Física Matemática I - 4300204 - T3

$5^{\underline{a}}$ lista

1) Seja $f(x)$ uma função periódica de período 2π definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi \\ 0, & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

Faça um gráfico dessa função e determine sua expansão em série de Fourier. Para qual valor a série deve convergir no ponto $x = \pi/2$?

2) Seja $f(x)$ uma função periódica de período $2L$ definida por $f(x) = x$ para $-L < x < L$. Faça um gráfico dessa função e determine sua expansão em série de Fourier. Para qual valor a série deve convergir nos pontos $x = \pm L$?

3) Seja $f(x)$ uma função periódica de período $2L$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & L/2 < x < L \\ 0, & -L < x < L/2 \end{cases}$$

Faça um gráfico dessa função e determine sua expansão em série de Fourier.

4) Seja $f(x)$ uma função periódica de período 1 definida por

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1/2 \\ 0, & 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$

Faça um gráfico dessa função e determine sua expansão em série de Fourier. Para qual valor a série converge no ponto $x = 1/2$?

5) Considere uma corda vibrante de comprimento L, densidade ρ constante, sob uma tensão horizontal T nas suas extremidades (situadas em $x = 0$ e $x = L$), as quais estão fixas. Neste caso a velocidade da onda na corda é $v = \sqrt{T/\rho}$. Se $u(x,t)$ representa o deslocamento transversal da corda no ponto x e no instante t, a equação da onda que se propaga nessa corda é dada por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Se a corda estiver inicialmente na configuração

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 2x/L, & 0 < x < L/2 \\ 2(L-x)/L, & L/2 < x < L \end{cases}$$

com $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$, determine $u(x,t)$.

6) Considere o mesmo problema do exercício **5)** (ou seja, mesmas condições iniciais) só que agora para uma corda com os extremos livres e com as condições de contorno

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0$$

Determine $u(x,t)$.

7) Considere uma chapa isolante quadrada de lados L, cujo potencial obedece a equação de Laplace:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0.$$

Se as condições de contorno nessa chapa são:

$$\frac{\partial V}{\partial y}(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y}(x, L) = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x}(0, y) = 0,$$

determine $V(x, y)$ que obedeça à condição:

$$V(0, y) = V_0 e^{-y}.$$

8) Seja $f(x)$ uma função periódica de período $2M$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} M - x, & 0 \leq x \leq M \\ M + x, & -M \leq x \leq 0 \end{cases}$$

Faça um gráfico dessa função e determine sua expansão em série de Fourier. Usando o teorema de Fourier e calculando a série no ponto $x = 0$ mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

9) Seja $f(x)$ uma função periódica de período $2L$ definida por $f(x) = x^2$ para$-L \leq x \leq L$. Faça um gráfico dessa função e determine sua expansão em série de Fourier. Usando o teorema de Fourier e calculando a série no ponto $x = L$ mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

10) Seja $f(x)$ uma função periódica de período 2π definida por

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & -\pi \leq x \leq 0 \end{cases}$$

Faça um gráfico dessa função e determine sua expansão em série de Fourier. A partir dessa série mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}$$

11) Considere a equação de derivadas parciais

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2v}{L} \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

Uma das possíveis situações físicas para esse problema é o de uma corda vibrante sujeita a um termo dissipativo $\gamma \frac{\partial u}{\partial t}$ com $\gamma = 2v/L$, que pode ser devido ao atrito da corda com o ar produzindo ondas sonoras. Resolva a equação acima sujeita às condições de contorno

$$u(0, t) = u(L, t) = 0$$

e às condições iniciais

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f(x) = \sin \frac{\pi x}{L}$$