Física Matemática I - 4300204 - T3

$9^{\underline{a}}$ lista

1) Calcule a transformada de Laplace das seguintes funções :

$$a)\ f(t) = \cosh kt, \quad b)\ f(t) = \sinh kt, \quad c)\ f(t) = \cos at,$$

$$d)\ f(t) = \sin at, \quad e)\ f(t) = e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \phi).$$

Resp. a)$\frac{s}{s^2-k^2}$, b)$\frac{k}{s^2-k^2}$, c) $\frac{s}{s^2+a^2}$, d) $\frac{a}{s^2+a^2}$, e) $\frac{(s+\lambda)\cos\phi - \omega\sin\phi}{(s+\lambda)^2+\omega^2}$.

2) Calcule a transformada de Laplace inversa das seguintes funções :

$$a)\ F(s) = \frac{s+1}{s(s^2+1)}, \quad b)\ F(s) = \frac{s+1}{s^2(s^2+s+1)}, \quad c)\ F(s) = \frac{k^2}{s^2(s^2-k^2)},$$

$$d)\ F(s) = \frac{k^2}{s(2s^2-k^2)}, \quad e)\ F(s) = \frac{1}{(s^2+3)(s-1)}.$$

Resp. a)$1 + \sin t - \cos t$, b)$t - \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-t/2} \sin(\sqrt{3}t/2)$, c) $\frac{\sinh kt}{k} - t$, d) $\cosh(kt/\sqrt{2}) - 1$, e) $(e^t - \cos\sqrt{3}t - \frac{\sin\sqrt{3}t}{\sqrt{3}})/4$.

3) Use o teorema da convolução para mostrar os seguintes resultados:

$$a)\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+c^2)^2}\right] = \frac{\sin ct}{2c^3} - \frac{t\cos ct}{2c^2}, \quad b)\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2}{(s^2+a^2)^2}\right] = \frac{\sin at}{2a} + \frac{t\cos at}{2},$$

$$c)\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}\right] = \frac{\cos bt - \cos at}{a^2-b^2}, \quad a^2 \neq b^2,$$

$$d)\ \mathcal{L}\left[\int_0^t f(\omega)d\omega\right] = \frac{1}{s}F(s), \text{ onde } F(s) = \mathcal{L}\left[f(t)\right].$$

4) Usando o método da transformada de Laplace mostre que a solução do oscilador harmônico simples, submetido a uma forą externa $f(t) = e^{-\omega_0 t}$, $(t > 0)$, com as condições iniciais: $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = v_0$, dada por:

$$x(t) = \frac{1}{m\omega(\omega_0^2+\omega^2)}(\omega_0 \sin\omega t - \omega\cos\omega t + \omega e^{-\omega_0 t}) + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$$

onde $\omega^2 = K/m$, com K sendo a constante da mola.

5) Usando o método da transformada de Laplace mostre que a distribuição de temperatura, $u(x,t)$, de uma barra semi-infinita unidimensional, de constante de difusão térmica K, sujeita a equação

$$\frac{1}{K}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

cuja temperatura em $t = 0$ é nula, e cuja extremidade em $x = 0$ é mantida a uma temperatura $f(t)$, é dada por:

$$u(x,t) = \frac{x}{2\sqrt{K\pi}} \int_0^t d\xi \frac{e^{\frac{-x^2}{4K\xi}}}{\xi^{3/2}} f(t-\xi).$$

Dado:

$$\mathcal{L}\left[\frac{e^{-a^2/t}}{t^{3/2}}\right] = \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-2a\sqrt{s}}$$

6) Considere uma corda vibrante semi-infinita, se a velocidade da onda na corda for v e se $u(x,t)$ representar o deslocamento transversal da corda no ponto x e no instante t, a equação de onda que se propaga nessa corda é dada por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Se a corda estiver inicialmente na posição horizontal e em repouso, ou seja se $u(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$, e se a partir do instante inicial, sua extremidade em $x = 0$ fica submetida a um movimento representado por $u(0,t) = f(t)$, utilizando o método da transformada de Laplace determine a) $\mathcal{L}[u(x,t)] = U(x,s)$, sabendo que $\lim_{x\to\infty} u(x,t) = 0$. b) Obtenha $u(x,t)$ para $f(t) = A\sin\omega t$.

7) Usando o método da transformada de Laplace ache a solução do oscilador harmônico simples, submetido a uma forą externa $f(t) = e^{-\omega_0 t}$, $(t > 0)$, com as condições iniciais: $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = 0$. Mostre explicitamente a partir da solução obtida que $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = 0$ e $m\ddot{x} + Kx = f(t)$.

8) Considere o oscilador harmônico amortecido forąado que obedece a equação :

$$m\ddot{x} + 2m\omega_0\dot{x} + m\omega_0^2 x = f(t).$$

Usando o método da transformada de Laplace ache a solução do problema quando a forą externa é dada por $f(t) = me^{-\omega t}$, $(t > 0)$, com as condições iniciais: $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 0$.

9) Considere um circuito RLC em série, com uma bateria que fornece uma tensão constante, ϵ_0, e com um interruptor que é fechado no instante $t = 0$ e aberto no instante $t = T$, ou seja, só é fornecida tensão ao circuito no intervalo de tempo $0 \leq t \leq T$. A equação da carga nesse circuito é dada por:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \epsilon(t)$$

Determine $i(t)$, a corrente no circuito em função do tempo, quando $q(0) = 0$ e $i(0) = 0$, ou seja, a carga inicial no capacitor é zero, e a corrente inicial também é zero. Considere o caso em que $\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} = \omega^2 > 0$.

10) Usando o método da transformada de Laplace mostre que a solução da equação diferencial

$$m\frac{dv}{dt} = -\gamma v + Ae^{-\alpha t},$$

onde m, γ, A e α são constantes, é dada por

$$v(t) = v_0 e^{-\gamma t/m} + \frac{A}{\alpha m - \gamma}(e^{-\gamma t/m} - e^{-\alpha t}),$$

onde $v_0 = v(0)$. Mostre explicitamente que essa solução satisfaz a equação diferencial.