

Física Moderna I

Aula 03

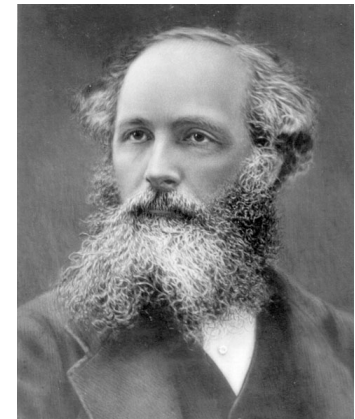
Marcelo G Munhoz
Pellettron, sala 245, ramal 6940
munhoz@if.usp.br

Energia média de cada onda estacionária

- Vamos utilizar uma abordagem estatística para obter a energia média de cada onda estacionária
- Essa abordagem é válida pois estamos tratando de um sistema (corpo negro) que possui uma temperatura (T) bem definida

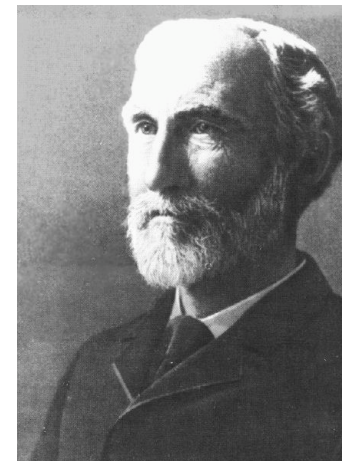
Abordagem estatística

- Em meados do século XIX, assumindo que um gás é formado por pequenas unidades (moléculas), Maxwell calculou a distribuição de velocidades dessas moléculas no estado de equilíbrio
- Em seguida, ele correlacionou essa distribuição com propriedades macroscópicas do gás, como temperatura e pressão



Abordagem estatística

- Boltzmann e Gibbs deram continuidade ao trabalho de Maxwell, estabelecendo as bases da interpretação microscópica para propriedades macroscópicas de sistemas físicos



Distribuição de Maxwell-Boltzmann

- Como se distribuem os constituintes de um sistema físico entre os vários valores de energia (ou outra grandeza) que eles podem assumir?
- Precisamos fazer algumas hipóteses:
 - Os constituintes são distinguíveis
 - O estado de equilíbrio é a forma mais provável de distribuir os constituintes entre os vários valores de energia possíveis mantendo o número de constituintes e energia total do sistema fixos
 - Existe apenas um constituinte por estado (baixa densidade)

Distribuição de Maxwell-Boltzmann

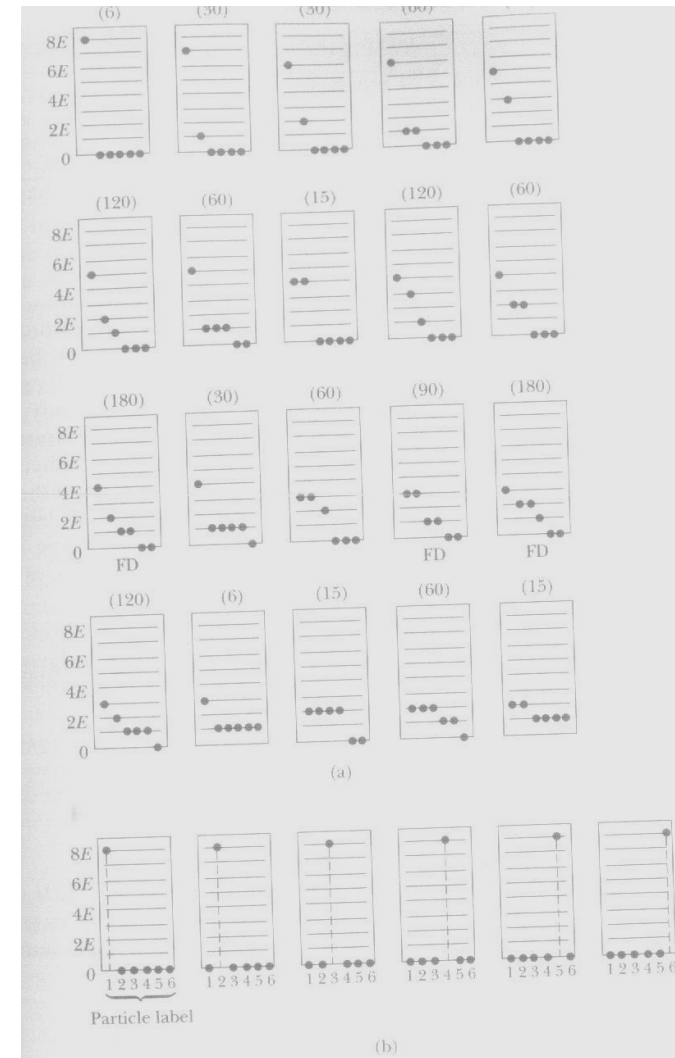
- Vamos tomar um exemplo concreto simplificado (Serway, Moses, Moyer, pag 336)
- Seja um sistema composto de 6 partículas constituintes, cuja energia total é $8E$ (E =unidade arbitrária de energia indivisível)
- Existem 20 configurações diferentes possíveis que permitem que essas 6 partículas tenham uma energia total de $8E$

Distribuição de Maxwell-Boltzmann

- Como as partículas são distinguíveis, cada configuração permite um certo número de “microestados” (m_j) que é dado por:

$$m_j = \frac{N!}{n_{1j}!n_{2j}!n_{3j}!...}$$

- onde n_{ij} ($i = 1, 2, 3, \dots$) é o número de partículas com energia E_i na configuração j

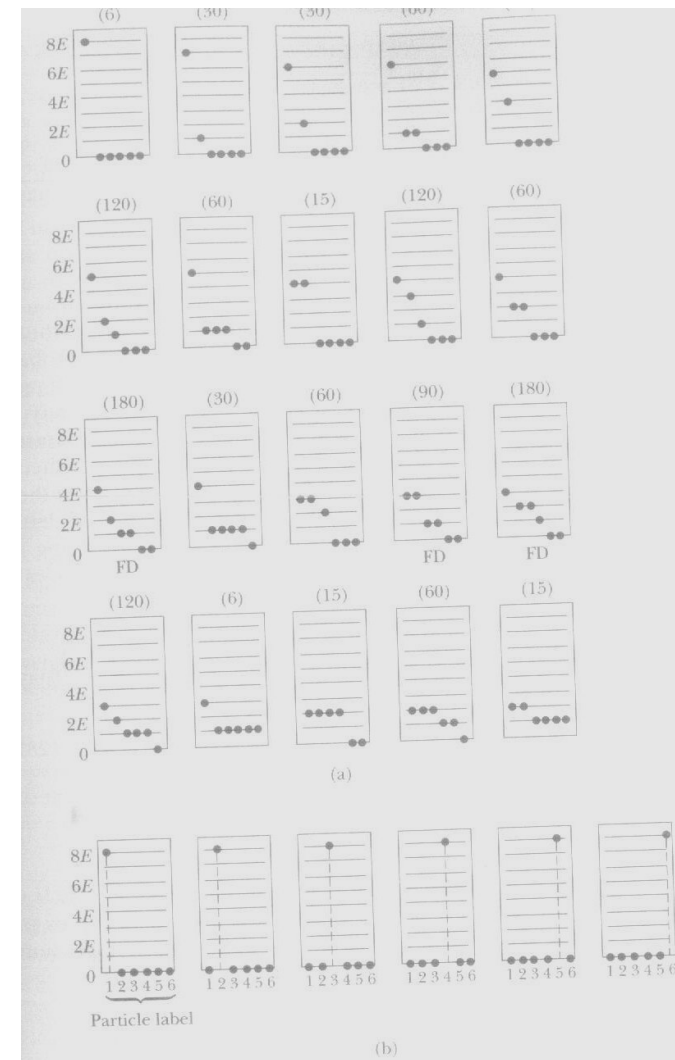


Distribuição de Maxwell-Boltzmann

- O número médio de partículas com uma dada energia E_i (n_i) é:

$$\langle n_i \rangle = \sum_{j=1}^{20} n_{ij} p_j$$

- onde n_{ij} é o número de partículas encontradas com energia E_i na configuração j e p_j é a probabilidade de se observar a configuração j (entre as 20 possíveis)

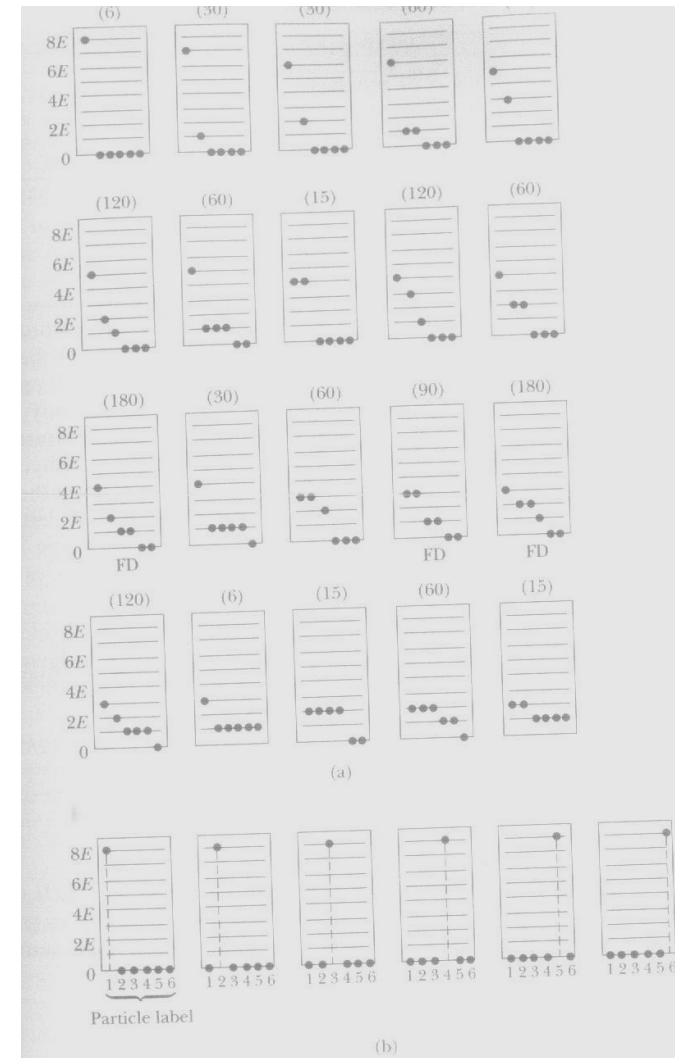


Distribuição de Maxwell-Boltzmann

- Usando o postulado básico da abordagem estatística de que **cada microestado é igualmente provável** de ocorrer, tem-se que:

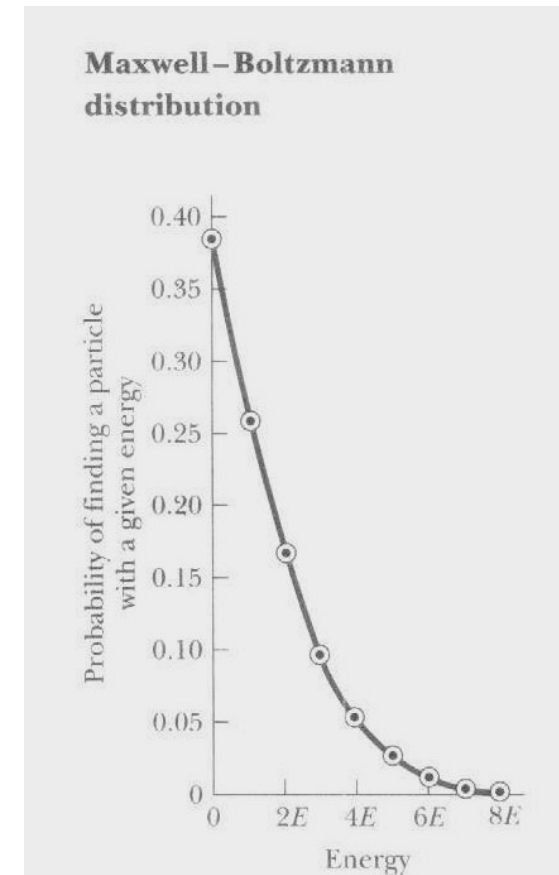
$$p_j = \frac{m_j}{N_{ME}}$$

- onde m_j é o número de microestados com a configuração j e N_{ME} é o número total de microestados possíveis



Distribuição de Maxwell-Boltzmann

- Calculando-se p_j e n_i para este exemplo simplificado obtém-se uma distribuição que pode ser descrita por uma função exponencial

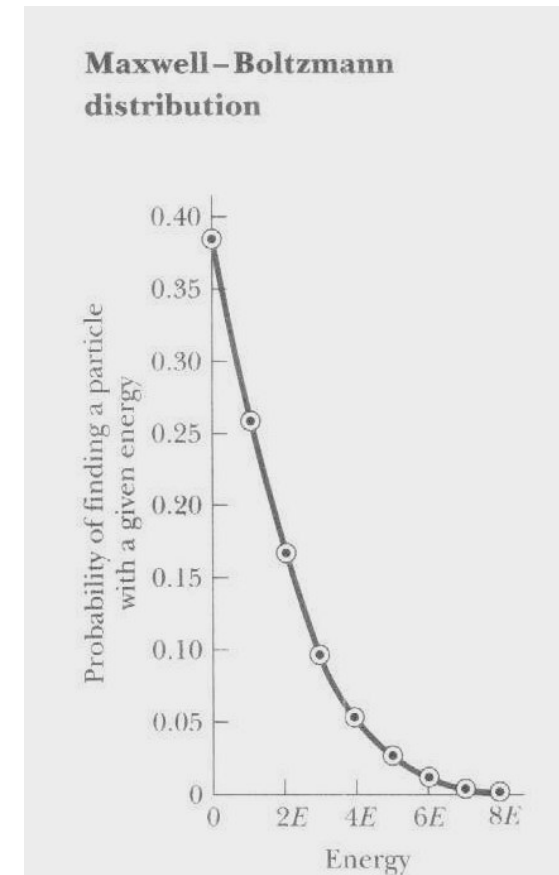


Distribuição de Maxwell-Boltzmann

- Isso pode ser generalizado e chega-se a distribuição de Maxwell-Boltzmann que é dada por:

$$P_{MB}(E) = Ae^{-E_i/k_B T}$$

- onde k_B é a constante de Boltzmann e T é a temperatura do sistema



Distribuição de Maxwell-Boltzmann

- A partir desse resultado, podemos calcular a energia média das partículas que compõem o sistema que é dada por:

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^{\infty} E \cdot P_{MB}(E) dE}{\int_0^{\infty} P_{MB}(E) dE}$$

- onde $P(E)$ é a distribuição de Maxwell-Boltzmann

Distribuição de Maxwell-Boltzmann

- Utilizando uma distribuição de Maxwell-Boltzmann normalizada, isto é, com:

$$\int_0^{\infty} P_{MB}(E) dE = 1$$

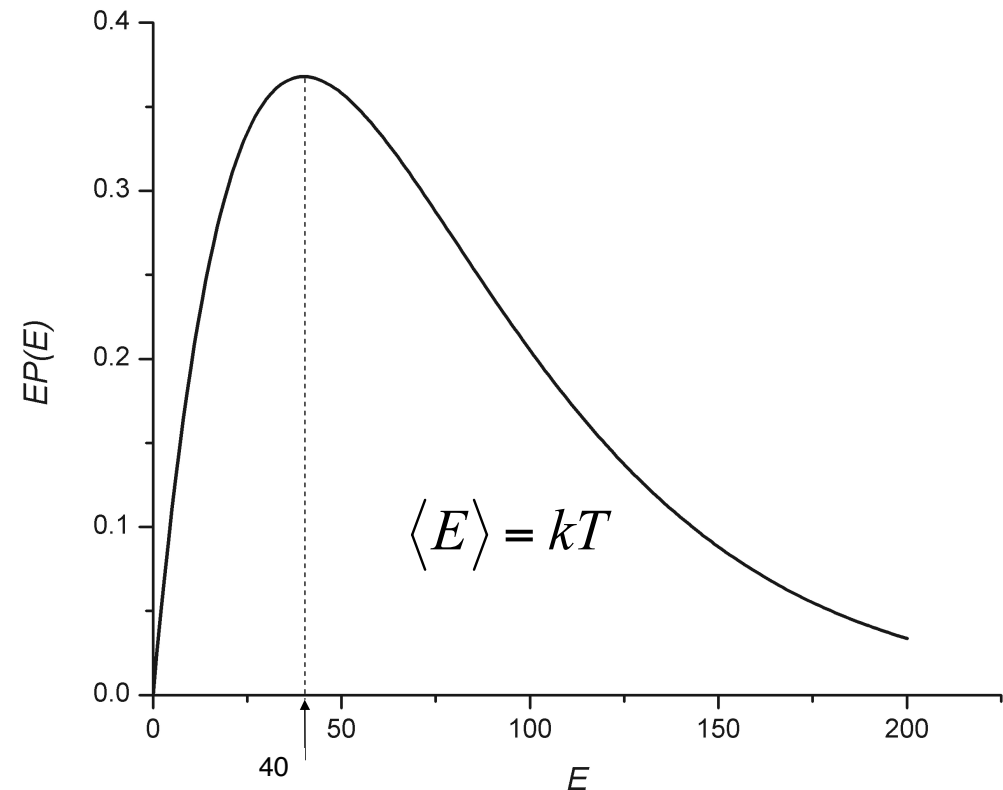
- tem-se:

$$P_{MB}(E) = \frac{e^{-E/kT}}{kT}$$

Distribuição de Maxwell-Boltzmann

- Com isso, a energia média dos constituintes do sistema é:

$$\langle E \rangle = kT$$



Ondas eletromagnéticas estacionárias dentro da cavidade

- Finalmente podemos voltar ao nosso objetivo original que é obter a densidade de energia dentro do corpo negro devido às ondas eletromagnéticas, que é dada por:

$$\rho_T(\nu)d\nu = \langle E \rangle \frac{N(\nu)d\nu}{V}$$

Lei de Rayleigh-Jeans

- Substituindo:

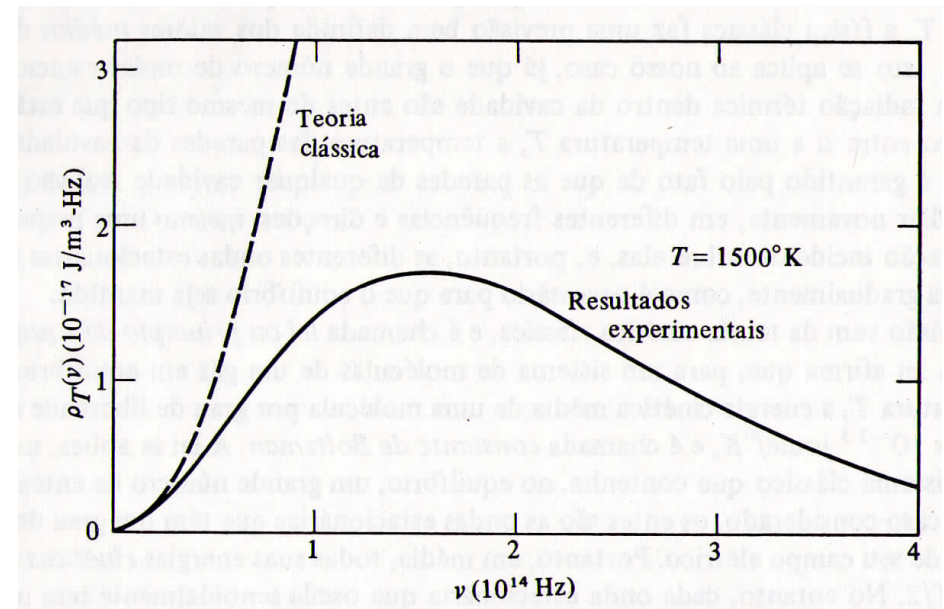
$$\langle E \rangle = kT$$

$$N(\nu)d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \cdot V \cdot \nu^2 d\nu$$

- tem-se que:

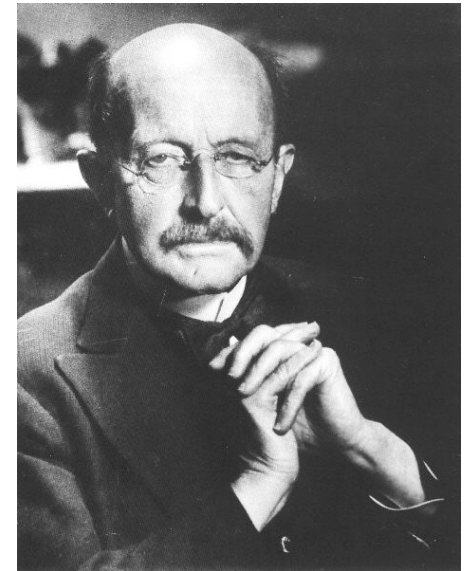
$$\rho_T(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2 kT}{c^3} d\nu$$

- que é a chamada lei de Rayleigh-Jeans



Como resolver essa discrepância?

- Em 1900, Max Planck, que tinha contato com físicos experimentais que estudavam o problema da radiação do corpo negro, propõe um equação que descreve perfeitamente os dados...



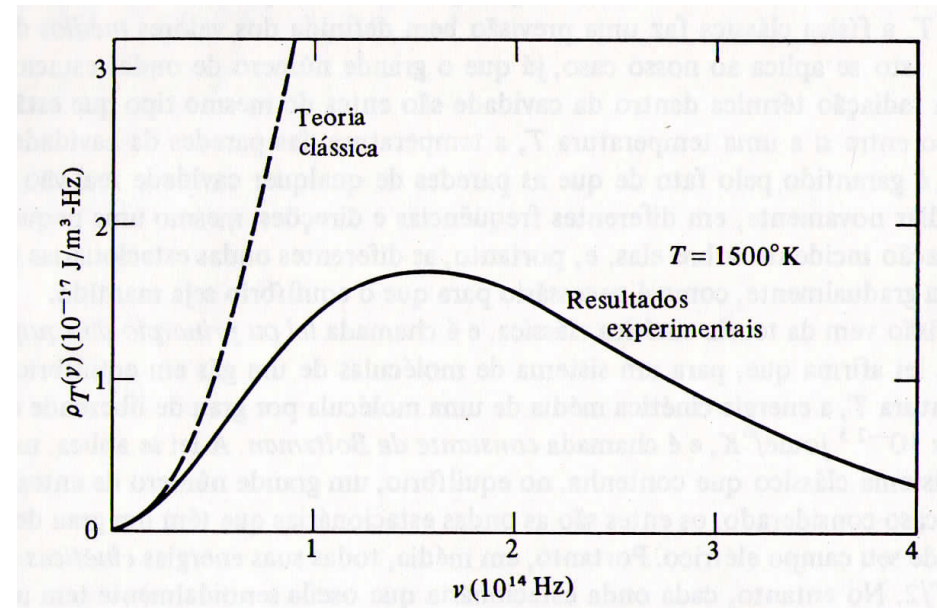
Como resolver essa discrepância?

- Planck notou que para $\nu \rightarrow 0$, a solução clássica é admissível:

$$\langle E \rangle = kT$$

- Porém, para $\nu \rightarrow \infty$, deve-se ter:

$$\langle E \rangle \rightarrow 0$$



Proposta de Planck

- Planck inicialmente supôs que as paredes da cavidade eram constituídas de “pequenos osciladores” que trocam energia com a radiação mantendo o equilíbrio térmico

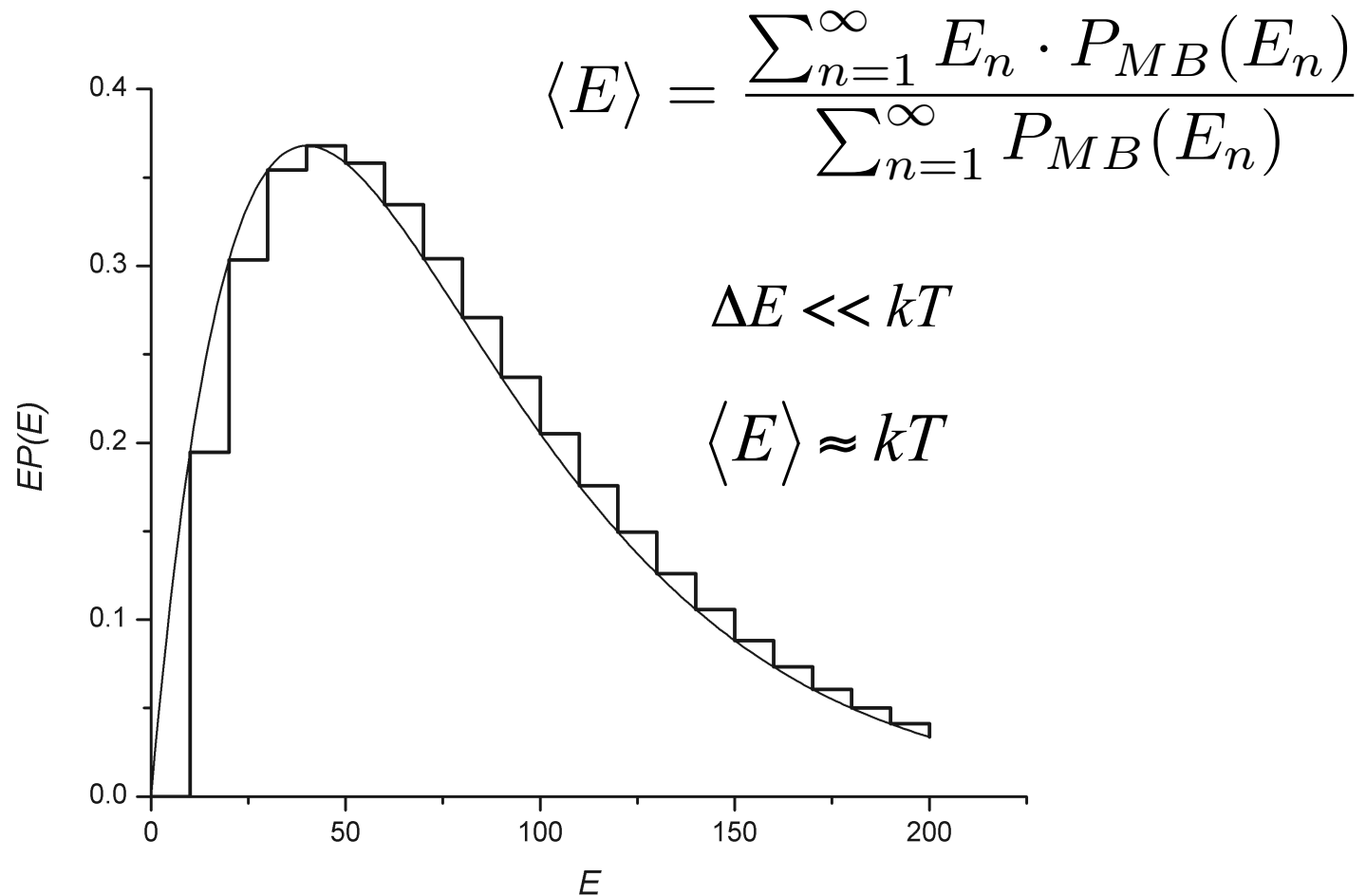
Proposta de Planck

- Utilizando uma estratégia parecida à aquela usada na dedução da distribuição de Maxwell-Boltzmann, Planck fez a suposição que esses osciladores poderiam assumir apenas alguns valores específicos de energia:

$$E_1 = 0, E_2 = \Delta E, E_3 = 2 \cdot \Delta E, E_4 = 3 \cdot \Delta E, \dots$$

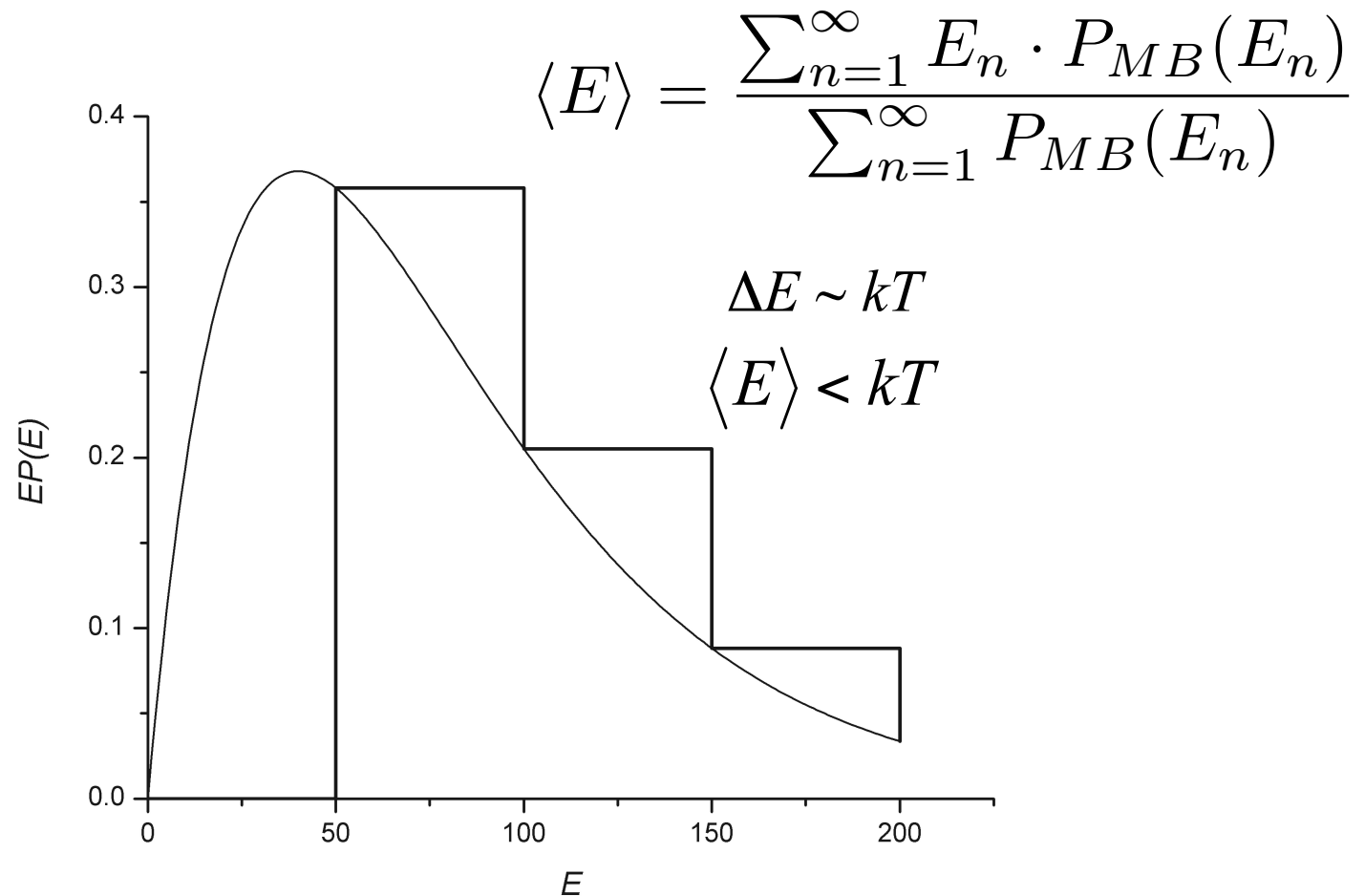
- Sua intenção era fazer com que $\Delta E \rightarrow 0$ para recuperar a distribuição contínua de energia da física clássica

Proposta de Planck



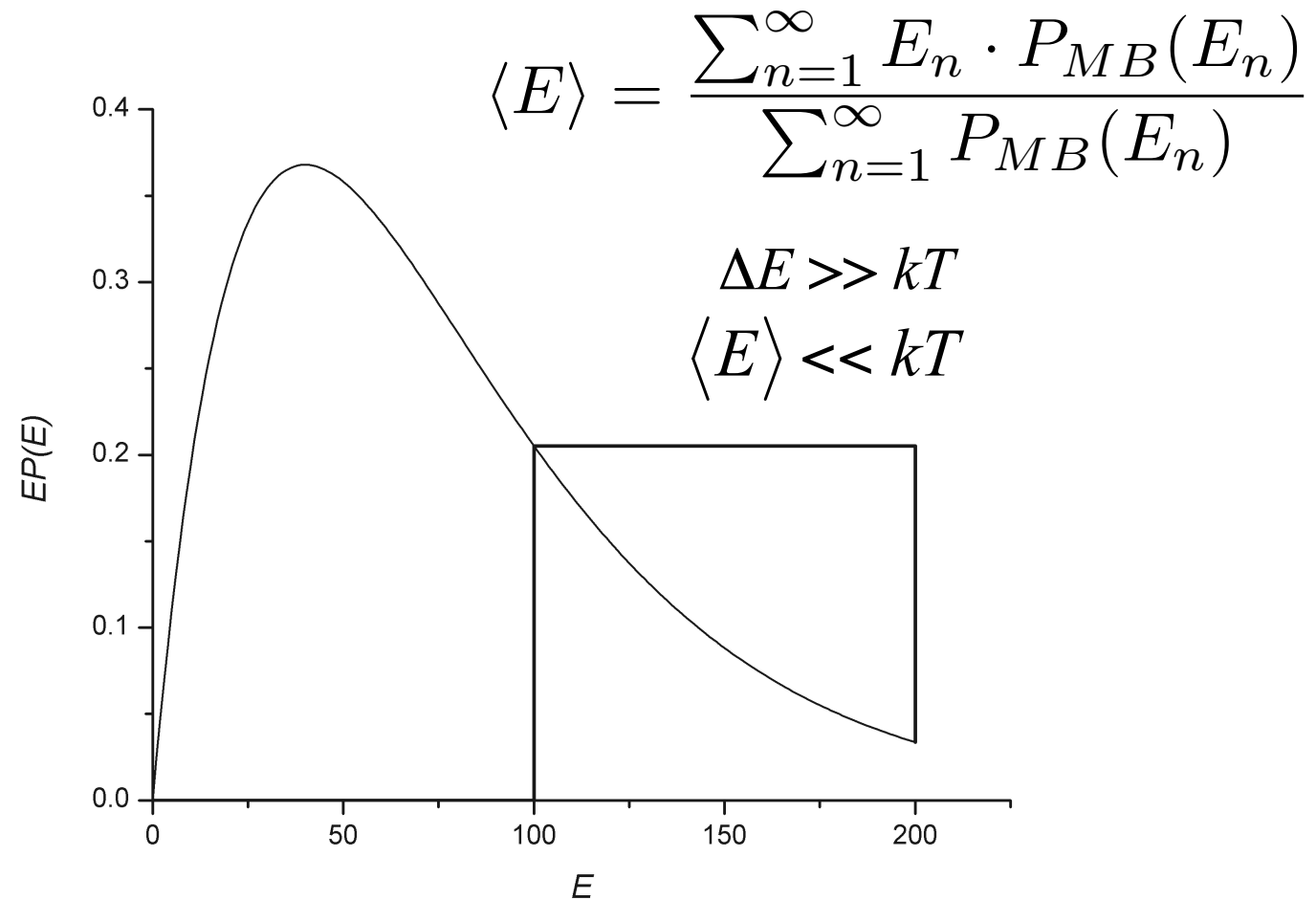
$$E_1 = 0, E_2 = \Delta E, E_3 = 2 \cdot \Delta E, E_4 = 3 \cdot \Delta E, \dots$$

Proposta de Planck



$$E_1 = 0, E_2 = \Delta E, E_3 = 2 \cdot \Delta E, E_4 = 3 \cdot \Delta E, \dots$$

Proposta de Planck



$$E_1 = 0, E_2 = \Delta E, E_3 = 2 \cdot \Delta E, E_4 = 3 \cdot \Delta E, \dots$$

Proposta de Planck

- Portanto, para se reproduzir os dados é preciso que
$$\Delta E \propto \nu$$
- ou seja,
$$\Delta E = h\nu$$
- onde h é a chamada constante de Planck

Fórmula de Planck

- Calculando-se a energia média a partir dessa hipótese, tem-se que:

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} E_n \cdot P_{MB}(E_n)}{\sum_{n=1}^{\infty} P_{MB}(E_n)} = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

- E substituindo em

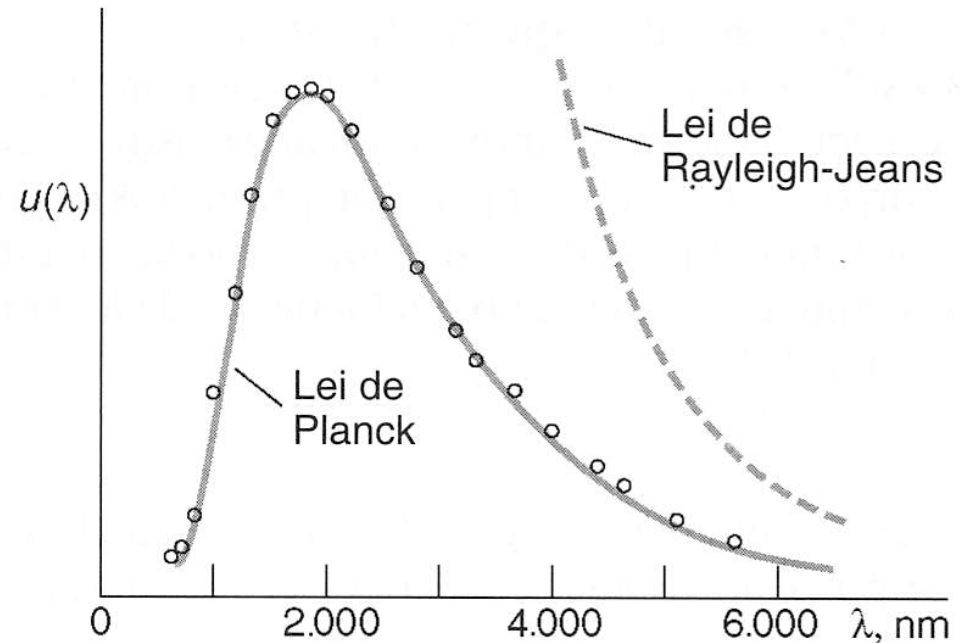
$$\rho_T(\nu)d\nu = \langle E \rangle \frac{N(\nu)d\nu}{V}$$

- tem-se que:

$$\rho_T(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu$$

Fórmula de Planck

- Que reproduz os dados com grande precisão quando:
 $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$



$$\rho_T(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu$$

Implicações do resultado de Planck

- Qual o significado físico da hipótese de Planck?
- Ela impõem que os pequenos osciladores que constituem as paredes da cavidade e estão em equilíbrio com a radiação, só podem assumir certos valores discretos de energia:

$$E = nh\nu$$

