Física Matemática I - 4300204

$1^{\underline{a}}$ lista

1) Ache todos os valores complexos de:
a) $\sqrt{i}$, b) $-i^{1/3}$, c) $-1^{1/3}$, d) i^i, e) $\ln(i)$

2) Ache todos os valores complexos de:
a) $(-1+i\sqrt{3})^{3/2}$, b) $(1+i\sqrt{3})^{3/2}$, c) mostre explicitamente que $(\pm 1+i\sqrt{3})^3 = \mp 8$.

3) Ache as quatro raízes da equação $z^4+4=0$ e, usando-as, mostre que $z^4+4=0$ pode ser fatorada em fatores quadráticos com coeficientes reais dados por: $(z^2+2z+2)(z^2-2z+2)$.Ache tambem as quatro raízes de $z^4+4i=0$

4) Para z complexo as funções seno, cosseno, seno hiperbólico e cosseno hiperbólico são definidas, respectivamente, por:

$$\sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

$$\sinh(z) = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}, \qquad \cosh(z) = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$$

a) Mostre que $\sinh(z) = \sin(iz)/i$ e que $\cosh(z) = \cos(iz)$.
b) Com mais generalidade, mostre que (x e y são reais)

$$\sin(x+iy) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y),$$

$$\cos(x+iy) = \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y).$$

c) Mostre que $(\sin z)^2 + (\cos z)^2 = 1$, e que $(\cosh z)^2 - (\sinh z)^2 = 1$.
d) Mostre que as soluções das equações $\sin(z) = 0$ e $\cos(z) = 0$ são as soluções reais.

5) Determine as regiões em que a funções abaixo são deriváveis, e calcule a derivada:
a) $f(z) = z^{-1}$, b) $f(z) = z^2$, c) $f(z) = e^z$.

6) Mostre que para cada uma das funções abaixo, $f'(z)$ não existe em nenhum ponto do plano complexo:
a) $f(z) = z^*$, b) $f(z) = e^{z^*}$, c) $f(z) = z - z^*$, d) $f(z) = 2x + ixy^2$.

7) Mostre que para $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$, as condições de Cauchy-Riemann em coordenadas polares são dadas por

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r}$$

8) Seja $f(z) = z$. Calcule a integral de f entre os pontos -1 e 1 pelos caminhos: a) ao longo da linha reta que une ambos os pontos. b) ao longo do semi-círculo inferior de raio 1 que une os dois pontos. c) ao longo do semi-círculo superior de raio 1 que une os dois pontos. Os resultados são iguas? Deveriam ser? Porque?

9) Seja $f(z) = z^*$. Calcule a integral de f entre os pontos -1 e 1 pelos caminhos: a) ao longo da linha reta que une ambos os pontos. b) ao longo do semi-círculo inferior de raio 1 que une os dois pontos. c) ao longo do semi-círculo superior de raio 1 que une os dois pontos. Os resultados são iguas? Deveriam ser? Porque?

10) Seja $f(z) = |z|$. Calcule a integral de f entre os pontos -1 e 1 pelos caminhos: a) ao longo da linha reta que une ambos os pontos. b) ao longo do semi-círculo inferior de raio 1 que une os dois pontos. c) ao longo do semi-círculo superior de raio 1 que une os dois pontos. Os resultados são iguas? Deveriam ser? Porque?

11) Seja $f(z) = \frac{z+2}{z}$. Mostre que a integral de f ao longo do: a) semi-círculo $z = 2e^{i\theta}$, onde θ varia de 0 a π vale $-4 + 2i\pi$. b) semi-círculo $z = 2e^{i\theta}$, onde θ varia de 0 a $-\pi$ vale $-4 - 2i\pi$. c) círculo $z = 2e^{i\theta}$, onde θ varia de $-\pi$ a π vale $4i\pi$.

12) Se C é o contorno do quadrado com vértices nos pontos $z = 0$, $z = 1$, $z = 1 + i$ e $z = i$ percorrido no sentido anti-horário, mostre que

$$\int_C (3z + 1)\ dz = 0.$$

13) Sendo C a fronteira do quadrado do exercício 12, mostre que

$$\int_C \pi e^{\pi z^*}\ dz = 4(e^{\pi} - 1).$$

14) Se C_0 é um círculo

$$z - z_0 = r_0 e^{i\theta}, \qquad (0 \le \theta \le 2\pi,\ r_0 > 0)$$

com orientação anti-horária, mostre que

$$\int_{C_0} f(z)\ dz = i r_0 \int_0^{2\pi} f(z_0 + r_0 e^{i\theta}) e^{i\theta}\ d\theta$$

se f é contínua sobre C_0.