

## Introdução ao cálculo variacional

$$\varepsilon(\Phi) = \int_{\Omega} F(x, \Phi, \Phi') dx$$

dentre todas as funções, qual  $\Phi(x)$  que minimiza  $\varepsilon(\Phi)$ ?

Casos práticos:

- 1) Trajeto com menor custo? ([Lima, pg. 6](#))
- 2) Superfície (volume) mínimo? ([Lima, pg. 9](#))
- 3) Braquistócrona ([Lima, pg. 8](#))

## Solução Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \Phi} = \frac{\partial F}{\partial \Phi} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial \Phi'} \right) = 0$$

Exemplos de aplicação da fórmula (condição necessária):

- Caminho mais curto entre 2 pontos => [wiki](#)

## Dedução da fórmula de Euler-Lagrange

- Minimização da integral => [wiki](#) (pg. 2/3) ou [Lima](#)

**E SE A EXPRESSÃO FOR  
MUITO COMPLICADA P/  
SOLUÇÃO ANALÍTICA?**

## Solução numérica: iterativa

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \Rightarrow \Phi(t+1) = \Phi(t) + \dots$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial \Phi} \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial \Phi} = \frac{\partial F}{\partial \Phi} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial \Phi'} \right) \end{array} \right\} \quad \boxed{\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial F}{\partial \Phi} + \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial \Phi'} \right)}$$

**EXEMPLOS COM SNAKES**

# EXEMPLOS COM LEVEL SETS

## Abordagem variacional

$$\mathcal{P}(\phi) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} (|\nabla\phi| - 1)^2 dx dy \quad (3)$$

$$\mathcal{E}(\Phi) = \mu.P(\Phi) + \lambda.L_g(\Phi) + \nu.A_g(\Phi) \quad (7)$$

$$\mathcal{E}(\Phi) = \int_{\Omega} F(x, y, \Phi, \Phi') dx dy$$

$$\mathcal{L}_g(\phi) = \int_{\Omega} g\delta(\phi)|\nabla\phi| dx dy \quad (7)$$

$$A_g(\phi) = \int_{\Omega} gH(-\phi) dx dy \quad (8)$$

$$g = \frac{1}{1 + |\nabla G_{\sigma * I}|^2}$$

Para minimizar, necessitamos da variação em relação ao tempo:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} \Rightarrow \Phi(t+1) = \Phi(t) + \dots$$

a) Implementação numérica: Usando o gradiente (Newton):

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\Phi}$$

b) Pela variacional tem-se:

$$\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\Phi} = \frac{\partial F}{\partial\Phi} - \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial F}{\partial\Phi'} \right)$$

## P(.): força função p/ TD

$$\mathcal{P}(\phi) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} (|\nabla\phi| - 1)^2 dx dy \quad (3) \quad \text{(Integral sobre toda a imagem!)}$$

$$\Phi(x, y) \equiv \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

$$|\nabla\Phi(x, y)| \equiv \sqrt{\Phi_x^2 + \Phi_y^2}$$

$$\Phi_x = \frac{(x - x_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}$$

$$\Phi_y = \frac{(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}$$

$$|\nabla\Phi(x, y)| = 1$$

## Função g(x,y)

$$g = \frac{1}{1 + |\nabla G_{\sigma * I}|^2}$$

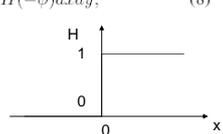
- G(x,y): função gaussiana
- I(x,y) : imagem => artifício p/ obter gradiente da imagem com menos ruído
- Favorece bordas
- Se houver borda => maior |grad da imagem| => menor custo

## Função L

$$\mathcal{L}_g(\phi) = \int_{\Omega} g\delta(\phi)|\nabla\phi| dx dy \quad (7)$$

- Length do contorno ponderado pelo g(x,y)
  - Favorece contornos com maior soma de gradientes da imagem (menor g)
  - Note que:  $|\nabla\Phi(x, y)| = 1$

## Função A

$$A_g(\phi) = \int_{\Omega} gH(-\phi) dx dy \quad (8)$$


- H(): Heaviside
- Por convenção, dentro do contorno a função distancia é negativa ( $\phi < 0$ )
- Favorece contornos pequenos (contração)

### Gateaux derivative

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \Phi} = \frac{\partial F}{\partial \Phi} - \frac{d}{dr} \left( \frac{\partial F}{\partial \Phi'} \right)$$

$$\nabla \Phi \equiv \Phi'$$

$$F(x, y, \Phi, \Phi') = \frac{\mu}{2} (|\Phi'| - 1)^2 + \lambda \delta(\Phi) \cdot g \cdot |\Phi'| + \nu \cdot g \cdot H(-\Phi)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \Phi} = -\nu \cdot g(x, y) \cdot \delta(\Phi)$$

$$\frac{\partial F(x, y, \Phi, \Phi')}{\partial \Phi'} = \mu (|\Phi'| - 1) \cdot \frac{\Phi'}{|\Phi'|} + \lambda \delta(\Phi) \cdot g \cdot \frac{\Phi'}{|\Phi'|}$$

$$= \mu \cdot \left( \Phi' - \frac{\Phi'^2}{|\Phi'|} \right) + \lambda \delta(\Phi) \cdot g \cdot \frac{\Phi'}{|\Phi'|}$$

$$\text{div} \left( \frac{\partial F}{\partial \Phi'} \right) = \mu \text{div}(\Phi') - \mu \text{div} \left( \frac{\Phi'}{|\Phi'|} \right) + \lambda \delta(\Phi) \cdot \text{div} \left( g \cdot \frac{\Phi'}{|\Phi'|} \right)$$

$$\text{div}(\Phi') = \text{div}(\nabla \Phi) = \nabla \cdot \nabla \Phi = \nabla^2 \Phi$$

### Derivada parcial do módulo do gradiente

$$\frac{\partial |\Phi'|}{\partial \Phi'} = \frac{\partial \sqrt{\Phi_x^2 + \Phi_y^2}}{\partial \Phi'}$$

$$\frac{\partial \sqrt{\Phi_x^2 + \Phi_y^2}}{\partial \Phi_x} = \frac{\Phi_x}{\sqrt{\Phi_x^2 + \Phi_y^2}}$$

$$\frac{\partial \sqrt{\Phi_x^2 + \Phi_y^2}}{\partial \Phi_y} = \frac{\Phi_y}{\sqrt{\Phi_x^2 + \Phi_y^2}}$$

$$\frac{\partial |\Phi'|}{\partial \Phi'} = \frac{\begin{bmatrix} \Phi_x \\ \Phi_y \end{bmatrix}}{\sqrt{\Phi_x^2 + \Phi_y^2}} = \frac{\Phi'}{|\Phi'|}$$

1) Ler imagem I0(x,y)

Obter g(x,y)

Definir parâmetros: μ, λ, ...

4) Atualizar o φ

$$\Phi(t+1) = \Phi(t) + \tau \cdot L(t)$$

5) Se não convergiu, ir p/ 3

2) Inicializar contorno

Obter φ inicial

3) Obter:

$$\Phi_x = \frac{\Phi(x+1, y) - \Phi(x-1, y)}{2}$$

$$\Phi_y = \frac{\Phi(x, y+1) - \Phi(x, y-1)}{2}$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\Phi_x(x+1, y) - \Phi_x(x-1, y) + \Phi_y(x, y+1) - \Phi_y(x, y-1)}{2}$$

$$\frac{\Phi'}{|\Phi'|} \cdot \text{div} \left( \begin{bmatrix} a(x, y) \\ b(x, y) \end{bmatrix} \right) = \frac{\partial a(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial b(x, y)}{\partial y}$$

$$g \cdot \frac{\Phi'}{|\Phi'|} \cdot \text{div} \left( \frac{\Phi'}{|\Phi'|} \right)$$

$$\text{div} \left( g \cdot \frac{\Phi'}{|\Phi'|} \right)$$

L(t)

### Outras Aplicações

- Restauração de imagens
- Evolução de contornos
- Propagação de combustão, fluídos, sismologia, crescimento de cristais, ...
- Difusão, deposição de materiais, ...

### Descrição

- Baseado em modelos físicos de propagação de interfaces e modelos deformáveis
  - fluido
  - chamas
  - crescimento de cristais
- Solução de PDE do tipo Hamilton-Jacobi

PARA MAIS INFORMAÇÕES...

Shape modeling with front propagation: a level set approach  
 R Malladi, JA Sethian, BC Venturi. IEEE PAMI 17(2):158-175, feb1995