

Física Matemática I - 4300204 - T3

6^a lista

1) Considere a equação do calor com fontes:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = Q(x)$$

sujeita às condições de contorno $u(0, t) = 0$, e $u(L, t) = 0$. Resolva o problema se a temperatura for inicialmente $u(x, 0) = -x^2 + Lx$ para $0 \leq x \leq L$ e se $Q(x) = \sin \frac{\pi x}{L}$.

2) Considere uma corda vibrante de comprimento L com suas extremidades (situadas em $x = 0$ e $x = L$), livres. Se a velocidade da onda na corda for v e se $u(x, t)$ representar o deslocamento transversal da corda no ponto x e no instante t , a equação de onda forçada que se propaga nessa corda é dada por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = g(t).$$

Como a corda tem os extremos livres, as condições de contorno são:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0$$

Se a corda estiver inicialmente na configuração $u(x, 0) = x^2$, com $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$, determine $u(x, t)$ para $g(t) = \cos \frac{\pi v}{L} t$.

3) Sabendo que a série de Fourier para a função $f(x) = x^2$ para $-L \leq x \leq L$ é dada por

$$x^2 = \frac{L^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4L^2}{\pi^2} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi}{L} x$$

mostre que a série de Fourier para a função $g(x) = x^3 - L^2 x$ para $-L \leq x \leq L$ é dada por

$$x^3 - L^2 x = \frac{12L^3}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin \frac{n\pi}{L} x.$$

Mostre ainda que a série de Fourier para a função $h(x) = x^3$ para $-L < x < L$ é dada por

$$x^3 \sim \frac{2L^3}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \left(\frac{6}{\pi^2} - n^2 \right) \sin \frac{n\pi}{L} x.$$

Mostre também que a série para $h(x) = x^3$ não pode ser diferenciada para se obter a série para $f(x) = x^2$, mas a série para $g(x)$ pode. Porque? Calcule explicitamente o valor da série de $h(x)$ em $x = L$ e explique o resultado obtido.

4) Seja $M > 0$ e seja $f(x)$ a função periódica de período $2M$ definida de forma que para $-M \leq x \leq M$ tenhamos

$$f(x) = x^2 - \frac{M^2}{3}$$

a) Mostre que a expansão em série de Fourier para $f(x)$ é dada por

$$f(x) = \frac{4M^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi}{M} x.$$

b) Usando a identidade de Parseval para essa expansão mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

5) Seja $M > 0$ e seja $f(x)$ a função periódica de período $2M$ definida de forma que para $-M \leq x \leq M$ tenhamos

$$f(x) = x^3 - M^2 x$$

a) Mostre que a expansão em série de Fourier para $f(x)$ é dada por

$$f(x) = \frac{12M^3}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin \frac{n\pi}{M} x.$$

b) Usando a identidade de Parseval para essa expansão mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

6) Seja $f(x)$ a função periódica de período 2π definida de forma que para $-\pi \leq x \leq \pi$ tenhamos

$$f(x) = \cos \alpha x$$

a) Mostre que a expansão em série de Fourier para $f(x)$ é dada por

$$f(x) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha} - 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - \alpha^2} \cos nx \right).$$

b) Usando a identidade de Parseval para essa expansão mostre que para $\alpha = 1/2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2} = \frac{\pi^2 - 8}{16}$$

7) Use a forma exponencial da série de Fourier para mostrar que para $-\pi < x < \pi$

$$e^x = \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 - in} e^{inx}$$

8) Seja $f(x)$ uma função periódica de período 2π definida de forma que para $0 < x < 2\pi$ tenhamos

$$f(x) = e^{x/2\pi}.$$

a) Faça um gráfico dessa função e determine sua expansão em série de Fourier. b) Usando o Teorema de Fourier e calculando a série no ponto $x = 2\pi$ mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + 4n^2\pi^2} = \frac{3 - e}{4(e - 1)}.$$

c) Usando o Teorema de Fourier e calculando a série no ponto $x = \pi$ mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + 4n^2\pi^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{e}}{e - 1} - 1 \right).$$