

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

Notas de aula de Física III

Paulo Alberto Nussenzveig e Renata Zukanovich Funchal

A filosofia está escrita nesse grande livro do Universo, que permanece sempre aberto à nossa curiosidade. Mas o livro não pode ser entendido antes que se aprenda o alfabeto e a linguagem em que ele está escrito. A linguagem é a da Matemática e seus caracteres são triângulos, círculos e outras figuras geométricas, sem as quais é humanamente impossível entender uma única palavra; sem esses, estamos condenados a vagar num labirinto escuro.

Galileo Galilei

Conteúdo

1	Cálculo Diferencial e Integral de Campos Vetoriais	1
1.1	Breve Interlúdio	1
1.2	Noções básicas de campo escalar e vetorial	2
1.3	Divergência de um vetor e equação de Poisson	2
1.4	Cálculo de $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ em coordenadas cartesianas	4
1.5	Teorema de Gauss	6
1.6	Circuitação e rotacional de um campo vetorial	7
1.7	Teorema de Stokes	9
1.8	O operador $\vec{\nabla}$ e suas operações	10
2	Magnetostática	12
2.1	Forma local da Lei de Ampère	12
2.2	Potencial Vetor \vec{A}	13
2.3	Potencial Vetor de correntes conhecidas	14
2.4	Exemplos	15
2.4.1	Fio retilíneo de raio a conduzindo corrente estacionária I	15
2.4.2	Potencial vetor de um circuito	16
2.5	Lei de Biot-Savart	16
2.5.1	Campo de um fio retilíneo carregando corrente	18
2.5.2	Campo de uma espira circular no eixo	18
2.6	Força magnética entre correntes	20
3	Tratamento relativístico de campos elétricos e magnéticos	21
3.1	Invariância da carga elétrica	21
3.2	Dois pontos de vista de um problema eletromagnético	23
3.3	Transformações de cargas e correntes	25
3.4	Campo elétrico em diferentes referenciais	26
3.4.1	Campo elétrico de uma carga puntiforme movendo-se com velocidade constante	29
3.5	Como transformam-se os campos?	32

Capítulo 1

Cálculo Diferencial e Integral de Campos Vetoriais

Conteúdo

1.1	Breve Interlúdio	1
1.2	Noções básicas de campo escalar e vetorial	2
1.3	Divergência de um vetor e equação de Poisson	2
1.4	Cálculo de $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ em coordenadas cartesianas	4
1.5	Teorema de Gauss	6
1.6	Circuitação e rotacional de um campo vetorial	7
1.7	Teorema de Stokes	9
1.8	O operador $\vec{\nabla}$ e suas operações	10

1.1 Breve Interlúdio



solução exata de um problema físico passa geralmente pela resolução de equações diferenciais. As equações diferenciais nos fornecem uma maneira precisa e concisa de apresentar as leis fundamentais da físicas.

Até agora discutimos uma série de idéias que nos permitiram discutir problemas simples de eletrostática e magnetostática sem resolver explicitamente nenhuma equação diferencial. Fizemos uso de algumas leis empíricas, de alguns princípios básicos e sobretudo da simetria dos problemas apresentados para compreender o comportamento desses sistemas. Vamos ainda continuar durante todo esse curso nesse mesmo caminho no intuito de desenvolver no estudante a intuição física para diversas circunstâncias eletromagnéticas.

No entanto, é importante enfatizar que em geral, problemas eletromagnéticos mais complexos não podem ser compreendidos de forma completa sem resolver as equações diferenciais do eletromagnetismo, as equações de Maxwell. Você terá que resolvê-las no futuro no curso de eletromagnetismo.

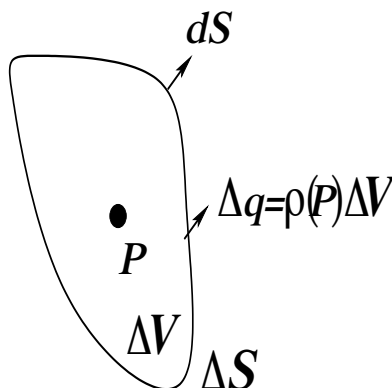


Figura 1.1: Elemento de volume ΔV , circundado por uma superfície fechada ΔS , em torno do ponto P .

O objetivo desse capítulo é introduzir algumas ferramentas matemáticas muito úteis no entendimento mais profundo das leis do eletromagnetismo possibilitando sua descrição de forma integral (global) e diferencial (local). O cálculo diferencial e integral de campos vetoriais que veremos aqui é também de grande importância em várias áreas da física, não só no eletromagnetismo. Começamos agora a trilhar o caminho abstrato, matemático da teoria.

1.2 Noções básicas de campo escalar e vetorial

Por campo entendemos uma quantidade que depende de sua posição no espaço, ou seja uma função de ponto $\vec{r} = (x, y, z)$. O campo mais simples que existe é um *campo escalar*, ou seja, um campo que é caracterizado em cada ponto do espaço por um único número, um escalar. Claro que esse número pode, em princípio, mudar com o tempo, mas esqueçamos disso por enquanto. O potencial eletrostático, $V(\vec{r})$ ou $\Phi(\vec{r})$, que introduzimos na primeira parte dessa disciplina é um exemplo de um campo escalar estático.

Existem também *campos vetoriais*. A idéia de um campo vetorial também é bastante simples. Um campo vetorial é uma função de ponto que define um vetor para cada ponto do espaço. Podemos citar como exemplo os campos elétrico $\vec{E}(\vec{r})$ e magnético $\vec{B}(\vec{r})$ que já vimos antes.

1.3 Divergência de um vetor e equação de Poisson

Gostaríamos de exprimir o estado de um campo vetorial \vec{F} num ponto P em termos de seu comportamento nas vizinhanças de P . No caso do campo eletrostático, \vec{E} , o fluxo do campo através de uma superfície fechada S dado pela lei de Gauss é um indicador global da presença de cargas (fontes) no volume V interno à superfície S ,

$$\Phi_S \equiv \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}, \quad (1.1)$$

onde Q_{int} é a carga interna à superfície S . Como podemos encontrar um *indicador local* que sinalize a presença de fontes num ponto P qualquer?

Tomemos um pequeno elemento de volume ΔV , circundado por uma superfície fechada ΔS , em torno do ponto P . Seja $d\vec{S} = \vec{n} dS$ um elemento de área orientado para fora dessa superfície e normal à mesma. A carga interna a ΔV , $\Delta q = \rho(P)\Delta V$, considerando que a densidade volumétrica de carga pode ser tomada no ponto P (uma vez que temos $\Delta V \rightarrow 0$), pode ser relacionada com o fluxo do campo através de ΔS pela lei de Gauss

$$\Phi_{\Delta S} = \oint_{\Delta S} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\Delta q}{\epsilon_0} = \frac{\rho(P)\Delta V}{\epsilon_0}, \quad (1.2)$$

o que nos permite definir

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(P) = \text{div } \vec{E}(P) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta S} \vec{E} \cdot d\vec{S} \right] = \frac{\rho(P)}{\epsilon_0}, \quad (1.3)$$

que denominamos divergência de \vec{E} em P . Esse limite que caracteriza a densidade de fontes do campo em P , é independente de ΔS e define uma característica local do campo \vec{E} . A Eq.(1.3) permite escrever a lei de Gauss em sua forma local,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}, \quad (1.4)$$

em que \vec{r} é o vetor que localiza o ponto P a partir da origem do sistema de coordenadas adotado. Essa é uma das equações de Maxwell para a eletrostática. A Eq.(1.4) nos permite concluir que se num meio condutor $\vec{E} = 0$ então $\rho = 0$ em todos os pontos no interior do condutor, como já vimos anteriormente.

Escreve-se também essa equação em termos do potencial eletrostático usando $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$ como

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}V(\vec{r}) = \nabla^2 V(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}, \quad (1.5)$$

que denomina-se equação de Poisson. Sempre que tivermos $\rho = 0$, isto é, em toda região do espaço que não contém cargas, o potencial eletrostático terá que satisfazer a equação

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = 0, \quad (1.6)$$

conhecida pelo nome de equação de Laplace. Essa equação é encontrada em muitas áreas da física. Podemos dizer que, do ponto de vista matemático, grande parte da teoria clássica de campos consiste no estudo das soluções dessa equação. A classe de funções que satisfazem a equação de Laplace são chamadas funções harmônicas.

A idéia de divergência pode ser aplicada a qualquer campo vetorial $\vec{F}(\vec{r})$. Definimos genericamente

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \text{div } \vec{F}(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta S} \vec{F} \cdot d\vec{S} \right], \quad (1.7)$$

como a divergência de \vec{F} num ponto P qualquer localizado pelo vetor \vec{r} . Observamos que ΔV é um volume arbitrário que inclui o ponto P e ΔS é a superfície envoltória de ΔV sobre a qual é feita a integração. Devemos incluir aqui também a condição de que esse limite deve existir e ser independente de ΔV .

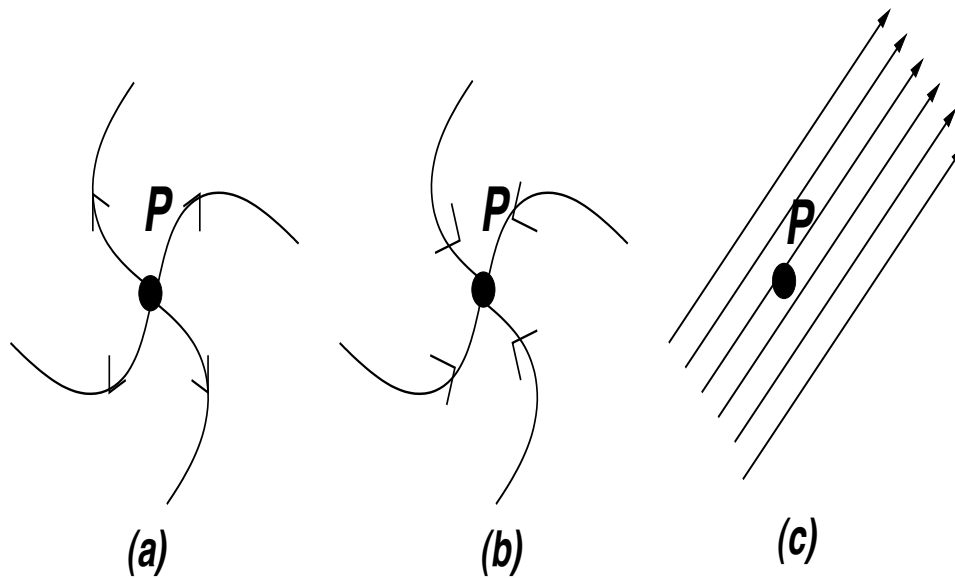


Figura 1.2: Exemplos de linhas de campo \vec{F} em P quando (a) existem fontes de \vec{F} em P ($\vec{\nabla} \cdot \vec{F} > 0$), (b) existem sorvedouros de \vec{F} em P ($\vec{\nabla} \cdot \vec{F} < 0$), (c) não há fontes ou sorvedouros em P ($\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$).

O significado de $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ pode ser expresso assim: $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ é o fluxo que sai de ΔV , por unidade de volume, no caso limite em que ΔV é um volume infinitésimo. Trata-se de uma grandeza escalar que pode variar de ponto a ponto.

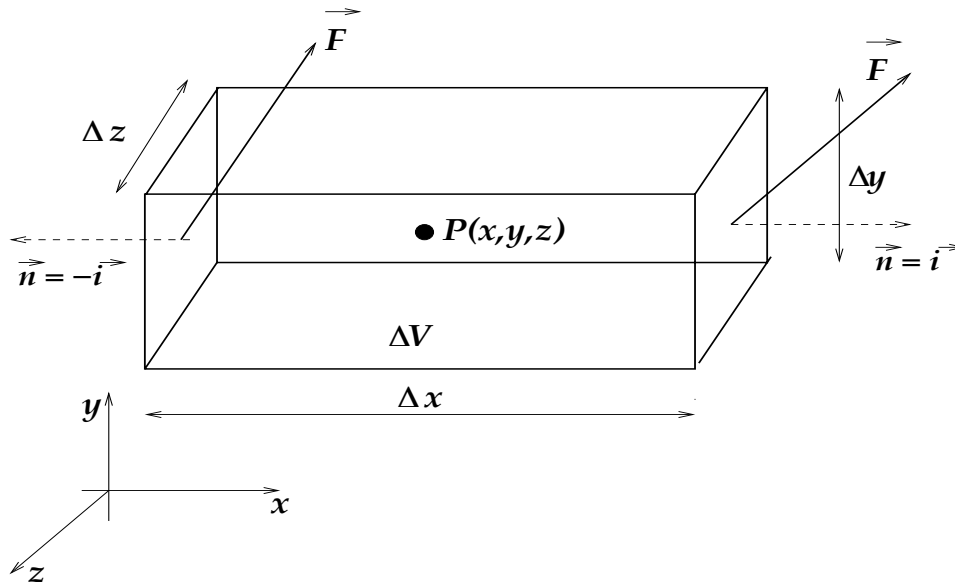
1.4 Cálculo de $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ em coordenadas cartesianas

A definição fundamental de $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(P)$ dada pela Eq.(1.7) independe do sistema de coordenadas. No entanto, é muito útil conhecer o divergente de um campo vetorial de forma explícita em um dado sistema de coordenadas. Suponha que \vec{F} seja expresso em termos de coordenadas cartesianas, ou seja, $\vec{F} = F_x(x, y, z)\vec{i} + F_y(x, y, z)\vec{j} + F_z(x, y, z)\vec{k}$. Podemos então calcular $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ explicitamente em coordenadas cartesianas retangulares. Para isso tomaremos nosso volume arbitrário ΔV como sendo da forma de uma pequena caixa retangular centrada em $P = (x, y, z)$ de lados infinitésimos Δx , Δy e Δz , conforme a Fig. 1.3.

Vamos calcular o fluxo $\Phi_{\Delta S}$ de \vec{F} através das faces da caixa como a soma dos fluxos através das paredes perpendiculares ao eixo x , y e z

$$\Phi_{\Delta S} = \Phi_x + \Phi_y + \Phi_z .$$

Iniciaremos o cálculo pelo fluxo de \vec{F} através das duas paredes perpendiculares ao eixo x , Φ_x , cujas normais são respectivamente \vec{i} e $-\vec{i}$. Como nosso volume é infinitésimo, podemos tomar o valor de \vec{F} no centro de cada parede como sendo o valor médio sobre toda a parede de forma que


 Figura 1.3: Caixa retangular de lados infinitésimos Δx , Δy e Δz centrada em P .

$$\Phi_x = \int \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \left[\vec{F}(2) \cdot \vec{i} - \vec{F}(1) \cdot \vec{i} \right] \Delta y \Delta z = \left[F_x\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) - F_x\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) \right] \Delta S$$

Podemos fazer uma expansão de Taylor para calcular

$$F_x\left(x \pm \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) = F_x(x, y, z) \pm \frac{1}{2} \frac{\partial F_x}{\partial x}(x, y, z) \Delta x, \quad (1.8)$$

de forma que

$$\Phi_x = \frac{\partial F_x}{\partial x}(x, y, z) \Delta x \Delta y \Delta z = \frac{\partial F_x}{\partial x}(x, y, z) \Delta V.$$

Podemos facilmente obter de forma análoga Φ_y e Φ_z e assim

$$\Phi_{\Delta S} = \oint \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) \Delta V,$$

de forma que, usando a definição dada pela Eq.(1.7), obtemos a forma explícita de $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ em $P = (x, y, z)$ em coordenadas cartesianas

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(x, y, z) \equiv \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}. \quad (1.9)$$

Exemplo : $\vec{\nabla} \cdot \vec{r}$

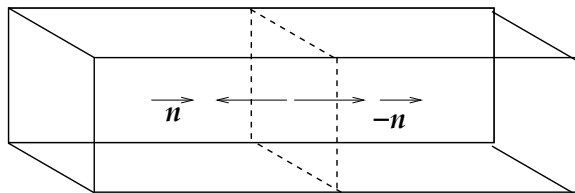


Figura 1.4: Caixas retangulares adjacentes.

Tomemos um volume infinitésimo esférico contendo um ponto P ; então podemos calcular o fluxo do vetor $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ através da superfície ΔS que envolve esse volume esférico de raio r

$$\oint_{\Delta S} \vec{r} \cdot \vec{n} \, dS = \oint_{\Delta S} r \, dS = 4\pi r^3;$$

mas, como $\Delta V = \frac{4}{3}\pi r^3$,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta S} \vec{r} \cdot d\vec{S} \right] = 3.$$

Também podemos obter isso explicitamente calculando

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{r} \equiv \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3.$$

1.5 Teorema de Gauss

Para qualquer ΔV infinitésimo limitado pela superfície ΔS podemos escrever para um campo vetorial \vec{F} que

$$\oint_{\Delta S} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \, \Delta V.$$

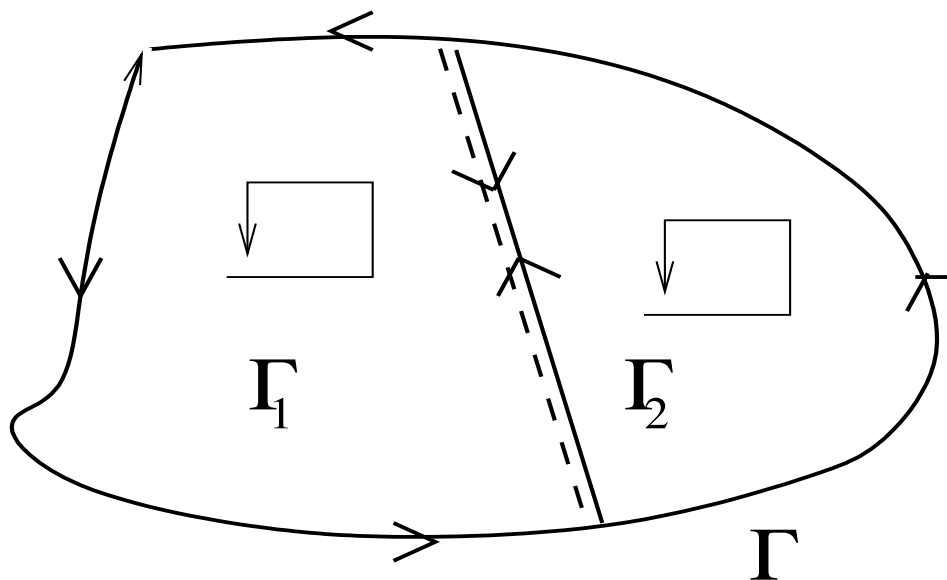
Como qualquer volume V pode ser decomposto em elementos de volume ΔV infinitésimos aos quais podemos aplicar o resultado acima, então

$$\sum \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \, \Delta V \xrightarrow{\Delta V \rightarrow 0} \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \, dV.$$

Podemos observar que, para duas caixas infinitésimas adjacentes, há sempre uma parede de ΔS comum às duas caixas. Mas, como a orientação das normais orientadas para fora de cada caixa têm sentidos opostos nessa parede, os elementos de fluxo dessas superfícies internas cancelam dois a dois. Resta somente o fluxo devido as superfícies externas do volume total V , logo

$$\sum \oint_{\Delta S} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} \equiv \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \, dV.$$

Esse é o conhecido Teorema de Gauss. Usando o teorema de Gauss podemos mostrar facilmente que a Equação de Poisson é equivalente à lei de Gauss.

Figura 1.5: Contorno Γ subdividido em Γ_1 e Γ_2 .

1.6 Circuitação e rotacional de um campo vetorial

O caráter conservativo do campo eletrostático \vec{E} , que como já vimos é equivalente à existência de um potencial V tal que $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$, se exprime globalmente através da integral de linha sobre a curva fechada orientada Γ ,

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0,$$

denominada circuitação de \vec{E} . A circuitação de \vec{E} é nula. Haveria uma forma local de expressar esse resultado?

Desenvolvemos o conceito de divergência, uma propriedade local do campo vetorial, buscando uma forma local da lei de Gauss. No mesmo espírito, buscaremos aqui um indicador local da circuitação de um campo vetorial \vec{F} .

Definiremos a circuitação C_{Γ} de um campo vetorial \vec{F} por um caminho fechado Γ como a integral

$$C_{\Gamma} = \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l},$$

onde $d\vec{l}$ é um elemento de circuito, um vetor infinitesimal, tangente localmente a Γ .

Existem dois sentidos segundo os quais Γ pode ser percorrida; devemos escolher um deles de forma a definir o sentido de $d\vec{l}$. Lembre-se de que Γ não precisa ser uma curva plana, pode ser distorcida arbitrariamente.

Suponha que unamos dois pontos de Γ , 1 e 2, introduzindo um trajeto novo e construindo assim dois novos circuitos fechados Γ_1 e Γ_2 tendo o novo trajeto em comum. Tomando a integral de linha em cada um desses novos percursos, escolhendo o mesmo sentido de percurso para ambos, observamos que

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2,$$

ou seja,

$$C_{\Gamma} = \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \oint_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{l} + \oint_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{l} = C_{\Gamma_1} + C_{\Gamma_2},$$

a soma das duas novas circuitações é a mesma coisa que C_{Γ} , pois o percurso comum as duas circuitações é atravessado em sentidos opostos, restando apenas a integral original. Assim podemos subdividir o caminho Γ em N percursos de forma que

$$C_{\Gamma} = \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^N \oint_{\Gamma_i} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^N C_{\Gamma_i}.$$

Podemos fazer essa subdivisão até atingirmos, no limite, uma quantidade característica do campo nas vizinhanças de um ponto. Quando subdividimos os percursos, obtemos percursos cuja circuitação é menor, mas também a área envolvida por eles diminui. Parece natural investigar a relação entre circuitação e a área envolvida. Aqui a área ΔS_i envolvida pela curva Γ_i é de fato um vetor, a superfície tem orientação no espaço! De fato, quando subdividimos em caminhos cada vez menores nas vizinhanças de um ponto P , as coisas podem ser feitas de forma que a área envolvida tenha orientação escolhida de forma arbitrária. Designaremos por \hat{n} o versor normal ao segmento de área infinitésimo da última subdivisão que permanecerá constante quando esse elemento de área tender a zero sempre contendo P .

Definiremos o limite entre circuitação e área do elemento, quando a área tende a zero

$$\lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Gamma_i} \vec{F} \cdot d\vec{l}}{\Delta S_i},$$

e a regra do sinal é dada pela convenção de que a direção \hat{n} e o sentido de percurso de Γ_i sejam relacionados pela regra da mão direita. O limite acima é uma grandeza escalar associada ao ponto P , ao campo \vec{F} e à normal \hat{n} . Podemos escolher três direções independentes, como \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} , e assim obter três números diferentes que podem ser considerados como componentes de um vetor denominado rotacional de \vec{F} , e designado por $rot \vec{F}$ ou $\vec{\nabla} \times \vec{F}$. Assim, o número encontrado para o limite, escolhida uma direção particular \hat{n} , é a componente de $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ nessa direção. Logo,

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \hat{n} = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Gamma_i} \vec{F} \cdot d\vec{l}}{\Delta S_i}, \quad (1.10)$$

que pode ser interpretado como a circuitação por unidade de área no limite em que a área é infinitésima. Essa é a definição intrínseca, independente do sistema de coordenadas, do rotacional de um vetor em um ponto $P = (x, y, z)$ na direção de \hat{n} .

Podemos mostrar que o operador que aparece aqui é o mesmo ∇ (nabla) que vimos anteriormente. Calculando a circuitação de um vetor \vec{F} para um circuito retangular orientado paralelo ao plano $x \times y$, centrado no ponto $P = (x, y, z)$, $\Delta \Gamma_{xy}$:

$$C_{\Delta \Gamma_{xy}} = \oint_{\Delta \Gamma_{xy}} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_1 \vec{F} \cdot d\vec{l} + \int_2 \vec{F} \cdot d\vec{l} + \int_3 \vec{F} \cdot d\vec{l} + \int_4 \vec{F} \cdot d\vec{l} = C_1 + C_2 + C_3 + C_4,$$

em que dividimos a integral em quatro trechos, dois paralelos ao eixo x , de comprimento Δx , e dois ao eixo y , de comprimento Δy . Como esses trechos são infinitésimos, podemos calcular essas integrais adotando o valor de \vec{F} sobre todo o trecho como constante e igual a seu valor no centro de cada trecho.

$$C_1 + C_3 = \Delta x \left[\vec{F}\left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z\right) \cdot \vec{i} - \vec{F}\left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z\right) \cdot \vec{i} \right] = \Delta x \left[F_x\left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z\right) - F_x\left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z\right) \right]$$

usando o resultado da Eq.(1.8), adaptado para a situação acima, obtemos

$$C_1 + C_3 = -\frac{\partial F_x}{\partial y}(x, y, z) \Delta S_{xy},$$

em que $\Delta S_{xy} = \Delta x \Delta y$ é a área circundada por Γ_{xy} .

De forma análoga, pode-se calcular

$$C_2 + C_4 = \frac{\partial F_y}{\partial x}(x, y, z) \Delta S_{xy},$$

de forma que

$$\frac{C_{\Gamma_{xy}}}{\Delta S_{xy}} = \frac{\partial F_y}{\partial x}(x, y, z) - \frac{\partial F_x}{\partial y}(x, y, z) = (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{k}.$$

O que mostra que o operador ∇ que aparece na nossa definição intrínseca de rotacional é o mesmo operador que aparece na divergência de um vetor, em coordenadas cartesianas. Como essa definição não depende do sistema de coordenadas, então, de fato, trata-se do mesmo operador.

A palavra rotacional, introduzida por Maxwell, lembra-nos de que um campo vetorial com $\vec{\nabla} \times \vec{F} \neq 0$ tem circuitação ou vorticidade. O campo de velocidades da água quando esvaziamos uma banheira adquire em geral uma circuitação: seu rotacional é diferente de zero na maior parte da superfície. Qualquer coisa na superfície gira à medida que se desloca. No estudo da mecânica dos fluidos, hidrodinâmica e aerodinâmica, o conceito de rotacional é também de importância fundamental. Podemos agora entender como exprimir localmente que a circuitação do campo eletrostático é nula:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = 0. \quad (1.11)$$

Esta é a segunda equação de Maxwell para a eletrostática. Mais tarde encontraremos campos elétricos com rotacional não nulo.

1.7 Teorema de Stokes

Partindo da circuitação no contorno de um elemento de área infinitesimal podemos retornar à circuitação do contorno original Γ

$$C_{\Gamma} = \oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^N C_{\Gamma_i} = \sum_{i=1}^N \Delta S_i \left[\frac{C_{\Gamma_i}}{\Delta S_i} \right].$$

Fazendo N crescer, os ΔS_i diminuem, e a razão entre colchetes transforma-se em $(\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \hat{n}_i$, onde \hat{n}_i é o versor unitário normal ao elemento de área ΔS_i . Temos assim uma soma, sobre todos os elementos de área que constituem uma superfície S apoiada por Γ , do produto da área do elemento pela componente normal do rotacional. Logo,

$$\sum_{i=1}^N \Delta S_i \left[\frac{C_{\Gamma_i}}{\Delta S_i} \right] = \sum_{i=1}^N \Delta S_i (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \hat{n}_i \rightarrow \int_S d\vec{S} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{F},$$

de onde concluímos que

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot d\vec{S}, \quad (1.12)$$

que é um teorema matemático conhecido como teorema de Stokes. O teorema relaciona a integral de linha de um vetor com a integral de superfície desse mesmo vetor. O teorema refere-se a uma linha fechada e a uma superfície que se apoie nessa linha.

1.8 O operador $\vec{\nabla}$ e suas operações

O operador $\vec{\nabla}$, denominado nabla, é um operador vetorial cujas componentes em coordenadas cartesianas são dadas por

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (1.13)$$

Um operador vetorial nada significa sozinho: seu significado depende sobre o que ele opera.

1. $\vec{\nabla}$ operando sobre um campo escalar $\Psi(\vec{r}) = \Psi(x, y, z)$ produz um campo vetorial denominado gradiente de Ψ :

$$\vec{\nabla} \Psi(\vec{r}) = \text{grad } \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \vec{k}$$

2. $\vec{\nabla}$ operando sobre um campo vetorial $\vec{F}(\vec{r}) = (F_x(x, y, z), F_y(x, y, z), F_z(x, y, z))$ através de um produto escalar produz um campo escalar, denominado divergente de F :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \text{div } \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

3. $\vec{\nabla}$ operando sobre um campo vetorial $\vec{F}(\vec{r}) = (F_x(x, y, z), F_y(x, y, z), F_z(x, y, z))$ através de um produto vetorial produz um campo vetorial denominado rotacional de F :

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = \text{rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

4. $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \nabla^2$ é um operador escalar denominado Laplaciano que pode operar sobre um campo escalar $\Psi(\vec{r})$ produzindo um campo escalar:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \Psi) = \nabla^2 \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}$$

5. ∇^2 pode também operar sobre um campo vetorial $\vec{F}(\vec{r})$ produzindo um campo vetorial:

$$\nabla^2 \vec{F} = (\nabla^2 F_x, \nabla^2 F_y, \nabla^2 F_z)$$

Vamos relembrar dois teoremas importantes do cálculo vetorial que serão de bastante utilidade para nós:

Teorema I:

Se, para um campo vetorial \vec{A} , tem-se $\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$, então existe um campo escalar Ψ tal que $\vec{A} = \vec{\nabla} \Psi$. Isso advém do fato que $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \Psi) = 0, \forall \Psi$ bem comportado.

Teorema II:

Se, para um campo vetorial \vec{A} , tem-se $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, então existe um campo vetorial \vec{C} tal que $\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{C}$. Isso advém do fato que $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{C}) = 0, \forall \vec{C}$ bem comportado.

Capítulo 2

Magnetostática

Conteúdo

2.1	Forma local da Lei de Ampère	12
2.2	Potencial Vetor \vec{A}	13
2.3	Potencial Vetor de correntes conhecidas	14
2.4	Exemplos	15
2.4.1	Fio retilíneo de raio a conduzindo corrente estacionária I	15
2.4.2	Potencial vetor de um circuito	16
2.5	Lei de Biot-Savart	16
2.5.1	Campo de um fio retilíneo carregando corrente	18
2.5.2	Campo de uma espira circular no eixo	18
2.6	Força magnética entre correntes	20

2.1 Forma local da Lei de Ampère

Podemos agora escrever a forma local da lei de Ampère,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot \hat{n} dS .$$

Usando o teorema de Stokes,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \hat{n} dS = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot \hat{n} dS ,$$

que vale qualquer que seja o caminho fechado C e qualquer superfície S . Logo,

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}) , \tag{2.1}$$

que é a forma local da lei de Ampère e uma das duas equações de Maxwell para a magnetostática.

2.2 Potencial Vetor \vec{A}

Lembremos que $\vec{\nabla} \times \vec{B}$ em coordenadas cartesianas escreve-se

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Por outro lado, para um campo vetorial \vec{F} bem comportado já vimos que

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \equiv 0,$$

e que existe um teorema que garante que se $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, então existe \vec{A} tal que $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$.

Definimos o potencial vetor \vec{A} como

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}), \quad (2.2)$$

Assim como ocorre com o potencial escalar, há ambigüidade na definição de \vec{A} , pois $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\psi) = 0$

$$\implies \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\psi \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times \vec{A},$$

Podemos reduzir a ambigüidade, mas não removê-la completamente, definindo, por exemplo, $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$. Essa liberdade denomina-se liberdade de *gauge* ou de calibre. Como $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \nabla^2\psi = 0$, a escolha de ψ permite obter qualquer valor para $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}'$. Um escolha conveniente para a magnetostática é

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0,$$

o que corresponde ao chamado calibre ou gauge do Coulomb.

Vejamos qual o potencial \vec{A} para um campo uniforme $\vec{B} = B_0\vec{k}$:

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0 \quad (2.3)$$

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0 \quad (2.4)$$

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B_0, \quad (2.5)$$

algumas soluções possíveis, todas com $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, são:

$$A_x = 0, \quad A_y = B_0 x, \quad A_z = 0 \quad (2.6)$$

$$A_x = -B_0 y, \quad A_y = 0, \quad A_z = 0 \quad (2.7)$$

$$A_x = -\frac{1}{2}B_0 y, \quad A_y = \frac{1}{2}B_0 x, \quad A_z = 0 \quad (2.8)$$

Vemos que \vec{A} não é único! Normalmente é mais fácil achar \vec{A} e, a partir disso, obter \vec{B} .

2.3 Potencial Vetor de correntes conhecidas

As fontes de \vec{B} são correntes, logo as fontes de \vec{A} também são correntes. Como podemos achar \vec{A} conhecendo a distribuição de corrente?

A lei de Ampère, na sua forma local, permite escrever

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \rightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{j}, \quad (2.9)$$

que, como veremos, é uma equação análoga a $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} V) = -\rho/\epsilon_0$. Essa analogia ficará clara se reescrevermos $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$ usando a identidade vetorial

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C},$$

obtendo

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = -\nabla^2 \vec{A},$$

onde lembramos que adotamos $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. Podemos agora escrever $\nabla^2 \vec{A}$ explicitamente:

$$\nabla^2 \vec{A} = (\nabla^2 A_x)\vec{i} + (\nabla^2 A_y)\vec{j} + (\nabla^2 A_z)\vec{k},$$

o que, aplicado à equação Eq.(2.9), leva a três equações

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 j_x \quad (2.10)$$

$$\nabla^2 A_y = -\mu_0 j_y \quad (2.11)$$

$$\nabla^2 A_z = -\mu_0 j_z \quad (2.12)$$

semelhantes à equação de Poisson: $\nabla^2 V = -\rho/\epsilon_0$. Logo, tudo que aprendemos para $V(\vec{r})$ quando conhecemos $\rho(\vec{r})$ vale para cada componente de \vec{A} quando conhecemos \vec{j} . Mesma matemática, mesma física.

Vimos na eletrostática que uma solução geral para o potencial $V(\vec{r})$, num ponto P do espaço localizado por \vec{r} , assumindo $V(\infty) = 0$, é dada por

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (2.13)$$

em que \vec{r}' é o vetor que localiza um elemento de volume com carga $dq = \rho(\vec{r}') dV'$, a uma distância $|\vec{r} - \vec{r}'|$ do ponto P . Assim, analogamente a solução geral para $A_x(\vec{r})$ é

$$A_x(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j_x(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (2.14)$$

e similarmente para A_y e A_z . Combinando os resultados temos

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (2.15)$$

Observamos que essa igualdade só é válida em coordenadas cartesianas, não se obtém A_r usando j_r , por exemplo.

2.4 Exemplos

2.4.1 Fio retilíneo de raio a conduzindo corrente estacionária I

A corrente I se distribui uniformemente sobre a seção do fio; logo para $\eta = \sqrt{(x^2 + y^2)} < a$, $j = \text{constante}$, tem-se

$$\vec{j} = j_z \vec{k} = \frac{I}{\pi a^2} \vec{k},$$

Como $j_x = j_y = 0 \implies A_x = A_y = 0$.

Podemos obter A_z a partir da solução para o potencial eletrostático de um fio com densidade de carga uniforme. Para pontos fora do fio,

$$V(\eta) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \eta + \text{const.}, \quad \lambda = q/L \equiv \pi a^2 \rho,$$

Logo, fazendo a substituição: $V \rightarrow A_z$ e $\rho/\epsilon_0 \rightarrow \mu_0 j_z$ obtemos

$$A_z = -\frac{\pi a^2 j_z \mu_0}{2\pi} \ln \eta = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \eta.$$

Agora podemos calcular \vec{B} :

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \ln \eta,$$

e

$$B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \ln \eta,$$

mas

$$\frac{\partial}{\partial x} \ln \eta = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \ln \eta = \frac{y}{x^2 + y^2},$$

logo

$$B_x = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{y}{\eta^2} \tag{2.16}$$

$$B_y = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{x}{\eta^2}, \tag{2.17}$$

de forma que

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\eta} \hat{\theta},$$

mais uma vez recuperando o resultado que já obtivemos antes para o campo de um fio infinito usando a lei de Ampère.

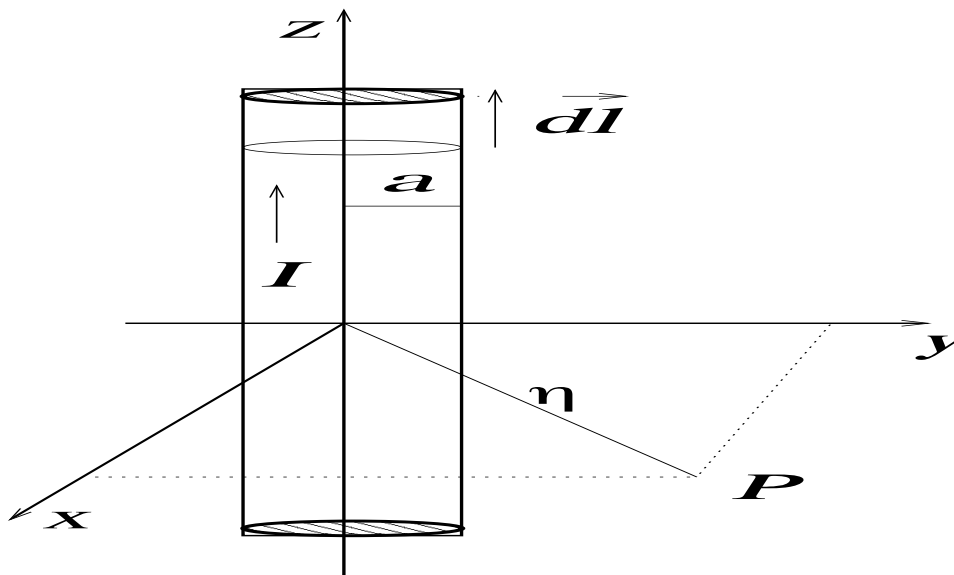


Figura 2.1: Fio retilíneo de raio a conduzindo corrente estacionária I .

2.4.2 Potencial vetor de um circuito

Frequentemente nos interessamos em calcular \vec{B} para circuitos formados por fios cujos diâmetros são muito menores que suas dimensões. Para um fio fino, $dV = A dl$, em que A é a área da seção reta do fio, e dl , um elemento de comprimento. Se orientarmos $d\vec{l}$ ao longo do fio, então $\vec{j} // d\vec{l}$. Como o fio é fino, podemos supor $j = \text{const.}$ sobre qualquer seção do fio. Logo,

$$\vec{j} dV = j A d\vec{l} = I d\vec{l}.$$

Assim, o potencial vetor de um circuito fechado é

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I d\vec{l}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (2.18)$$

2.5 Lei de Biot-Savart

Podemos agora calcular o campo magnético devido a uma distribuição de correntes usando

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right],$$

em que o operador ∇ (nabla) opera apenas nas variáveis x, y, z , não em x', y', z' . Para facilitar o cálculo usaremos a seguinte definição:

$$D(x, y, z) = |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}, \quad \vec{D} = D\hat{D},$$

de forma que

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[j_z(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{D} \right) - j_y(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{D} \right) \right] dV'. \quad (2.19)$$

Observamos que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{D} \right) = -\frac{(x-x')}{D^3} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{D} \right) = -\frac{(y-y')}{D^3} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{D} \right) = -\frac{(z-z')}{D^3},$$

de forma que podemos reescrever Eq.(2.19) como

$$B_x = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \underbrace{\left[j_z(\vec{r}') \frac{(y-y')}{D^3} - j_y(\vec{r}') \frac{(z-z')}{D^3} \right]}_{-\left(\frac{\vec{j} \times \vec{D}}{D^3} \right)_x} dV' = -\left(\frac{\vec{j} \times \hat{D}}{D^2} \right)_x$$

Podemos calcular as componentes B_y e B_z de forma análoga, finalmente obtendo

$$\therefore \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times \vec{D}}{D^3} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'. \quad (2.20)$$

Se as correntes existem apenas em circuitos de fios, então podemos fazer a substituição $\vec{j} dV' \rightarrow I d\vec{l}'$, o que nos permite obter a lei de Biot e Savart, que fornece o campo magnético produzido por uma distribuição de correntes estacionárias de intensidade I no circuito C sob a forma de uma integral de linha ao longo de C :

$$\therefore \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (2.21)$$

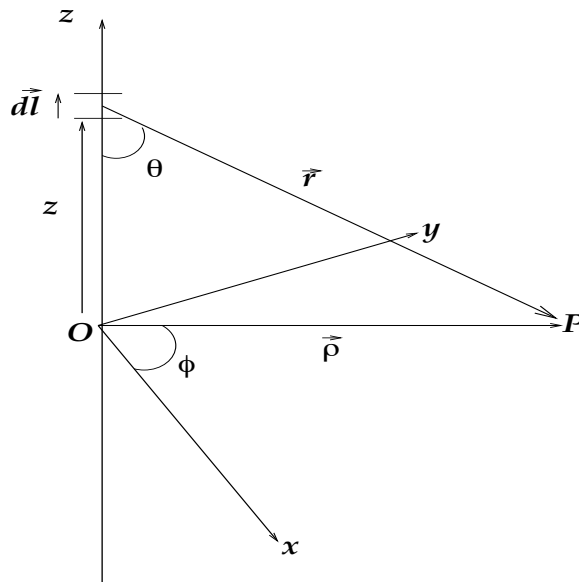
★ **Demo** : bolas de bilhar em trilhos paralelos

★ **Demo** : bobina de Helmholtz

Frequentemente enuncia-se a lei de Biot e Savart decompondo C em *elementos de corrente* $I d\vec{l}'$, dizendo que o campo em P devido a um tal elemento é

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l}' \times \hat{r}}{r^2}.$$

No entanto, como uma corrente estacionária está sempre associada a um circuito fechado, não é possível justificá-la em elementos de corrente, exceto como etapa auxiliar ao cálculo.

Figura 2.2: Fio retilíneo infinito conduzindo corrente estacionária I .

2.5.1 Campo de um fio retilíneo carregando corrente

Vamos agora calcular novamente o campo magnético produzido por um fio infinito (ou muito longo) carregando uma corrente estacionária I , usando a lei de Biot-Savart. Consideremos um ponto P localizado a uma distância ρ de um fio paralelo ao eixo z (figura 2.2). A distância entre o ponto P e um elemento de circuito $d\vec{l}$ a uma distância z da origem será designada por r . Podemos escrever que esse elemento produz o campo $d\vec{B}$ em P :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}.$$

Sabendo que $d\vec{l} = dz \vec{k}$, $\vec{r} = \rho \hat{\rho} - z \vec{k}$, $\hat{\rho} = \cos \phi \vec{i} + \text{sen} \phi \vec{j}$ e $r = \sqrt{z^2 + \rho^2}$,

$$d\vec{l} \times \vec{r} = \rho dz \cos \phi \vec{j} - \rho dz \text{sen} \phi \vec{i} = \rho dz \hat{\phi}.$$

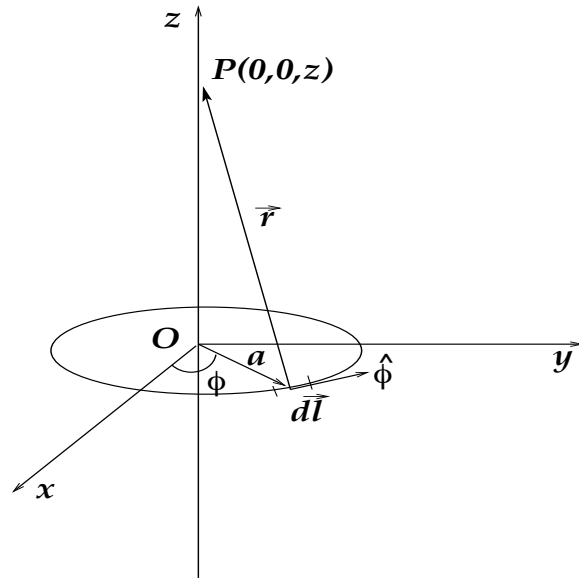
Assim, $\vec{B}(\rho) = B(\rho) \hat{\phi}$, e o módulo do campo será

$$B(\rho) = \int dB = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\rho dz}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} = -\frac{2\mu_0 I}{4\pi \rho} \int_{\pi/2}^0 \text{sen} \theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho}.$$

em que resolvemos a integral fazendo a seguinte mudança de variável: $z = \rho \cot \theta \Rightarrow dz = -(\rho / \text{sen}^2 \theta) d\theta$, lembrando que há uma simetria em torno de $z = 0$, e que $z = 0 \rightarrow \theta = \pi/2$ e $z = \infty \rightarrow \theta = 0$.

2.5.2 Campo de uma espira circular no eixo

Consideremos uma espira circular de raio a , percorrida por uma corrente i . Queremos calcular \vec{B} num ponto P no eixo da espira. Podemos localizar P através do vetor $\vec{z} = z \hat{k}$,

Figura 2.3: Espira circular de raio a .

que pode ser escrito em termos dos vetores $\vec{a} = a \hat{\rho}$ e \vec{r} , como $\vec{z} = \vec{a} + \vec{r}$, o que juntamente com o elemento de espira direcionado $d\vec{l} = a d\phi \hat{\phi}$ permite escrever

$$d\vec{l} \times \vec{r} = a d\phi \hat{\phi} \times (z \hat{k} - a \hat{\rho}) = a z d\phi \hat{\phi} + a^2 d\phi \hat{k},$$

logo,

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \left[\frac{a z d\phi}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\rho} + \frac{a^2 d\phi}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k} \right],$$

mas $\hat{\rho} = \cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j}$, logo

$$\vec{B}(z) = \int d\vec{B} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 i}{4\pi} \left[\frac{a z}{(a^2 + z^2)^{3/2}} (\cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j}) + \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k} \right] d\phi.$$

As duas primeiras integrais são claramente nulas, o que também poderia ser visto pela simetria do problema. O resultado então para o campo fica

$$\vec{B}(z) = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} d\phi \hat{k} = \frac{\mu_0 i a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k}.$$

Esse resultado nos diz que no centro da espira o campo vale

$$\vec{B}(0) = \frac{\mu_0 i}{2a} \hat{k},$$

e para $z \gg a$ teremos

$$\vec{B}(z) \approx \frac{\mu_0 i a^2}{2 z^3} \hat{k} = \frac{\mu_0 i}{2\pi z^3} \vec{S} = \frac{\mu_0}{2\pi z^3} \vec{m},$$

em termos do momento de dipolo magnético \vec{m} .

2.6 Força magnética entre correntes

Qual a força magnética entre dois fios retilíneos paralelos carregando correntes estacionárias I_1 e I_2 , respectivamente? Vamos supor que os dois fios estão a uma distância ρ um do outro, paralelos ao eixo z . O campo magnético que o primeiro fio produz na posição do segundo fio é

$$\vec{B}_1(\rho) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\rho} \hat{\phi},$$

logo a força que o fio 1 exercerá no fio 2 carregando corrente I_2 será

$$d\vec{F}_{2(1)} = I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1 = I_2 dl_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\rho} \hat{z} \times \hat{\phi} = -I_2 dl_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\rho} \hat{\rho},$$

podemos então escrever

$$\frac{\vec{F}_{2(1)}}{dl_2} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi\rho} \hat{\rho} = -\frac{\vec{F}_{1(2)}}{dl_1},$$

que é a força por unidade de comprimento exercida pela corrente I_1 sobre a corrente I_2 .

Observamos que essa força é linearmente proporcional as correntes dos fios e inversamente proporcional à distância entre eles e que fios com correntes paralelas se atraem e com correntes anti-paralelas se repelem.

Capítulo 3

Tratamento relativístico de campos elétricos e magnéticos

Conteúdo

3.1	Invariância da carga elétrica	21
3.2	Dois pontos de vista de um problema eletromagnético	23
3.3	Transformações de cargas e correntes	25
3.4	Campo elétrico em diferentes referenciais	26
3.4.1	Campo elétrico de uma carga puntiforme movendo-se com velocidade constante	29
3.5	Como transformam-se os campos?	32

3.1 Invariância da carga elétrica

A relatividade restrita, que estudamos em Física II, foi desenvolvida porque o eletromagnetismo não era invariante por transformações de Galileu. Agora que estudamos os campos \vec{E} e \vec{B} (estáticos) e suas fontes, podemos nos perguntar como esses campos se transformam por mudanças de referencial inercial.

Ao apresentarmos a força de Lorentz e definirmos \vec{B} , dissemos que a força magnética sobre uma carga é proporcional à sua velocidade. Mas que velocidade é essa? Isso não depende de referencial? Existiria algum referencial privilegiado para essa definição?

Segundo o *Princípio da Relatividade*, um referencial inercial qualquer deve ser equivalente a qualquer outro. Vejamos como nosso conhecimento de relatividade nos permite analisar o que ocorre com forças magnéticas ao mudarmos de referencial. Vamos analisar o que ocorre com uma carga negativa que se desloca com velocidade \vec{v} paralela a um fio conduzindo corrente (estacionária). Tentaremos descrever essa situação num referencial S (Fig.3.1), fixo em relação ao fio, e em S' (Fig.3.2), em que a partícula se encontra em repouso.

Suponha que o condutor seja um fio de cobre, em que os portadores de corrente são elétrons. No referencial S , há uma força magnética sobre a partícula, dirigida para o eixo do fio. Por simplicidade, vamos considerar a velocidade de migração dos elétrons igual à

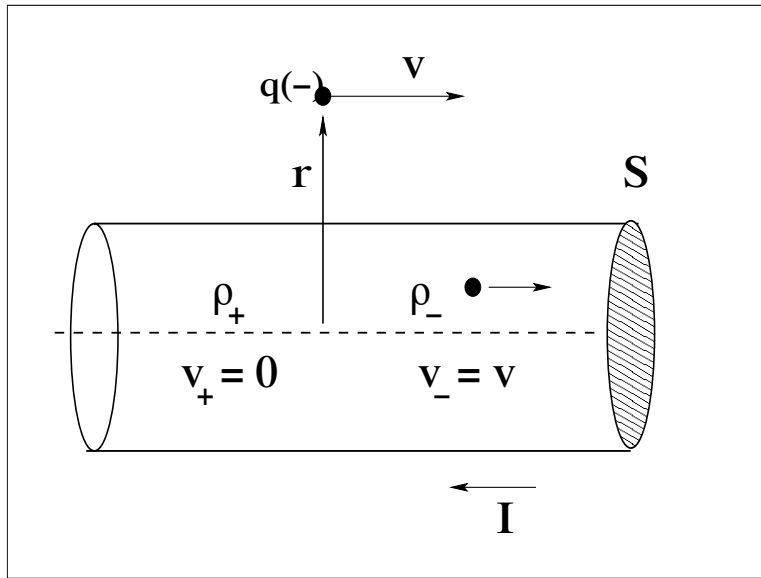


Figura 3.1: Fio carregando corrente e partícula de carga q vistos do referencial S .

velocidade da partícula. Como o fio é neutro, temos que a densidade de cargas positivas (em repouso) é igual à densidade de cargas negativas. O campo elétrico gerado pelo fio é portanto nulo. Logo,

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}.$$

Se a distância ao fio é r , \vec{B} na posição da partícula aponta para dentro da página e tem magnitude $\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ (fio infinito). Assim

$$\vec{F} = \frac{\mu_0 I q v}{2\pi r} \hat{r};$$

Lembrando que $\vec{j} = \rho \vec{v}$ e considerando um fio de seção reta A constante, podemos escrever

$$\vec{F} = -\frac{\mu_0 q \rho_- A v^2}{2\pi r} \hat{r};$$

lembramos que $I = \int \vec{j} \cdot d\vec{A} = jA$.

Vejamos agora o que acontece em S' , em que a partícula está em repouso e o fio se move. As cargas positivas em movimento geram um campo magnético \vec{B}' na posição da partícula. No entanto, como a partícula agora está *em repouso*, não existe força magnética. Se há força, ela precisa ser elétrica. Mas para isso o fio precisa parecer *carregado*. Não é difícil entender que a densidade de carga varie de um referencial para outro, pois ela depende do *volume*, que varia entre os dois referenciais.

Antes disso, precisamos saber o que acontece com a *carga*: a carga varia de um referencial a outro? Não: a carga é um escalar invariante. Há vários argumentos para explicar esse resultado (neutralidade de átomos de H e He). Bloco de material condutor neutro

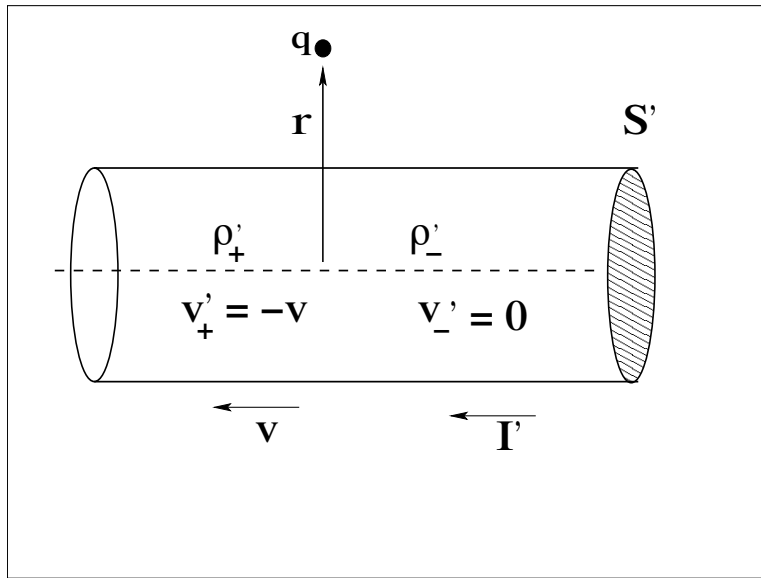


Figura 3.2: Fio carregando corrente e partícula de carga q vistos do referencial S' .

fica carregado ao ser aquecido (prótons e elétrons têm massas muito diferentes logo velocidades diferentes)? Se a carga dependesse de v , o bloco ficaria carregado. Esse efeito não é observado (a não ser que haja emissão termo-iônica).

Se a carga é invariante, a única variação de ρ se deve à variação de volume.

3.2 Dois pontos de vista de um problema eletromagnético

Consideremos um fio de seção A se movendo na direção do eixo. No referencial em que as cargas são estacionárias, um comprimento L_0 de fio contém carga $Q = \rho_0 L_0 A$. A mesma carga no referencial em movimento será dada por $Q = \rho L A$ (A não varia pois a seção é perpendicular ao movimento). A relação entre L e L_0 é dada pela contração de Lorentz (veja Figs. 3.3 e 3.4)

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = L_0 \sqrt{1 - \beta^2},$$

o que implica que

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Esse resultado permite relacionar a densidade de cargas positiva em S , ρ_+ , com ρ'_+ em S'

$$\rho'_+ = \frac{\rho_+}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Por outro lado, as cargas negativas estão em repouso em S' , logo

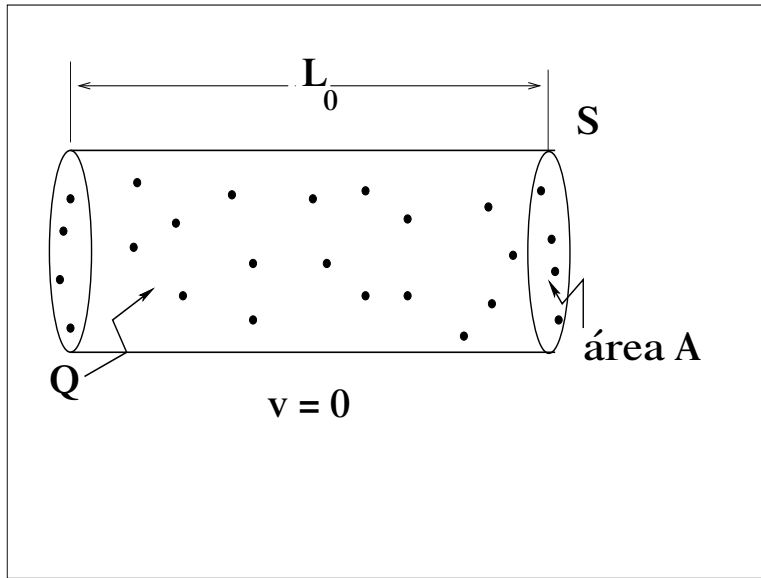


Figura 3.3: Distribuição de partículas carregadas em repouso com densidade de carga ρ_0 no referencial S .

$$\rho'_- = \rho_- \sqrt{1 - \beta^2},$$

assim,

$$\rho' = \frac{\rho_+}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \rho_- \sqrt{1 - \beta^2} = \rho_+ \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \sqrt{1 - \beta^2} \right],$$

uma vez que $\rho_- = -\rho_+$, pois o fio é neutro em S . Assim temos

$$\rho' = \rho_+ \frac{\beta^2}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

ou seja, o fio em S' é carregado positivamente, produzindo campo \vec{E}' na posição da partícula.

$$\vec{E}' = \frac{\rho' A}{2\pi \epsilon_0 r} \hat{r} = \frac{\rho_+ A \beta^2}{2\pi \epsilon_0 r \sqrt{1 - \beta^2}} \hat{r}.$$

A força sobre a partícula é na direção do fio:

$$\vec{F}' = \frac{q}{2\pi \epsilon_0} \frac{\rho_+ A}{r} \frac{\beta^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \hat{r} \quad (q < 0).$$

Mas

$$\vec{F} = -\frac{q \mu_0}{2\pi} \frac{\rho_- A v^2}{r} \hat{r} = \frac{q}{2\pi \epsilon_0} \frac{\rho_+ A}{r} \beta^2 \hat{r},$$

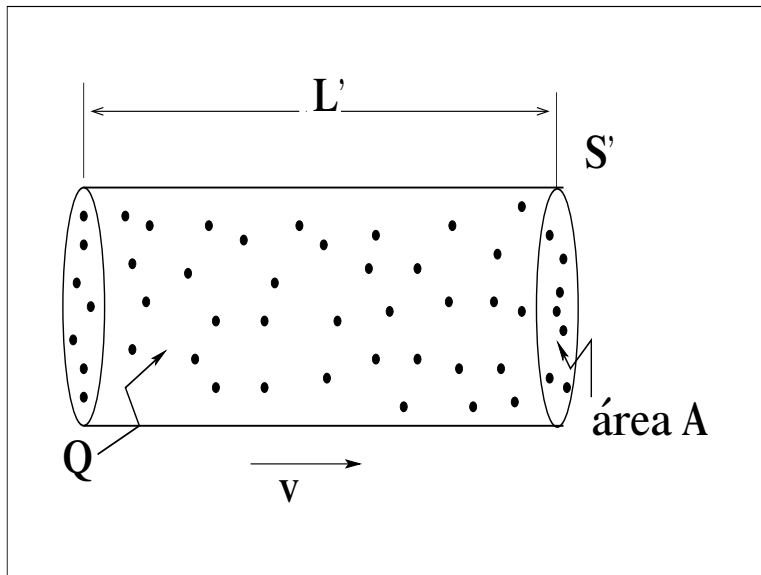


Figura 3.4: Distribuição de partículas carregadas em movimento com densidade de carga $\rho = \rho_0/\sqrt{1 - \beta^2}$ no referencial S' .

onde usamos o fato que $c^2 = \frac{1}{\mu_0\epsilon_0}$, que veremos ao final do semestre. Observe que a força que aparece, tanto em um referencial como no outro, depende de β^2 , logo no seu cálculo é imprescindível usar as transformações de Lorentz na mudança de referencial. Deste modo vemos que

$$\vec{F}' = \frac{\vec{F}}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

que é exatamente a transformação da força entre os referenciais, pois $p'_{\perp} = p_{\perp}$, $dt' = \sqrt{1 - \beta^2}dt$. Ou seja,

$$\vec{F}' = \frac{d\vec{p}'_{\perp}}{dt'} = \gamma \frac{d\vec{p}_{\perp}}{dt} = \frac{\vec{F}}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Vimos que obtemos o mesmo resultado físico nos dois referenciais. No referencial em que a partícula está em movimento temos apenas a força magnética, no referencial em que ela está em repouso temos apenas a força elétrica. Percebemos que há uma ligação entre \vec{E} e \vec{B} .

3.3 Transformações de cargas e correntes

Nossa dedução foi feita supondo que a carga se movia com a mesma velocidade dos elétrons de condução. Podemos obter uma condição mais geral para a transformação de ρ e \vec{j} se percebermos que eles formam as componentes de um *quadrivetor*.

Em Física II, mencionamos a existência de um invariante dado por

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2,$$

e dissemos que isso podia ser considerado a norma de um quadrivetor de componente (ct, x, y, z) ou (ct, \vec{x}) . Do mesmo modo, sabemos que

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4,$$

também é um invariante. Podemos de forma análoga definir um quadrivetor de componente $(E/c, \vec{p})$, lembrando que

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

mas, se ρ_0 é a densidade de cargas no referencial de repouso, vimos que, num referencial em que elas se movem com velocidade v ,

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \text{e} \quad \vec{j} = \rho \vec{v} = \frac{\rho_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Como ρ e \vec{j} dependem de \vec{v} da mesma forma que E e \vec{p} , eles também devem formar um quadrivetor, $(\rho c, \vec{j})$. Sabemos, portanto, que eles devem se transformar como t e (x, y, z) .

Seja S' um sistema de referência que se move com velocidade $u\hat{x}$ em relação a S , como $t = t' = 0$ para $O' = O = 0$. As transformações de Lorentz entre esse dois sistemas são

$$x' = \gamma(x - ut) \quad j'_x = \gamma(j_x - u\rho) \quad (3.1)$$

$$y' = y \quad j'_y = j_y \quad (3.2)$$

$$z' = z \quad j'_z = j_z \quad (3.3)$$

$$t' = \gamma(t - ux/c^2) \quad \rho' = \gamma(\rho - uj_x/c^2) \quad (3.4)$$

onde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}},$$

Essas equações permitem relacionar ρ e \vec{j} com ρ' e \vec{j}' . Com as equações de Maxwell, podemos achar \vec{E} e \vec{B} em qualquer referencial. Como ρ e \vec{j} são as fontes de \vec{B} e \vec{E} , vemos claramente que esses campos não podem ser de naturezas diferentes. Se temos apenas \vec{E} em um referencial esperamos encontrar \vec{E}' e \vec{B}' em outro referencial! Se temos apenas \vec{B} em um referencial esperamos encontrar \vec{E}' e \vec{B}' em outro referencial!

3.4 Campo elétrico em diferentes referenciais

Se a carga é invariante, o campo \vec{E} deve se transformar de modo bem determinado. A lei de Gauss nos dois referenciais dá a carga, que é invariante, logo

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \oint \vec{E}' \cdot \hat{n}' dA'.$$

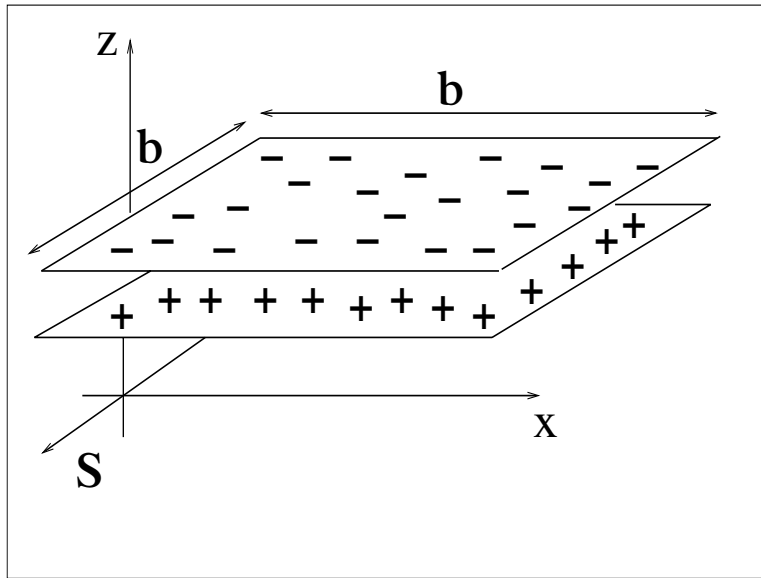


Figura 3.5: Duas placas estacionárias com densidade de cargas uniforme.

Consideremos duas placas planas paralelas infinitas uniformemente carregadas, com densidade superficial σ e $-\sigma$, respectivamente, em repouso em S , veja Figs. 3.5 e 3.6. O campo entre as placas é

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} .$$

Suponha que as placas sejam perpendiculares ao eixo z , logo $\vec{E} = E_z \hat{z}$. Se as placas têm lado b (próximo a infinito, muito maior que a separação) no referencial S' , que se move com velocidade $\vec{v} = v \hat{x}$ em relação a S , uma das dimensões agora é $b' = b\sqrt{1 - \beta^2}$, onde $\beta = v/c$, veja Fig. 3.7. Portanto $\sigma' > \sigma$:

$$\sigma' = \gamma \sigma .$$

Aplicando a lei de Gauss em S' , vemos que (Fig. 3.8)

$$E'_z = \gamma E_z .$$

Suponhamos agora que as placas são perpendiculares ao eixo x de acordo com a Fig. 3.9. Nesse caso só há contração da distância entre as placas. Mas E_x não depende dessa distância e $\sigma' = \sigma \Rightarrow E'_x = E_x$.

Esse foi um arranjo muito particular. E as conclusões que tiramos, são mais gerais? Sim: se \vec{E} num ponto do espaço-tempo deve ter significado físico único, a form como \vec{E} aparece em outros referenciais não pode depender da natureza das fontes. Medidas de \vec{E} na vizinhança de um ponto em qualquer t devem ser suficientes para prever \vec{E}' em outros referenciais. Assim para cargas estacionárias em S em S' as componentes do campo se transformam como

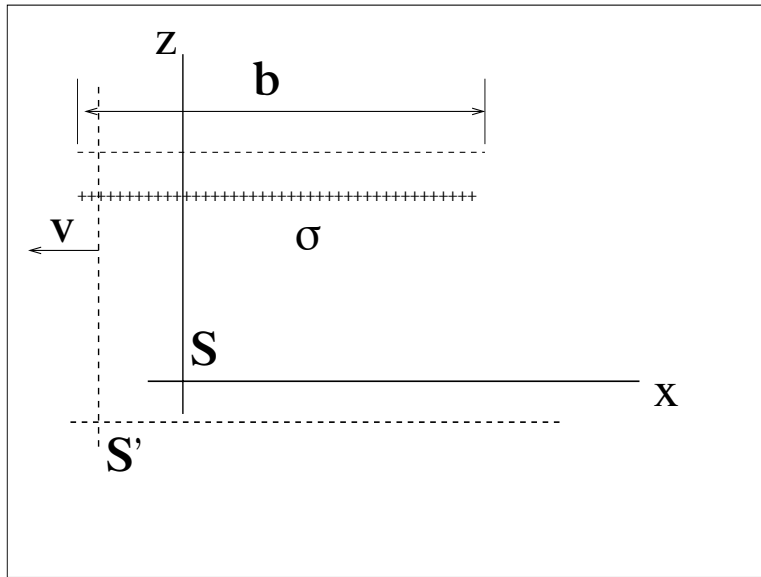


Figura 3.6: Seção transversal do sistema visto no referencial S .

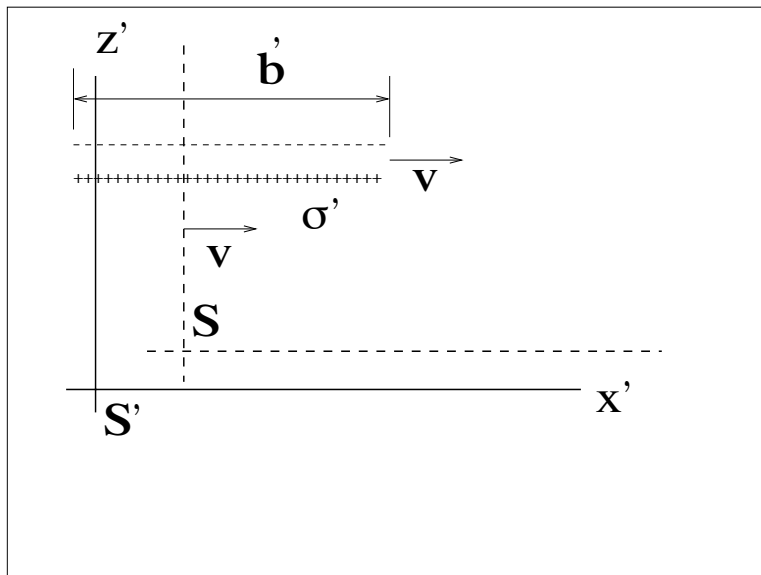


Figura 3.7: Seção transversal do sistema visto no referencial S' . Aqui $b' = b\sqrt{1 - \beta^2}$.

$$E'_{\parallel} = E_{\parallel} \quad (3.5)$$

$$E'_{\perp} = \gamma E_{\perp}. \quad (3.6)$$

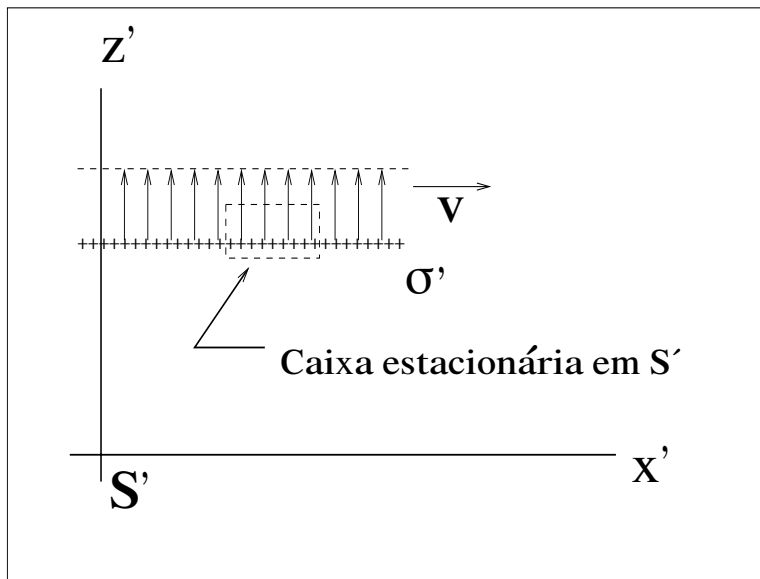


Figura 3.8: Campo entre as placas em \$S'\$.

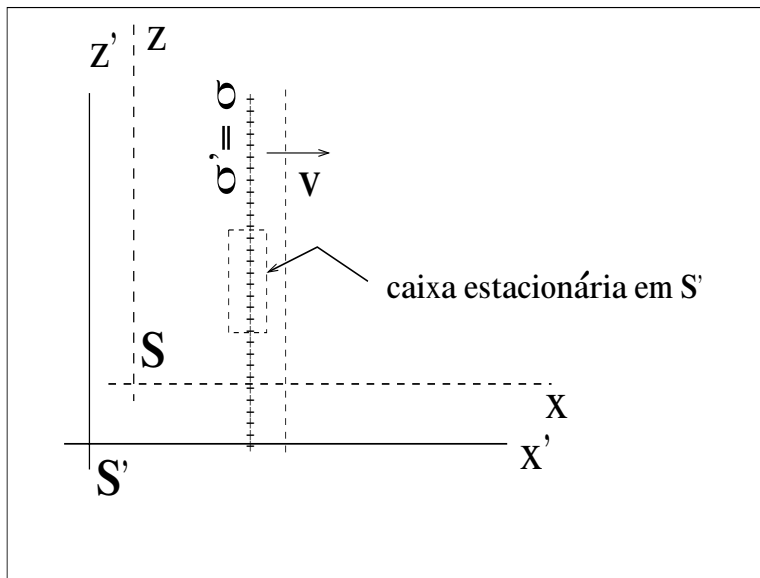


Figura 3.9: Campo elétrico no referencial \$S\$, com a velocidade relativa na direção do campo.

3.4.1 Campo elétrico de uma carga puntiforme movendo-se com velocidade constante

Suponha um referencial \$S\$, no qual uma carga puntiforme \$Q\$ permanece em repouso na origem, como mostra a Fig. 3.10. As componentes de \$\vec{E}\$ no plano \$xz\$ são:

$$E_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + z^2)^{3/2}},$$

e

$$E_y = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \text{sen } \theta = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(x^2 + z^2)^{3/2}}.$$

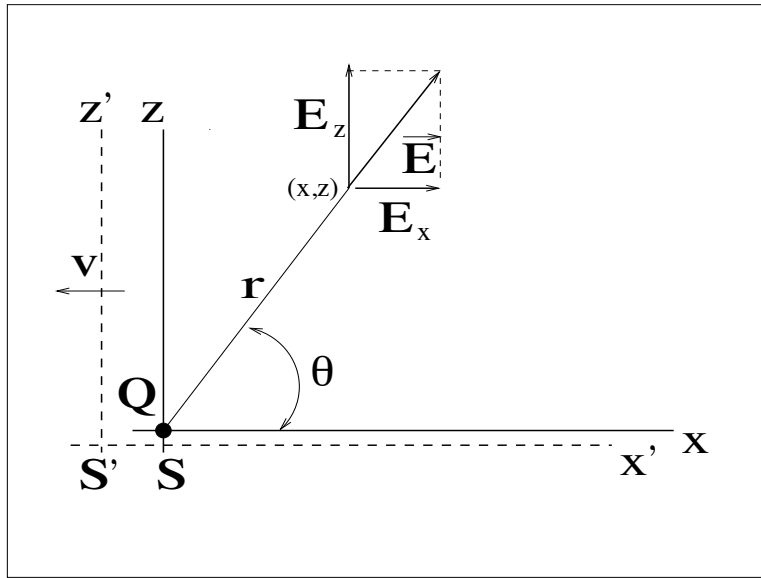


Figura 3.10: Campo elétrico de uma carga pontiforme no referencial S no qual a carga está em repouso.

Suponha agora que haja um referencial S' que se move com velocidade $\vec{v} = -v\hat{x}$ relativamente ao referencial S , segundo a Fig. 3.11. As transformações de Lorentz entre as coordenadas dos referenciais S e S' são:

$$x = \gamma(x' - vt'), \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \gamma(t' - \frac{\beta}{c}x').$$

onde $\beta = v/c$. Os referenciais S e S' têm origens coincidentes em $t = t' = 0$.

Pelas transformações do campo no instante $t' = 0$ podemos escrever

$$E'_x = E_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma x'}{((\gamma x')^2 + z^2)^{3/2}},$$

$$E'_z = \gamma E_z = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma z'}{((\gamma x')^2 + z^2)^{3/2}},$$

de onde vemos que

$$\frac{E'_x}{E'_z} = \frac{x'}{z'},$$

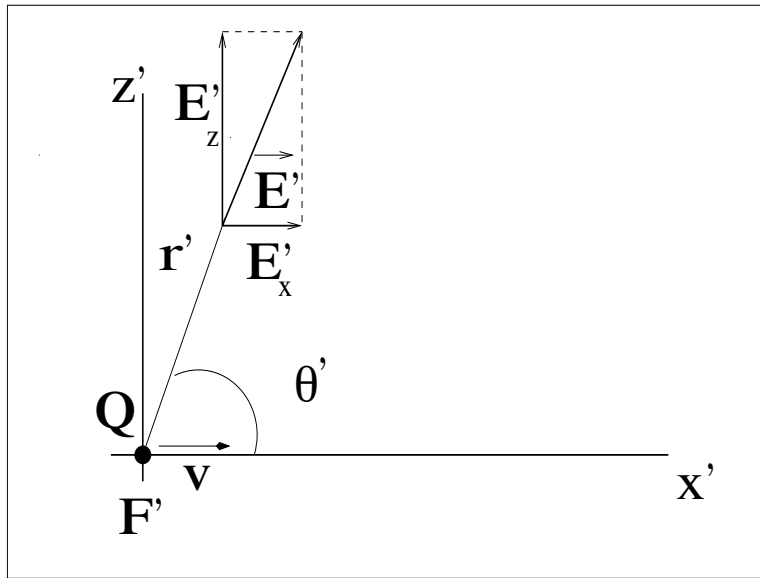


Figura 3.11: Campo elétrico de uma carga pontiforme no referencial S' no qual a carga está em movimento uniforme.

ou seja, o vetor \vec{E}' faz o mesmo ângulo com o eixo x' que \vec{r}' , logo \vec{E}' aponta radialmente para fora ao longo da linha que liga o ponto à posição instantânea de Q .

O que significa isso? Transmissão instantânea de informação? Não, a informação era disponível há muito tempo, foi a história do passado da partícula que determinou \vec{E} observado.

Podemos calcular a intensidade de \vec{E}' :

$$E'^2 = E_x'^2 + E_y'^2 = \frac{Q^2 \gamma^2}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{(x'^2 + z'^2)}{[(\gamma x')^2 + z'^2]^3} = \frac{Q^2}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{(1 - \beta^2)^2}{(x'^2 + z'^2)^2 \left[1 - \frac{\beta^2 z'^2}{x'^2 + z'^2}\right]^3},$$

e tomando θ' como o ângulo entre \vec{r}' e \vec{v} (Fig.3.11), $z' = r' \sin \theta'$, com $r'^2 = x'^2 + z'^2$, podemos finalmente escrever

$$E' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r'^2} \frac{(1 - \beta^2)}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta')^{3/2}}.$$

Vemos que o campo elétrico produzido por uma carga em movimento uniforme, num determinado instante, é orientado radialmente da posição instantânea da carga. Sua intensidade é dada por E' , onde θ' é o ângulo entre a direção do movimento da carga e o raio vetor que vai da posição instantânea da carga ao ponto de observação. Note que para uma partícula de baixa velocidade, $\beta \ll 1$,

$$E' \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r'^2},$$

e que para uma partícula altamente relativística $\beta \rightarrow 1$, E' torna-se mais intenso nas direções perpendiculares ao movimento.

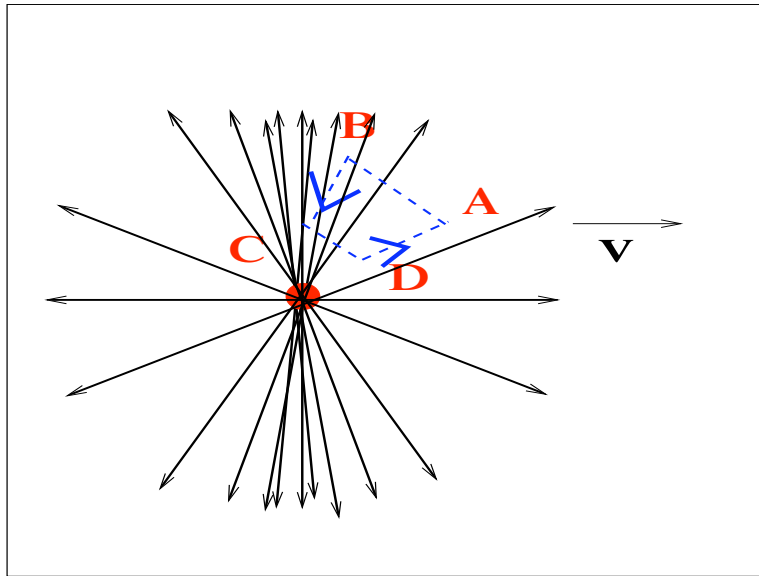


Figura 3.12: Representação das linhas de campo de uma carga em movimento.

O campo assim criado não é esféricamente simétrico! Há uma direção preferida: a direção de movimento de Q . Esse campo não pode ser produzido por nenhuma distribuição estacionária de carga, pois como podemos observar com o auxílio da Fig.3.12,

$$\oint \vec{E}' \cdot d\vec{l}' \neq 0, \quad (3.7)$$

a circulação no percurso $ABCD$ não é nula! Os arcos circulares não contribuem para a Eq. (3.7), pois o campo é perpendicular ao percurso nesses trechos, apenas os trechos CB e DA fornecem contribuições não nulas, mas com intensidades diferentes. Esse campo não é um campo eletrostático!

3.5 Como transformam-se os campos?

Uma camada de carga superficial, movendo-se paralelamente a si mesma, constitui uma corrente superficial. Suponha uma superfície infinita com densidade de carga uniforme σ , deslizando com velocidade v . Logo sua densidade superficial de corrente será

$$\mathcal{J} = \sigma v.$$

Suponha agora uma segunda camada plana infinita de carga superficial com densidade uniforme $-\sigma$, movendo-se paralela a primeira no plano xz , segundo a Fig. 3.13. Usando a lei de Gauss obtemos o campo elétrico entre as placas

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{y}.$$

Suponha que as cargas estejam se movendo no sentido de x positivo, $\vec{v}_0 = v_0 \hat{x}$, assim as densidades superficiais de cada uma será, respectivamente,

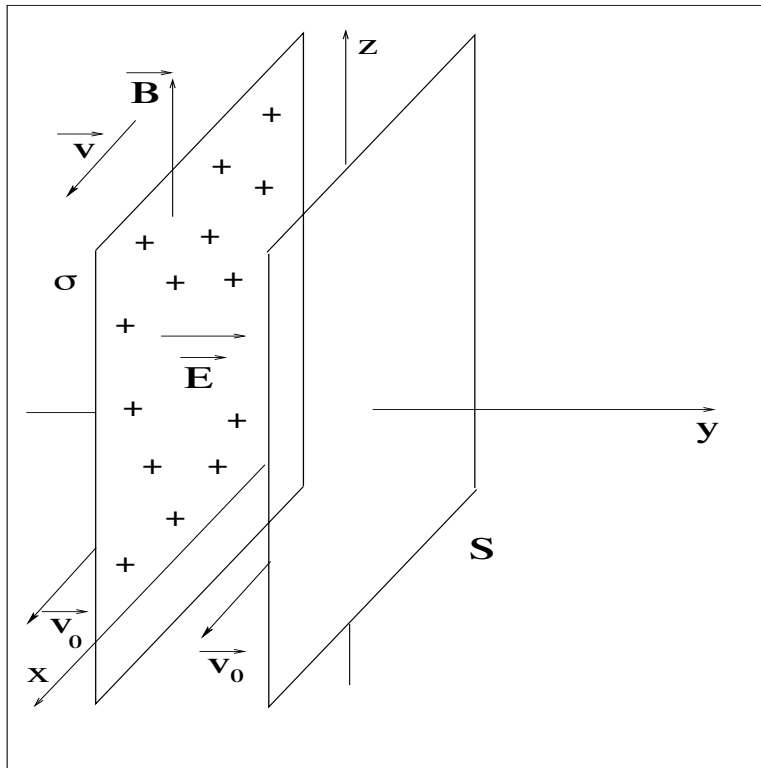


Figura 3.13: Placas carregadas em movimento vistas por um observador em S .

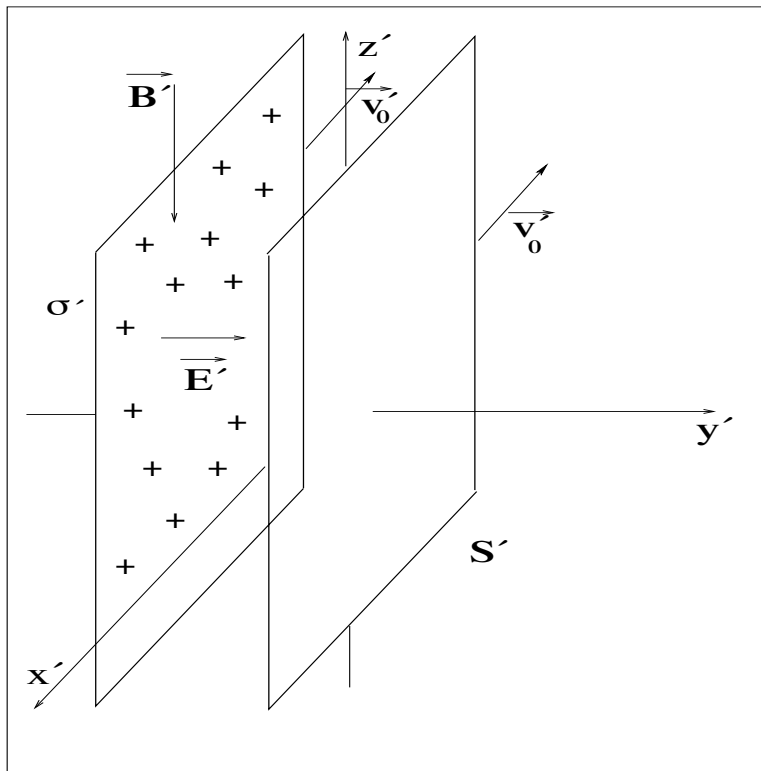


Figura 3.14: Placas carregadas em movimento vistas por um observador em S' .

$$\mathcal{J}_x^+ = \sigma v_0 \quad \text{e} \quad \mathcal{J}_x^- = -\sigma v_0 ,$$

de forma que podemos imediatamente concluir que as componentes A_y e A_z do potencial vetor associado ao campo magnético produzido pelas cargas em movimento são nulas, restando apenas a componente A_x que por simetria só pode ser uma função de y . Assim as componentes do campo magnético

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0 \quad (3.8)$$

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0 \quad (3.9)$$

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = -\frac{\partial A_x}{\partial y} \quad (3.10)$$

Por analogia com

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Rightarrow V = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} y ,$$

e lembrando de fazer a substituição $\sigma/\epsilon_0 \rightarrow \mu_0 \mathcal{J}_x$ e identificarmos A_x com V obtemos,

$$A_x = -\mu_0 \mathcal{J}_x y ,$$

$$\therefore B_z = \mu_0 \mathcal{J}_x = \mu_0 \sigma v_0 ,$$

que é a única componente não nula do campo magnético produzido.

Como o referencial S' move-se em relação a S com velocidade v , $\vec{v} = v\hat{x}$, que campos serão medidos por um observador em S' ? Usando as transformações das densidades de cargas e correntes entre dois referenciais inerciais teremos (veja Eqs.3.4):

$$\sigma' = \gamma \left(\sigma - \frac{\beta}{c} \sigma v_0 \right) = \gamma \sigma \left(1 - \frac{v v_0}{c^2} \right) \quad (3.11)$$

$$\mathcal{J}'_x = \gamma (\sigma v_0 - v \sigma) = \gamma \sigma (v_0 - v) \quad (3.12)$$

$$\mathcal{J}'_y = \mathcal{J}_y = 0 \quad (3.13)$$

$$\mathcal{J}'_z = \mathcal{J}_z = 0 \quad (3.14)$$

Como as leis da física devem ser as mesmas em qualquer referencial inercial, então

$$E'_y = \frac{\sigma'}{\epsilon_0} = \gamma \left[\frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\sigma v v_0}{\epsilon_0 c^2} \right] = \gamma \left[E_y - \frac{\mu_0 \epsilon_0}{\epsilon_0} \sigma v_0 v \right] = \gamma [E_y - \mu_0 \sigma v_0 v] = \gamma [E_y - v B_z] ,$$

onde usamos que $c^2 \equiv 1/(\mu_0 \epsilon_0)$, e

$$B'_z = \mu_0 \mathcal{J}'_x = \mu_0 \gamma \sigma (v_0 - v) = \gamma (\mu_0 \sigma v_0 - \mu_0 \sigma v) = \gamma \left(B_z - \frac{\sigma}{\epsilon_0 c^2} v \right) = \gamma \left(B_z - E_y \frac{v}{c^2} \right),$$

$$\therefore E'_y = \gamma (E_y - c\beta B_z) \quad B'_z = \gamma \left(B_z - \frac{\beta}{c} E_y \right).$$

Caso os planos tivessem sido orientados paralelamente ao plano xz , teríamos obtido relações entre E'_z e E_z e B_y , e entre B'_y e E_z e B_y . Essas relações seriam análogas as expressões acima, com uma pequena mudança de sinal (verifique!) resultante das regras do sentido do \vec{B} .

Resta então saber como variam as componentes dos campos no sentido do movimento. Já vimos que $E'_x = E_x$. Para discutirmos o que acontece com a componente longitudinal de \vec{B} , B_x , vamos imaginar que essa componente seja produzida por um solenóide ao redor do eixo x . No referencial S

$$B_x = \mu_0 n I,$$

onde I é a corrente estacionária do solenóide e n é o número de espiras por unidade de comprimento.

Em S' o solenóide sofre contração de Lorentz de forma que o número de espiras por unidade de comprimento $n' > n$. Mas I' será reduzida pois do ponto de vista de um observador em repouso em S' , um observador em S estaria usando um relógio mais vagaroso. Logo a dilatação do tempo e a contração do comprimento se compensam de forma que

$$B'_x = B_x.$$

As propriedades de transformação dos campos são propriedades locais. Os valores de \vec{E} e \vec{B} num ponto qualquer do espaço-tempo em um dado referencial, devem determinar, sem nenhuma ambigüidade, as componentes dos campos observados em qualquer outro referencial no mesmo ponto do espaço-tempo. O fato de termos usado um tipo particular de fontes não compromete a generalidade do resultado que obtivemos.

Assim podemos concluir que as componentes dos campos \vec{E} e \vec{B} se transformam entre S e S' como

$$E'_x = E_x \quad E'_y = \gamma(E_y - \beta B_z) \quad E'_z = \gamma(E_z + \beta B_y) \quad (3.15)$$

$$B'_x = B_x \quad B'_y = \gamma(B_y + \beta E_z) \quad B'_z = \gamma(B_z - \beta E_y) \quad (3.16)$$

Vemos que \vec{E} e \vec{B} se relacionam de forma extremamente simétrica. De fato são componentes de um único “ente”, o campo eletromagnético, que associa a cada ponto do espaço-tempo seis números, $E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$, e que como vocês verão mais tarde pode ser representado como um tensor de ordem dois.

Imagine que no referencial S , $\vec{B} = 0$. Nesse caso

$$E'_x = E_x \quad E'_y = \gamma E_y \quad E'_z = \gamma E_z B'_x = 0 \quad B'_y = \gamma \beta E_z \quad B'_z = -\gamma \beta E_y$$

de forma que

$$B'_x = 0, \quad B'_y = \beta E'_z, \quad B'_z = -\beta E'_y,$$

ou seja

$$\vec{B}' = \left(\frac{\vec{v}'}{c} \times \vec{E}' \right)$$

se $\vec{B} \equiv 0$ em todos os pontos de algum sistema de referência, com $\vec{v}' = -v\hat{x}$. Note que v' é a velocidade relativa ao sistema linha do sistema particular em que \vec{B} é nulo. Vimos um exemplo desse caso quando estudamos uma carga puntiforme no seu referencial de repouso, onde $\vec{B} \equiv 0$, e em um outro referencial onde ela aparece com velocidade constante.

Da mesma forma se no referencial S , $\vec{E} = 0$. Então

$$\vec{E}' = - \left(\frac{\vec{v}'}{c} \times \vec{B}' \right)$$

se $\vec{E} \equiv 0$ em todos os pontos de algum sistema de referência, com $\vec{v}' = -v\hat{x}$. Note que v' é a velocidade relativa ao sistema linha do sistema particular em que \vec{E} é nulo. Já vimos um exemplo desse caso também, quando estudamos um fio neutro infinito conduzindo corrente estacionária no seu referencial de repouso, onde $\vec{E} \equiv 0$, e em um outro referencial onde ele aparece com velocidade constante.

Freqüentemente não há referencial algum no qual $\vec{B} \equiv 0$ ou $\vec{E} \equiv 0$ em todos os pontos.

Referências

- [1] Curso de Física Básica, vol. III - H. Moysés Nussenzveig.
- [2] The Feynman Lectures on Physics, vol. II - R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. L. Sands.
- [3] Curso de Física de Berkeley, vol. II - eletricidade e magnetismo.