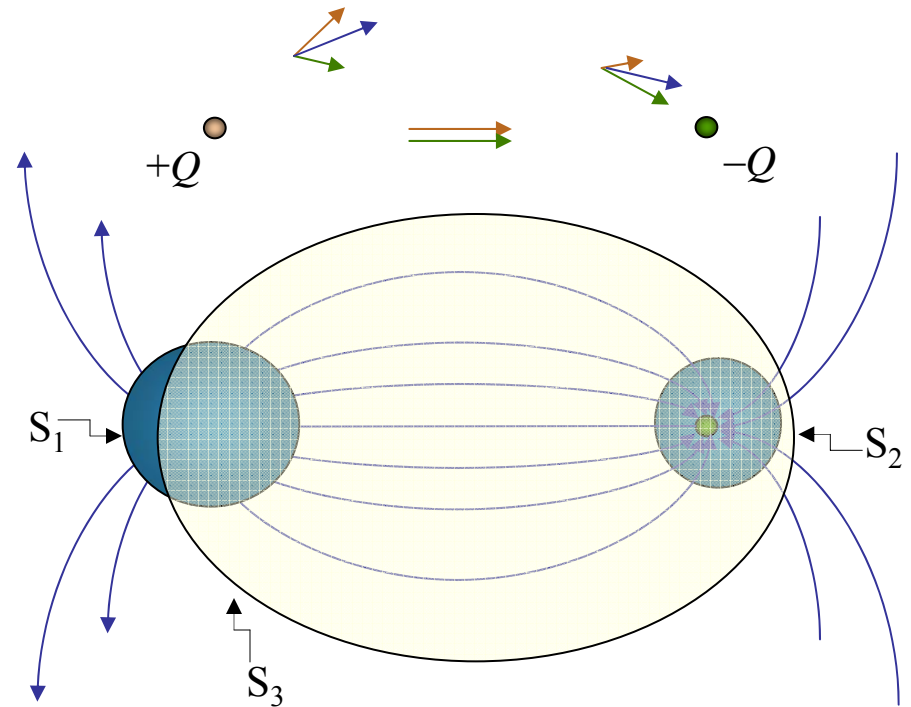
$$\phi_E = \phi_E(1 \text{ face}) + \phi_E(5 \text{ faces})$$

$$\phi_E(5 \text{ faces}) = 6,74 \times 10^5 - 8,00 \times 10^5 = -1,26 \times 10^5 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}}$$



Exemplo

Calcule o fluxo elétrico nas superfícies S_1 , S_2 e S_3 da ilustração.

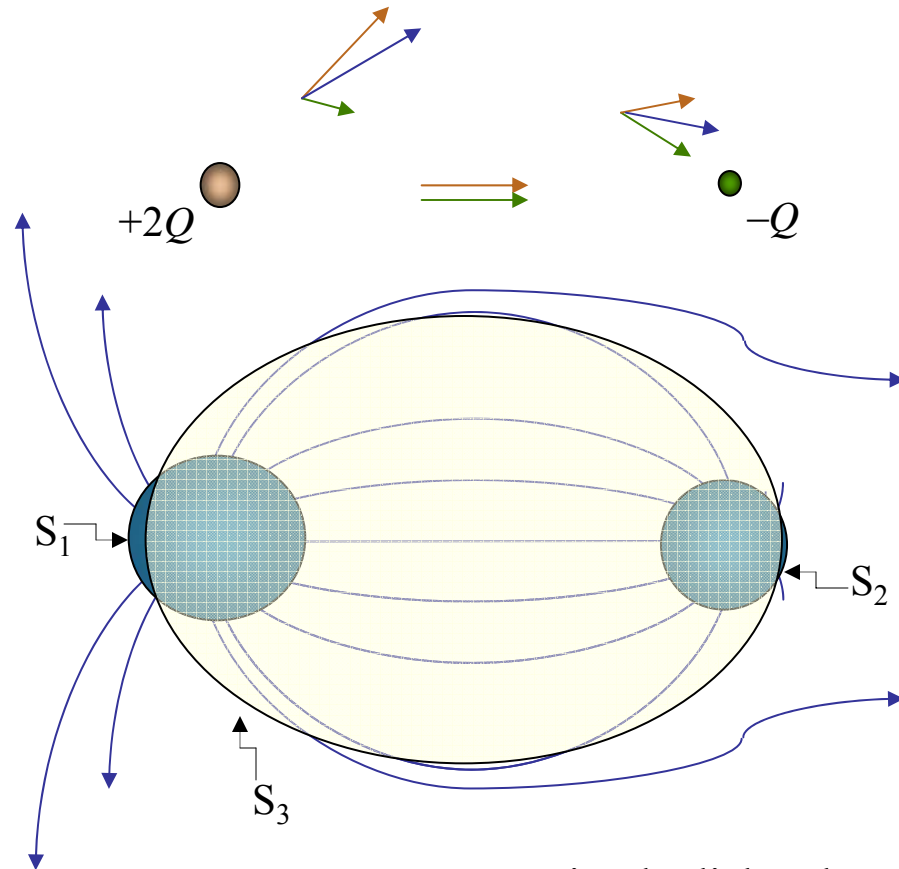


Representação esquemática das linhas de campo



Exemplo

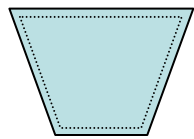
Calcule o fluxo elétrico nas superfícies S_1 , S_2 e S_3 da ilustração.



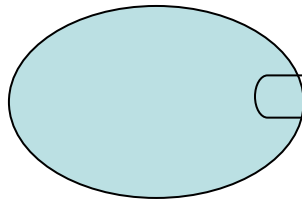
Representação esquemática das linhas de campo

Condutores em equilíbrio eletrostático

- (i) Campo elétrico é zero dentro de um condutor
- (ii) Se um condutor carrega uma carga livre, ela deve estar localizada na superfície.
- (iii) O campo elétrico justamente fora da superfície de um condutor é perpendicular a superfície e tem módulo igual a σ/ϵ_0
- (iv) Quando não existir nenhuma carga no interior de uma cavidade, a carga total sobre a superfície da cavidade é igual a zero



$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} = 0$$



$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

- (v) Quando existir uma carga q no interior de uma cavidade condutora, a carga total na Superfície da cavidade é igual a $-q$.



IF – FAP0291– Eletromagnetismo para Geociências

Usando a Lei de Gauss para o cálculo do campo elétrico – *simetria plana*.

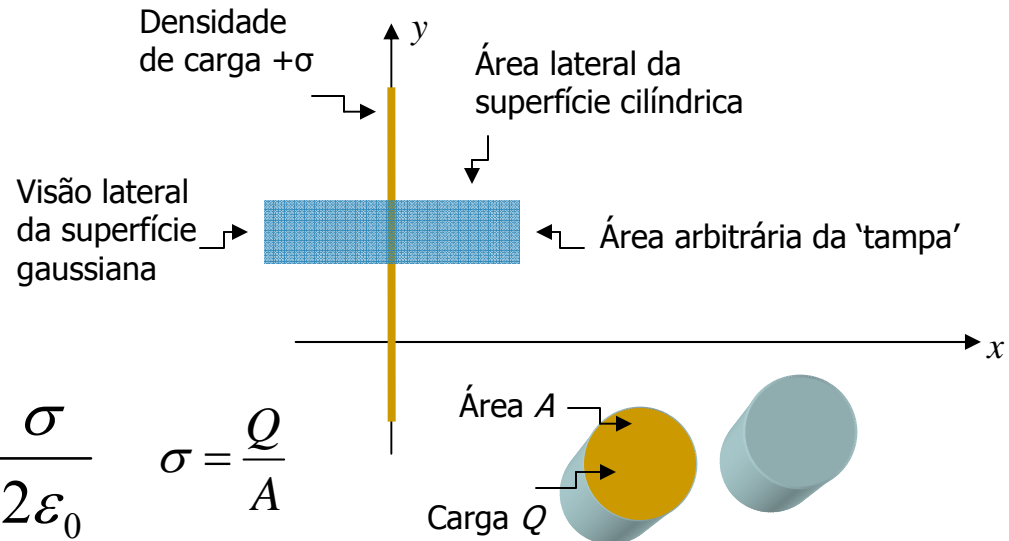
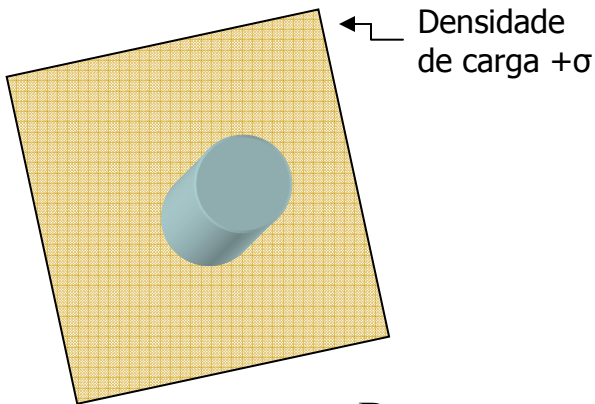
Exemplo → Calcule o campo elétrico produzido por um plano (infinito) não condutor carregado com densidade superficial de carga $+\sigma$.

Lei de Gauss

Procedimento

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

A idéia é encontrar uma superfície (imaginária) para facilitar os cálculos. Por exemplo, parte dela perpendicular ao campo e parte paralela. Esta superfície imaginária é conhecida como *superfície gaussiana*.



Resposta: $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ $\sigma = \frac{Q}{A}$



IF – FAP0291– Eletromagnetismo para Geociências

Usando a Lei de Gauss para o cálculo do campo elétrico – *simetria cilíndrica*.

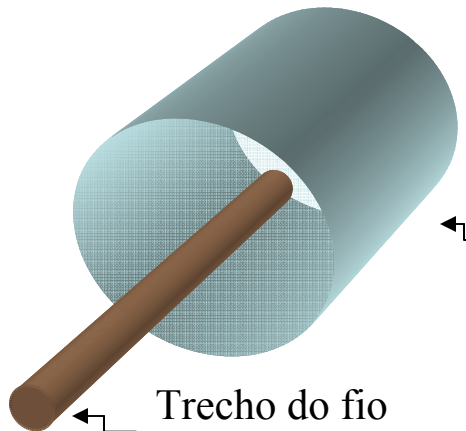
Exemplo → Calcule o campo elétrico produzido por um fio (infinito) não condutor carregado com densidade linear de carga $+\lambda$.

Lei de Gauss

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

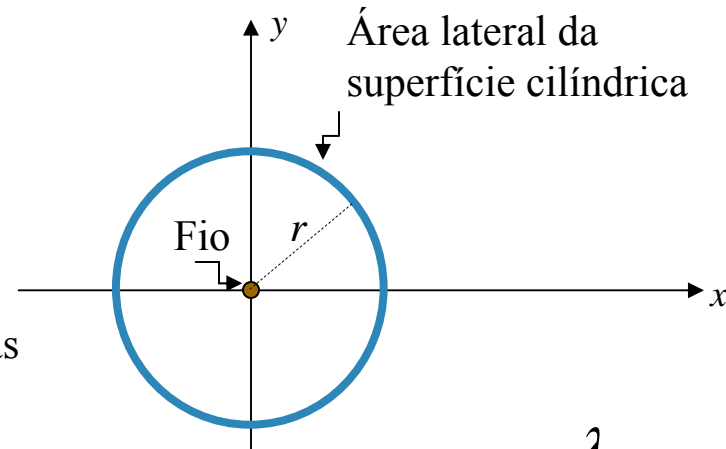
Procedimento

A idéia é encontrar uma superfície (imaginária) para facilitar os cálculos. Por exemplo, parte dela perpendicular ao campo e parte paralela. Esta superfície imaginária é conhecida como *superfície gaussiana*.



← Trecho do fio carregado com densidade linear de carga $+\lambda$

← Superfície gaussiana cilíndrica, concêntrica ao fio. (As faces da superfície estão omitidas para melhor visualização.)



Resposta: $E = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0}$



IF – FAP0291– Eletromagnetismo para Geociências

Usando a Lei de Gauss para o cálculo do campo elétrico – *simetria esférica*.

Exemplo

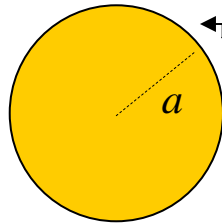


Uma esfera de raio a está uniformemente carregada com densidade volumétrica de carga ρ .

- a. Calcule o campo elétrico para $r > a$.
- b. Calcule o campo elétrico para $r < a$.

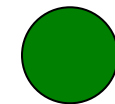
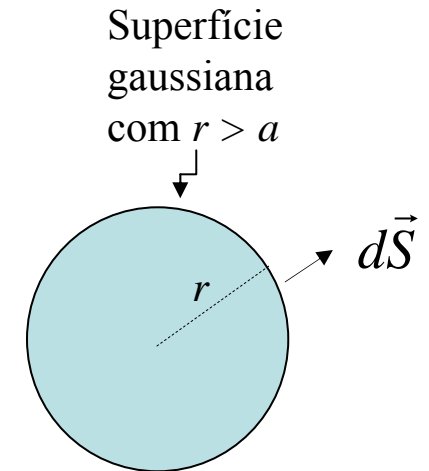
Lei de Gauss

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$



Distribuição volumétrica de carga com densidade ρ .
A carga total é:

$$Q = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho$$

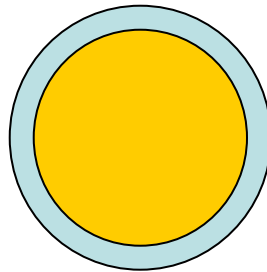


Superfície gaussiana com $r < a$

Procedimento

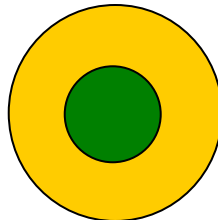
Envolvemos a distribuição de cargas concentricamente com as superfícies gaussianas observando que a direção do campo elétrico é paralela à direção das superfícies em ambos casos.

a.



Resposta: $E = \frac{(Q / \epsilon_0)}{4\pi r^2}$

b.



Resposta: $E = \frac{(Q / \epsilon_0)}{4\pi a^3} r$



IF – FAP0291– Eletromagnetismo para Geociências

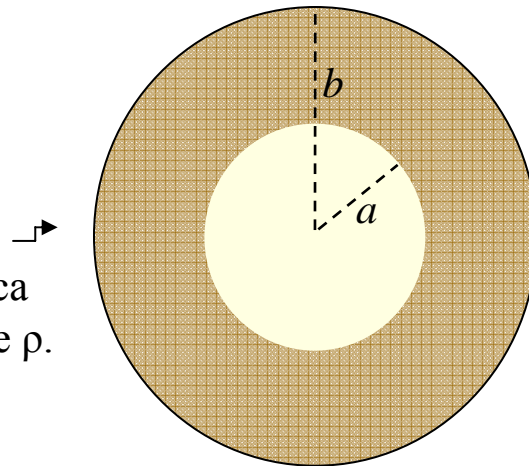
Usando a Lei de Gauss para o cálculo do campo elétrico – *simetria esférica*.

Exemplo → Uma esfera de raio b está uniformemente carregada com densidade volumétrica de carga ρ . Esta esfera possui uma cavidade esférica de raio a , concêntrica à esfera, na qual $\rho = 0$.

Lei de Gauss

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Distribuição volumétrica de carga com densidade ρ .



- Calcule o campo elétrico para $r < a$.
- Calcule o campo elétrico para $a < r < b$.
- Calcule o campo elétrico para $r > b$.

Depois, uma pequena esfera de carga q é colocada no centro da cavidade. Explique como seus resultados anteriores se modificarão e obtenha os novos resultados fazendo o mínimo possível de cálculos.