

# Mecânica Quântica II - 4300404

## 7ª lista

1) a) Prove o Teorema virial em três dimensões:

$$2\langle T \rangle = -\langle \vec{r} \cdot \vec{\nabla} V \rangle.$$

b) Use esse teorema para mostrar que nas autofunções do átomo de hidrogênio obtemos:

$$\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle_n = \frac{me^2}{4\pi\epsilon_0\hbar^2} \frac{1}{n^2}.$$

2) Usando o seguinte resultado para a correção relativística de primeira ordem:

$$E_r^1 = -\frac{1}{2mc^2} [E^2 - 2E\langle V \rangle + \langle V^2 \rangle]$$

mostre que essa correção, para o caso de um oscilador harmônico unidimensional, é dada por:

$$E_r^1 = -\frac{3}{32} \left( \frac{\hbar^2 \omega^2}{mc^2} \right) (2n^2 + 2n + 1)$$

3) Mostre as seguintes relações: a)  $[\vec{L} \cdot \vec{S}, \vec{L}] = i\hbar(\vec{L} \times \vec{S})$ , b)  $[\vec{L} \cdot \vec{S}, \vec{S}] = -i\hbar(\vec{L} \times \vec{S})$ , c)  $[\vec{L} \cdot \vec{S}, \vec{J}] = 0$ , d)  $[\vec{L} \cdot \vec{S}, L^2] = 0$ , e)  $[\vec{L} \cdot \vec{S}, S^2] = 0$  e d)  $[\vec{L} \cdot \vec{S}, J^2] = 0$ . Dica: lembre-se que  $[\vec{L}, \vec{S}] = 0$ .

4) Mostre que partindo da expressão geral para a correção de estrutura fina:

$$E_{sf}^1 = \frac{E_n^2}{mc^2(l+1/2)} \left[ -2n + \frac{3(l+1/2)}{2} + \frac{n}{l(l+1)} \left( j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right) \right]$$

e usando  $j = l - 1/2$  você também chega no resultado final

$$E_{sf}^1 = \frac{E_n^2}{2mc^2} \left( 3 - \frac{4n}{j+1/2} \right).$$

5) A linha mais característica do espectro de emissão do átomo de hidrogênio na região visível vem da transição:  $n = 3 \rightarrow n = 2$ .

a) Encontre, sem considerar as correções de estrutura fina, o comprimento de onda e a frequência dessa linha.

b) Calcule as correções de estrutura fina para as linhas com  $n = 2$  e  $n = 3$ . Essas linhas ficam mais ou menos ligadas devido a essas correções?

c) Devido à essas correções de estrutura fina a linha com  $n = 2$  se abre em duas e a com  $n = 3$  se abre em 3. Assim existem na realidade 6 transições possíveis entre essas duas linhas originais. Calcule essas seis diferenças de energias:  $\Delta E = E_3^1 - E_2^1$  em eV, e indique numa figura as várias transições possíveis.

6) Considere os oito estados com  $n = 2$  no átomo de hidrogênio:  $|2 l s j m_j\rangle$ . Encontre a energia de cada estado, para as separações causadas pelo efeito Zeeman fraco. Expresse cada

resposta como uma soma de três termos: a energia de Bohr, a estrutura fina (proporcional a  $\alpha^2$  e a contribuição Zeeman (proporcional a  $\mu_B B_{ext}$ ). Se voce ignorar a estrutura fina, quantos níveis distintos existem e qual a degenerescência?

7) Considere os oito estados com  $n = 2$  no átomo de hidrogênio:  $|2 l s m_l m_s\rangle$ . Encontre a energia de cada estado, para as separações causadas pelo efeito Zeeman forte. Expresse cada resposta como uma soma de três termos: a energia de Bohr, a estrutura fina (proporcional a  $\alpha^2$  e a contribuição Zeeman (proporcional a  $\mu_B B_{ext}$ ). Se voce ignorar a estrutura fina, quantos níveis distintos existem e qual a degenerescência?

8) Quando um átomo é colocado em um campo elétrico externo uniforme,  $\vec{E}_{ext}$ , os níveis de energia são alterados. Esse fenômeno é conhecido como efeito Stark, e é o análogo elétrico do efeito Zeeman. Considere o campo  $\vec{E}_{ext}$  apontando na direção  $z$ , de forma que a energia potencial do elétron é:

$$H'_S = eE_{ext}z = eE_{ext}r \cos \theta.$$

Trate isso como uma perturbação no hamiltoniano do átomo de hidrogênio (neste caso o spin é irrelevante, portanto ignore as correções de estrutura fina). Vamos então considerar o efeito Stark para os estados com  $n = 1$  e  $n = 2$ .

a) Mostre que a energia do estado fundamental não é alterada por essa perturbação em primeira ordem.

b) O primeiro estado excitado tem degenerescência 4:  $\psi_{200}, \psi_{211}, \psi_{210}, \psi_{21-1}$ . Usando teoria de perturbação degenerada, determine as correções de primeira ordem na energia nos estados com  $n = 2$ . Mostre que o nível  $E_2$  se divide em três.

c) Mostre que os novos auto-estados em ordem zero são:

$$\psi_{211}, \psi_{21-1}, \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{200} + \psi_{210}), \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{200} - \psi_{210})$$