Física Matemática I - 4300204 - T3

$2^{\underline{a}}$ lista

1) Seja C a fronteira do quadrado cujos lados estão sobre as retas $x = \pm 2$ e $y = \pm 2$ orientada no sentido positivo (anti-horário). Prove que as seguintes integrais valem:

$$a)\ \oint_C \frac{e^{-z}}{z - i\pi/2} dz = 2\pi, \quad b)\ \oint_C \frac{\cos z}{z(z^2+8)} dz = \frac{i\pi}{4}, \quad c)\ \oint_C \frac{z}{2z+1} dz = -\frac{i\pi}{2},$$

$$d)\ \oint_C \frac{\tan(z/2)}{(z-x_0)^2} dz = i\pi \sec^2(x_0/2), \text{ com } |x_0| < 2, \quad e)\ \oint_C \frac{\cosh z}{z^4} dz = 0.$$

$$f)\ \oint_C \frac{\tan(z/2)}{(z-3)} dz = 0, \quad g)\ \oint_C \frac{\cosh z}{z^3} dz = i\pi, \quad h)\ \oint_C \frac{e^{-z}}{(z-4)(z^2+8)} dz = 0.$$

2) Mostre que as integrais abaixo, calculadas ao longo do caminho fechado C tal que $|z - i| = 2$ no sentido positivo, valem:

$$a)\ \oint_c \frac{dz}{z^2+4} = \frac{\pi}{2}, \quad b)\ \oint_c \frac{dz}{(z^2+4)^2} = \frac{\pi}{16}, \quad c)\ \oint_c \frac{dz}{(z^2-9)^2} = 0.$$

3) Sendo $f(z)$ analítica no interior e sobre um caminho fechado C mostre que

$$\oint_C \frac{f'(z)}{z - z_0} dz = \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz,$$

onde z_0 é um ponto no interior de C.

4) Sendo C o círculo unitário $z = e^{i\theta}$, orientado de $\theta = -\pi$ a $\theta = \pi$, e k uma constante real qualquer, mostre primeiro que

$$\oint_c \frac{e^{kz}}{z} dz = 2\pi i$$

e, a seguir, escreva a integral em termos de θ para deduzir a fórmula

$$\int_0^\pi e^{k\cos\theta} \cos(k \sin\theta) d\theta = \pi.$$

5) Sendo C o círculo unitário $|z - i| = 1$, orientado no sentido anti-horário, e γ o arco desse círculo de extremos $z = 0$ e $z = 1 + i$, mostre que

$$a)\ \oint_C \frac{z-1}{z-i} dz = -2\pi(1+i), \quad b)\ \int_\gamma \frac{z-1}{z-i} dz = (1+i)(1 - \frac{\pi}{2}\Big).$$

6) Faça o desenvolvimento em série de Laurent da função

$$f(z) = \frac{3z-3}{(2z-1)(z-2)}$$

em torno de: a) $z = 1$, na região $\frac{1}{2} < |z-1| < 1$. b) $z = 0$, na região $1 < |z| < 2$.

7) Faça dois desenvolvimento em série de Laurent, em potências de z, para a função

$$f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$$

e especifique as regiões onde esses desenvolvimentos são válidos.

8) Mostre que a série de Laurent para a função

$$f(z) = \frac{e^{z^2}}{z}$$

em torno de $z = 0$ é dada por

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{n!}$$

9) Obtenha os quatro primeiros termos do desenvolvimento em série de Laurent:

$$a)\ \frac{e^z}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z} + 1 - \frac{1}{2}z - \frac{5}{6}z^2 + \cdots \qquad (0 < |z| < 1).$$

$$b)\ \frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12}z - \frac{1}{720}z^3 + \cdots \qquad (0 < |z| < 2\pi).$$