1 Resumo da semana 4

1.1 Método da Eliminação de Gauss

O objetivo é dar um algoritmo de resolução direta de um sistema de equações lineares:

$$\begin{array}{rcl} L_1 : a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots & & \vdots \\ L_n : a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

Na forma matricial podemos escrever

$$Ax = b$$

onde $A = (a_{ij})$ é a matriz dos coeficientes do sistema e $b = (b_i)$ é uma matriz coluna dos termos constantes do sistema.
O sistema está na forma triangular se $a_{ij} = 0$ sempre $i > j$. Neste caso resolvemos o sistema pelo *backward substitution*, ou seja

$$x_k = \frac{b_k - \sum_{j>k} a_{kj}x_j}{a_{kk}}$$

A idéia do método da eliminação de Gauss é tranformar o sistema original num sistema triangular equivalente usando as operações elementares de linha:

- troca de linhas $L_i \leftrightarrow L_j$
- Multiplicar uma linha por número diferente de zero: $L_i = \alpha L_i$
- Substituição de linhas: $L_j = L_j + \alpha L_k$

A triangularização acontece executando-se $n-1$ passos como segue:
No passo k: Se $a_{kk} \neq 0$, repita para as linhas $k+1$ até n as substituições $L_j = L_j - (a_{jk}/a_{kk})L_k$
O sistema assim triangularizado é resolvido com *backward substitution.*
O algoritmo fica mais estável quando realizamos a *pivotação parcial*: Antes de executarmos o k-ésimo passo da triangularização, buscamos na k-ésima

coluna, e a partir da k-ésima linha o elemento de maior valor absoluto. A linha deste elemento trocamos com a linha k e executamos o k-ésimo passo. Note que se depois da pivotação a_{kk} for zero é porque todos os elementos daquela devem ser zeros.
A solução encontrada só difere da real, por causa dos erros de arredondamento que acontecem nas muitas contas que se faz.