Lista de Exercícios XII

① Considere o circuito LC da figura 1a:

(a) Determine a equação diferencial para a corrente.

(b) Supondo que $e^{-i\alpha t}$ seja a solução **matemática** desta equação diferencial, determine α.

(c) Verifique que $(A\,e^{i\alpha t} + B\,e^{-i\alpha t})$ também é solução (em que A e B são números complexos). (Obs: A combinação linear de soluções será também uma solução sempre que a equação diferencial for linear e homogênea; isto é chamado de *príncipio de superposição*).

(d) **Fisicamente**, sabemos que $I(t)$ deve ser *real*, ou seja, $(A\,e^{i\alpha t} + B\,e^{-i\alpha t})$ é real. Para tanto, mostre que necessariamente $B = A^*$. (Sugestão: escreva $A = a_r + i\,a_i$, $B = b_r + i\,b_i$ e lembre-se de que $e^{i\alpha t} = \cos(\alpha t) + i\,\mathrm{sen}(\alpha t)$).

(e) Partindo de $I(t) = A\,e^{i\alpha t} + A^*\,e^{-i\alpha t} = 2\,Re(A\,e^{i\alpha t})$, mostre que as seguintes soluções são equivalentes: $I_1(t) = C\,\cos(\alpha t + \phi)$ e $I_2(t) = D\,\cos(\alpha t) + E\,\mathrm{sen}(\alpha t)$. Calcule as constantes C, ϕ, D e E em termos da constante A utilizada nos itens anteriores.

(f) Partindo da solução $I(t) = C\,\cos(\alpha t + \phi)$ determine a carga $Q(t)$ no capacitor.

(g) Considere o sistema massa-mola da figura 1b. Determine a equação diferencial que rege o deslocamento do bloco. Compare esta equação com a obtida no item (a) e estabeleça um paralelo entre os elementos deste sistema e do circuito LC.

Figura 1:

② Se um sistema massa-mola for preso na vertical (figura 2) sabemos que a massa estará sob a ação de uma força constante, devido a seu peso, e que esta é a única diferença entre este sistema e aquele em que a massa desliza sobre um plano horizontal. Considere que, devido à gravidade, a posição de equiíbrio da massa é deslocada de $x = 0$ para $x = h$. Dado que a equação de movimento para o sistema massa-mola na horizontal é $m\ddot{x} + kx = 0$, é fácil ver que para descrever o sistema na vertical basta fazer a troca $x \rightarrow x + h$, de modo que, $m\ddot{x} + kx = hk$. Com base nestas informações,

(a) Desenhe o circuito elétrico equivalente.

(b) Determine e resolva a equação diferencial para a carga no circuito. Considere $Q(t = 0) = Q_0$ e $I(t = 0) = 0$.

Figura 2:

③ A carga de um circuito LC ligado em série é dada por $Q(t) = 15\cos(1250t + \pi/4)\,\mu$C, em que t é o tempo em segundos.

(a) Determine a corrente em função do tempo.

(b) Determine o valor de C se $L = 28m$H.

(c) Escreva expressões para a energia elétrica U_e, a energia magnética U_m e a energia total U.

④ Dado o circuito RLC da figura 3:

Figura 3:

(a) Determine e resolva a equação diferencial para a corrente. (Sugestão: suponha que $e^{\alpha t}$ é a solução matemática do problema; substituindo isto na equação diferencial obtém-se um polinômio de 2^0 grau em α, que é assim determinado.)

(b) Na solução deste problema, dependendo da escolha do valor dos parâmetros R, L e C, existem 3 comportamentos fisicamente distintos: oscilações sub-amortecidas, criticamente amortecidas e super-amortecidas. Determine qual é a condição que $\omega_0^2 = 1/LC$ deve satisfazer para que se verifique cada um dos casos acima.

(c) Se $L = 0,01$H, $R = 100\Omega$, frequência angular de oscilação de $1k$Hz e, no instante inicial, tem-se uma tensão no capacitor de 10V e corrente nula, encontre a corrente $0,2$ms depois.

⑤ Um resistor de 2000Ω e um capacitor de 1μF estão ligados em série com uma linha de 110V (*valor eficaz*) e frequência de 60Hz.

(a) Qual é a impedância?

(b) Qual é o valor eficaz da corrente?

(c) Calcule a potência dissipada no circuito em função do tempo. Qual é a potência média?

(d) Qual será a leitura de um voltímetro CA ligado em paralelo com a resistência? E em paralelo com o capacitor?

⑥ Considere um circuito RLC em série alimentado por um gerador tal que: $\varepsilon = \varepsilon_0 \cos(\omega t)$

(a) Calcule os valores de ω para os quais a voltagem efetiva é máxima: (i) através do capacitor; (ii) através da bobina.

(b) Se a frequência do gerador for 500Hz, $R = 35\Omega$, $L = 0,15$H e o ângulo de fase entre a tensão aplicada e a corrente, medido com o auxílio de um osciloscópio, for $\delta = 75^o$, qual é o valor da capacitância?

⑦ No circuito da figura 4, $\varepsilon = \varepsilon_0 \cos(\omega t)$.

(a) Calcule a frequência angular de ressonância, definida como o valor de ω para o qual a reatância do circuito se anula.

(b) Calcule o valor da corrente eficaz no resistor e da corrente fornecida pela fonte, tudo na frequência de ressonância.

(c) Utilizando: $R = 2\Omega$, $L = 12m$H, $c = 30\mu$F e $\varepsilon = 40\,\cos(\omega t)\,$V, determine os valores numéricos das grandezas calculadas nos ítens (a) e (b).

Figura 4:

☛ <u>Problema Desafio</u> : Uma massa m está sendo puxada por uma força externa senoidal de frequência angular ω. Esta massa está presa a um suporte rígido através de duas molas de constantes k_1 e k_2. A força de atrito entre m e o suporte horizontal é representada pela constante de atrito b. Construa o análogo elétrico deste sistema e calcule sua impedância.

Figura 5: