

Mecânica Quântica I - 4300403

7^a lista

1) Sabendo que

$$L_{\pm} = \pm \hbar e^{\pm i\phi} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \pm i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right], \quad L_z = -i \hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \quad \text{e} \quad L_{\pm} |l \ m\rangle = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} |l \ m \pm 1\rangle,$$

mostre que as seguintes auto-funções normalizadas de L^2 e L_z são:

a) $|0 \ 0\rangle = Y_0^0(\theta, \phi) = 1/\sqrt{4\pi}$

b) $|1 \ \pm 1\rangle = Y_1^{\pm 1}(\theta, \phi) = \mp \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2} \sin \theta \ e^{\pm i\phi}$

c) $|1 \ 0\rangle = Y_1^0(\theta, \phi) = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2} \cos \theta$

2) A função de onda de uma partícula sujeita a um potencial esféricamente simétrico é

$$\psi(x, y, z) = (x + y + 3z)f(r).$$

a) $\psi(x, y, z)$ é auto-função de L^2 e de L_z ? Se sim, quais os auto-valores?

b) Essa função pode ser auto-função de H ?

3) Sabendo que os harmônicos esféricos são dados por:

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \epsilon \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} e^{im\phi} P_l^m(\cos \theta)$$

com $\epsilon = (-1)^m$ para $m \geq 0$ e $\epsilon = 1$ para $m < 0$, e

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^l}{2^l l!} (1-x^2)^{|m|/2} \frac{d^{l+|m|}}{dx^{l+|m|}} (1-x^2)^l$$

calcule Y_0^0 , $Y_1^{\pm 1}$ e Y_1^0 e compare com os resultados do exercício 1).

4) A partir da equação diferencial para os harmônicos esféricos:

$$\left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} + l(l+1) \right] Y_l^m(\theta, \phi) = 0$$

mostre as relações

a) $\int_0^\pi d\theta \sin \theta (Y_l^m)^* Y_{l'}^m = 0$ para $l \neq l'$

b) $\int_0^{2\pi} d\phi (Y_l^m)^* Y_l^{m'} = 0$ para $m \neq m'$

c) ou seja, mostre que se os harmônicos esféricos são normalizados, então

$$\int d\Omega (Y_l^m)^* Y_{l'}^{m'} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta (Y_l^m)^* Y_{l'}^{m'} = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

5) a) Certifique-se de que $u(r) = Arj_1(kr)$ satisfaz a equação radial para $V(r) = 0$:

$$u'' - \frac{l(l+1)}{r^2}u + k^2u = 0$$

quando $l = 1$.

b) Determine graficamente as energias permitidas para o poço esférico infinito quando $l = 1$. Mostre que para grandes valores de n , $E_{n1} \sim (\hbar^2\pi^2/2ma^2)(n + 1/2)^2$. Dica: mostre primeiro que se $j_1(z) = 0$ então $z = \text{tg } z$. Apresente z e $\text{tg } z$ no mesmo gráfico e determine os pontos de interseção .

6) Uma partícula de massa m é colocada num poço esférico finito:

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & \text{se } r \leq a \\ 0 & \text{se } r > a \end{cases} .$$

Calcule o estado fundamental resolvendo a equação radial com $l = 0$. Demonstre que não há nenhum estado ligado se $V_0a^2 < \pi^2\hbar^2/8m$.