

Roteiro do experimento “Rolamento” – Parte II

A) Introdução ao experimento

O experimento consiste no lançamento de um aro para frente de modo a fazê-lo girar no sentido contrário, de forma que após um certo tempo retorna para quem o lançou. Com isso será possível estudar tanto o *movimento de rolamento com escorregamento* quanto o *movimento de rolamento sem escorregamento*.

B) Procedimento de análise

Depois de realizada a primeira etapa do experimento você fará agora uma análise com uma ênfase quantitativa do movimento do aro. Para isso assista ao vídeo relacionado à experiência mais uma vez, para lembrar, e responda os itens que vêm a seguir.

B1. Construa uma tabela contendo os valores de posição linear (x_i), posição angular (θ_i) e instantes de tempo (t_i) para cada foto i . Para isso consulte os roteiros auxiliares de “*Leitura das Posições Angulares*” e “*Leitura das Posições Lineares*”. Adote 1 cm e $0,07\text{ rad}$ para as incertezas nas posições lineares e angulares respectivamente (para maiores informações veja o apêndice no final deste roteiro).

B2. Monte os gráficos de x_i e θ_i em função de t_i e tente explicar, com os conhecimentos que possui, o comportamento da posição em função do tempo dos pontos experimentais. Acrescente as *barras de erro* aos gráficos.

B3. Com a tabela do item 1, calcule as *velocidades médias* linear e angular para o intervalo de tempo $[t_{i-1}; t_{i+1}]$, dadas por:

$$\bar{v}_{[t_{i-1}; t_{i+1}]} = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}, \quad (1)$$

$$\bar{\omega}_{[t_{i-1}; t_{i+1}]} = \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}, \quad (2)$$

onde x, θ e t correspondem às grandezas posição, ângulo e tempo, respectivamente, enquanto \bar{v} e $\bar{\omega}$ simbolizam as velocidades médias linear e angular.

B4. Como o intervalo $[t_{i-1}; t_{i+1}]$ é pequeno, supomos¹

$$\bar{v}_{[t_{i-1}; t_{i+1}]} \cong v(\bar{t}_i), \quad (3)$$

$$\bar{\omega}_{[t_{i-1}; t_{i+1}]} \cong \omega(\bar{t}_i), \quad (4)$$

¹ Na verdade, o que estamos fazendo é calcular a derivada da posição em relação ao tempo, de forma numérica, para obter a velocidade. Para maiores informações, consulte o texto “*Como calcular numericamente a derivada de uma função*” na página “*Guias*” do site do experimento virtual.

onde $v(\bar{t}_i)$ e $\omega(\bar{t}_i)$ correspondem às *velocidades instantâneas* linear e angular, respectivamente, no instante médio \bar{t}_i , dado por

$$\bar{t}_i = \frac{t_{i+1} + t_{i-1}}{2}. \quad (5)$$

B5. Faça uma tabela contendo os valores de $v(\bar{t}_i)$, $\omega(\bar{t}_i)$ e \bar{t}_i , juntamente com as incertezas de $v(\bar{t}_i)$ e $\omega(\bar{t}_i)$ (supomos que a incerteza no tempo, tanto em t_i como em \bar{t}_i , é desprezível). Para o cálculo das incertezas, veja o texto “*Roteiro de cálculo de incertezas*”, na página “*Guias*” do site do experimento virtual.

B6. A partir da tabela do item B5, faça os gráficos referentes às velocidades calculadas, com suas respectivas incertezas, e observe o comportamento de tais grandezas. Esse é o comportamento esperado? Como você os interpreta?

B7. Analisando os gráficos do item B6, determine o instante em que se inicia o rolamento sem escorregamento. Como você chegou a essa resposta?

B8. Construa um novo gráfico de velocidade linear que contenha apenas a parte do movimento de rolamento *com escorregamento*, trace uma linha de tendência e interprete o coeficiente angular da equação dessa reta. O que ele representa? Calcule-o e determine sua incerteza usando:

$$\sigma_c = \frac{\sigma_{\text{velocidade}} \sqrt{12}}{T \sqrt{N}}, \quad (6)$$

onde σ_c é a incerteza do coeficiente angular obtido, $\sigma_{\text{velocidade}}$ é a incerteza na velocidade linear, T é o intervalo de tempo do gráfico e N é o número de pontos experimentais. Repita o procedimento para a velocidade angular.

B9. Construa um novo gráfico de posição linear que contenha apenas a parte correspondente ao movimento de rolamento *sem escorregamento*, trace uma linha de tendência e interprete o coeficiente angular de sua equação de reta. O que ele representa? Calcule-o e determine sua incerteza usando a expressão (6), mas trocando $\sigma_{\text{velocidade}}$ por $\sigma_{\text{posição}}$. Repita o procedimento para a posição angular.

B10. Pensando no rolamento *com escorregamento* e considerando que a inércia rotacional do aro como sendo I , dispomos da seguinte relação:

$$a = \frac{I}{MR} \alpha, \quad (7)$$

onde a , α , M e R representam respectivamente a aceleração linear, a aceleração angular, a massa e o raio do aro.

Deduza teoricamente a expressão (7) e observe que a e α correspondem aos coeficientes angulares obtidos no item 8. Vamos chamá-los de a_{exp} e α_{exp} , onde o índice “_{exp}” indica que se trata de uma grandeza experimental. Assim, a expressão (7) pode ser reescrita como:

$$a_{\text{exp}} = \frac{I}{MR} \alpha_{\text{exp}}. \quad (8)$$

Perceba que a igualdade das quantidades presentes nos dois membros da equação (8) não implica na coincidência numérica das mesmas (por exemplo $A=B=10$), justamente por se tratar de grandezas experimentais. O objetivo então será verificar se elas são condizentes dentro das incertezas experimentais envolvidas. Para tanto, calcule a quantidade $\frac{I}{MR} \alpha_{\text{exp}}$ assim como sua incerteza e compare com a_{exp} , que já possui uma incerteza própria. (para as grandezas I , M e R utilize os valores fornecidos pela tabela 1 do apêndice).

Voltando para a expressão (8), é fácil notar que ela também conduz a

$$\alpha_{\text{exp}} = \frac{MR}{I} a_{\text{exp}}. \quad (9)$$

Aqui, a igualdade matemática também pode ser questionada, de modo que você deve comparar os dois membros da expressão (9) levando em conta as incertezas. Para isso, calcule antes a quantidade $\frac{MR}{I} a_{\text{exp}}$ e sua incerteza e só depois compare com α_{exp} . Elas concordam?

B11. Pensando no rolamento *sem escorregamento*, temos a seguinte condição:

$$v = \omega R, \quad (10),$$

onde v e ω representam as velocidades linear e a angular respectivamente. Observe que v e ω correspondem aos coeficientes angulares obtidos no item B9. Proceda da mesma forma que no item anterior e diga se v_{exp} e ω_{exp} são compatíveis dentro das incertezas experimentais.

C) Procedimento de elaboração de relatório

Entregue um relatório com os seguintes itens:

C1. *Introdução*: apresente uma introdução resumida contendo o objetivo do experimento.

C2. *Descrição do experimento*: descreva o arranjo experimental de forma sucinta, não deixando de mencionar os principais dispositivos e componentes utilizados assim como suas características.

C3. *Análise de dados e resultados obtidos*: apresente os dados brutos extraídos da análise inicial do conjunto de fotos (tabela do item B1). Posteriormente, exiba a tabela construída nos itens B5, assim como os gráficos dos itens B2, B6, B8 e B9. Com todas essas informações, responda às questões referentes aos itens B6, B7, B8, B9, B10 e B11.

C4. *Conclusão*: volte para a introdução e atente para o objetivo do experimento. Escreva a conclusão se perguntando: “a experiência conseguiu atendê-lo? Por quê?”.

D) Apêndice

Tabela 1 – Tabela contendo informações relevantes à análise do experimento

| Dados | |
|--------------------|--------------------------------|
| Raio | $(27,9 \pm 0,3)\text{cm}$ |
| Momento de Inércia | $(297 \pm 6)10^3\text{g.cm}^2$ |
| Massa do aro | $(381,6 \pm 0,1)\text{g}$ |

D1. *Estimação da incerteza na posição linear*

A incerteza na posição linear foi estimada pensando no quadriculado de fundo. Como o menor quadrado possuía 2 cm de lado, pareceu-nos natural pensar na regra geral de utilizar como incerteza a metade da menor divisão, ou seja, 1cm. Entretanto, é possível observar que a nitidez da leitura varia de foto para foto, uma vez que depende do estado de movimento do aro, e ao utilizar 1 cm corremos o risco de ora subestimar ora superestimar a incerteza na posição linear. Para não utilizar um valor particular para cada foto, optamos por adotar um valor constante e igual a 1 cm.

D2. *Estimação da incerteza na posição angular*

A incerteza na posição angular foi estimada em parte pensando no quadriculado de fundo. Como foi utilizado o número de quadradinhos em X e em Y para que pudesse ser determinada a posição angular $\left(\theta = \arctg \frac{Y}{X}\right)$, a incerteza nesse valor pode ser obtida a partir da propagação de incerteza explicitada a seguir:

$$\sigma_{\theta}^2 = \left[\frac{\partial\theta}{\partial Y}\sigma_Y\right]^2 + \left[\frac{\partial\theta}{\partial X}\sigma_X\right]^2 \Rightarrow \sigma_{\theta}^2 = \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{Y}{X}\right)^2} \frac{1}{X}\right]^2 \sigma_X^2 + \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{Y}{X}\right)^2} \frac{Y}{X^2}\right]^2 \sigma_Y^2$$

Tomando como exemplo uma foto cujos valores de X, Y, σ_X e σ_Y são respectivamente 28 cm, 4 cm, 0,5 cm e 0,5 cm e substituindo na expressão obtém-se:

$$\sigma_{\theta}^2 = \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{4}{28}\right)^2} \frac{1}{28}\right]^2 0,5^2 + \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{4}{28}\right)^2} \frac{4}{28^2}\right]^2 0,5^2 = 0,0012 \Rightarrow \sigma_{\theta} = 0,04 \text{ rad.}$$

Em outra foto, os valores de X, Y, σ_X e σ_Y são respectivamente 23 cm, 18 cm, 0,5 cm e 0,5 cm. Substituindo na expressão de incertezas, vem

$$\sigma_{\theta}^2 = \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{18}{23}\right)^2} \frac{1}{23} \right]^2 0,5^2 + \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{18}{23}\right)^2} \frac{18}{23^2} \right]^2 0,5^2 = 0,0046 \Rightarrow \sigma_{\theta} = 0,07 \text{ rad.}$$

Vale lembrar que mesmo que as incertezas em X e em Y tenham sido fixadas, as medidas X e Y refletem a variação da incerteza na leitura das mesmas, de foto para foto e de situação para situação. Por isso, a diferença nos valores obtidos anteriormente (0,04 rad e 0,07 rad) já era em parte esperada. Não mostramos aqui, mas para outros conjuntos de fotos, obtivemos valores de incerteza intermediários. Temos de decidir agora por qual valor optar, e o critério utilizado será a avaliação educada. Olhando para as fotos, percebemos que 0,04 rad (aproximadamente 2°) confere aos nossos dados uma precisão muito maior do que temos. O valor 0,07 rad (aproximadamente 4°) já é mais plausível. Portanto, adotaremos 0,07 rad para a incerteza angular.

Uma outra maneira de estimá-la é utilizando recursos visuais. Para isso vamos começar com um chute inicial obtido por meio do raciocínio a seguir. Considere a figura 1. Ela representa uma foto do aro em movimento. Detalhando parte dela, é possível perceber que tanto o comprimento da marca na borda do aro quanto a “dilatação” da fita próxima à extremidade do mesmo são da ordem de $2\sqrt{2}$ cm, que é o valor da diagonal do quadradinho de lado 2 cm.

Com boa aproximação, podemos atribuir essa estimativa ao comprimento de arco tomado pela marcação (e pela fita próxima a ela) (figura 2). Se o raio vale $R = 27,9$ cm, o arco subtende um ângulo de

$$\theta = \frac{2\sqrt{2}}{27,9} = 0,10 \text{ rad,}$$

e isso equivale a um ângulo próximo de 6° .

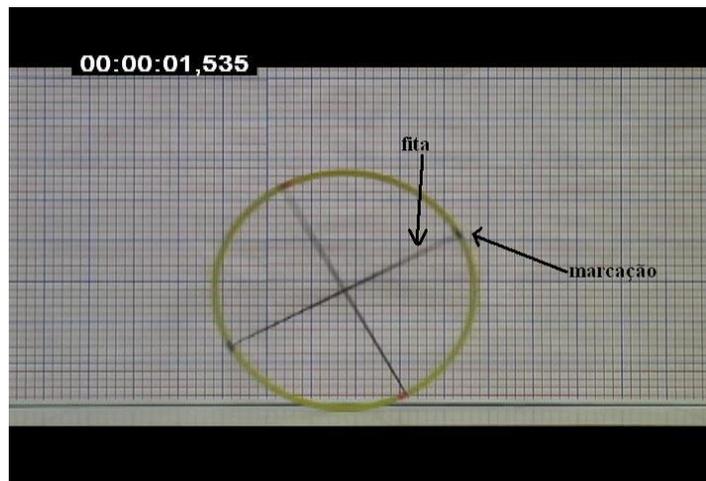


Figura 1 – A fita “dilatada” e a marcação na borda do aro são da mesma ordem de tamanho da diagonal do quadradinho de lado 2cm.

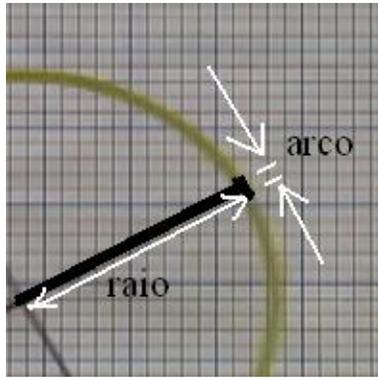


Figura 2 – A marcação é com boa aproximação um arco de circunferência de mesmo raio que o aro. Logo, é possível calcular o seu correspondente valor em termos de ângulo.

Devemos pensar agora no deslocamento angular mínimo que se pode medir. Essa é uma questão difícil de ser respondida porque a nitidez da imagem e, portanto, o deslocamento mínimo mensurável varia de foto para foto, de acordo com o estado de movimento do aro. Consideramos que na maioria dos casos é muito cômodo medir 6 graus, mas algo em torno de dois terços disso já se torna um pouco duvidoso. Assim, adotaremos a incerteza na medição do ângulo como sendo

$$\sigma_{\theta} = \frac{2}{3} 6^{\circ} = 4^{\circ} \cong 0,07 \text{ rad} .$$

D3. Inércia rotacional

O valor de inércia rotacional adotado nessa experiência é fruto de uma aproximação que se mostrou bastante eficaz em termos da concordância dos dados. Como utilizamos um aro de bicicleta, foi natural pensar que o seu momento de inércia real não fosse muito distante do momento teórico de um aro em relação ao eixo que passa pelo seu centro e é perpendicular ao plano que contém sua borda. Em outras palavras, esperávamos algo próximo de

$$I = MR^2 , \quad (1)$$

onde M é a massa do aro e R o seu raio. Entretanto, a dedução de tal expressão passa pela consideração de que o aro é delgado, ou seja, um anel cuja espessura da borda é muitíssimo pequena, além de se supor que ele seja perfeitamente circular.

No nosso caso, o aro possuía um formato mostrado na figura 1a, o que nos força a pensar sobre correções caso queiramos usar a expressão anterior. Para tanto, supomos que a seção reta do aro (figura 1b) se mantivesse sempre a mesma. Chamamos também de R_{int} a distância de seu centro

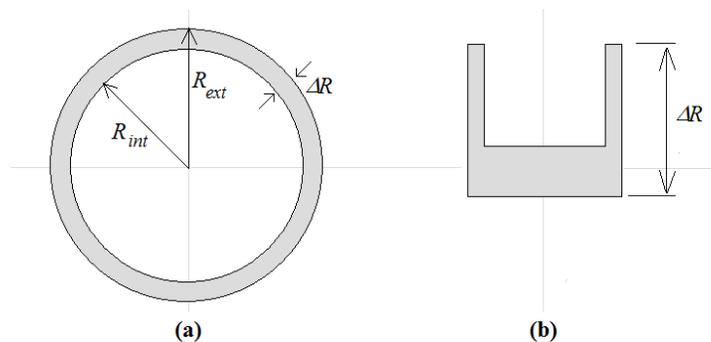


Figura 1 – a) Esquema do aro utilizado; b) seção reta do aro.

geométrico (aproximado) até a borda interna, e de R_{ext} a distância entre o seu centro e a borda externa. Definimos ΔR como sendo a distância da borda interna até a borda externa, isto é, $\Delta R = R_{ext} - R_{int}$. Como melhor estimativa para o raio apresentado na primeira expressão, usamos que $R \approx B = R_{int} + \Delta R/3$, de modo que a inércia rotacional é dada por

$$I = MB^2. \quad (2)$$

Por meio da utilização de trenas e fitas métricas, chegamos a $R_{int} = (27,5 \pm 0,3) \text{ cm}$ e $\Delta R = (1,23 \pm 0,05) \text{ cm}$. A massa foi medida com o auxílio de uma balança digital, que resultou em $M = (381,6 \pm 0,1) \text{ g}$. Assim, obtemos um valor de inércia rotacional de $I = 297 \cdot 10^3 \text{ g} \cdot \text{cm}^2$. Pelo método da propagação de incertezas (para maiores informações sobre as incertezas, acesse o texto “Roteiro da determinação de incerteza” na página “Guias” do site de experimentos) aplicado à expressão (ii), podemos escrever:

$$\sigma_I^2 = \left(\frac{\partial I}{\partial M} \right)^2 \sigma_M^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial B} \right)^2 \sigma_B^2 = B^4 \sigma_M^2 + 4M^2 B^2 \sigma_B^2.$$

Colocando MB^2 em evidência, temos finalmente:

$$\sigma_I = I \sqrt{\left(\frac{\sigma_M}{M} \right)^2 + 4 \left(\frac{\sigma_B}{B} \right)^2}, \quad (3)$$

onde $\sigma_B = \left(\sigma_{R_{int}}^2 + \frac{\sigma_{\Delta R}^2}{9} \right)^{\frac{1}{2}}$. Substituindo os valores numéricos, obtemos $\sigma_I = 5,8 \cdot 10^3 \text{ g} \cdot \text{cm}^2$.

O valor final de I será

$$I = (297 \pm 6) 10^3 \text{ g} \cdot \text{cm}^2.$$