Expansão em frações parciais (Revisão)

Seja $F(s)$ a Transformada de Laplace da função $f(t)$. Em muitas situações de análise de sistemas a função $F(s)$ encontra-se na forma:

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1}s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}$$

sendo $B(s)$ e $A(s)$ polinômios em s. Nem sempre essa forma é de fácil análise e implementação. Uma representação em termos de funções elementares

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = F_1(s) + F_2(s) + \cdots + F_{n-1}(s) + F_n(s)$$

pode facilitar em muitas situações, por exemplo, para obter a Transformada de Laplace inversa. O método de expansão em frações parciais resumido a seguir permite representar $F(s)$ como um somatório de funções elementares de forma sistemática.

1. Considera-se que o polinômio do denominador $A(s)$ tem grau maior que o polinômio do numerador $B(s)$. Se não for esse o caso, $B(s)$ deve ser dividido por $A(s)$ para resultar um polinômio em s mais um resto, ou seja, uma relação de polinômio em s cujo numerador é de grau menor que o denominador.
2. Obter as raízes do polinômio do numerador (zeros) e do denominador (pólos), ou seja, colocar $F(s)$ na forma $F(s) = \dfrac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$, sendo $m < n$.
   Observe que os pólos e zeros podem ser quantidades reais ou complexas e para cada pólo e/ou zero complexo existe o correspondente complexo conjugado.
3. <u>Se os pólos forem distintos</u> a função $F(s)$ pode ser expandida em uma soma de frações parciais simples, ou seja, $F(s) = \dfrac{a_1}{(s-p_1)} + \dfrac{a_2}{(s-p_2)} + \cdots + \dfrac{a_n}{(s-p_n)}$
   o termo a_k para $k = 1,2,\cdots,n$ é um coeficiente constante, chamado de resíduo do pólo em $s = p_k$. O valor de a_k é obtido multiplicando ambos os lados da expressão de *F(s)* acima por $(s-p_k)$ e fazendo $s = p_k$, de modo que
   $$a_k = \left[(s-p_k)\frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=p_k}$$
   Cabe notar que $f(t)$ aqui considerada é uma função real, portanto, por exemplo, se p_1 e p_2 forem complexos conjugados, então os resíduos a_1 e a_2 também serão complexos conjugados. Portanto, somente a_1 ou a_2 deve ser calculado, porque o outro é o complexo conjugado.
4. <u>Se os pólos forem múltiplos</u>, diferente do que acontece no caso de pólos distintos em que cada pólo tem apenas um termo elementar, um pólo com multiplicidade r tem r termos elementares.
   Por exemplo, se $A(s) = (s-p_1)^{r_1}(s-p_2)^{r_2}(s-p_3)$, a decomposição em frações parciais é dada por

$$F(s) = \frac{b_{1,r_1}}{(s-p_1)^{r_1}} + \frac{b_{1,r_1-1}}{(s-p_1)^{r_1-1}} + \cdots + \frac{b_{1,1}}{(s-p_1)} + \frac{b_{2,r_2}}{(s-p_2)^{r_2}} + \frac{b_{2,r_2-1}}{(s-p_2)^{r_2-1}} + \cdots + \frac{b_{2,1}}{(s-p_2)} + \frac{b_3}{(s-p_3)}$$

o valor de $b_{i,r_k-\ell}$ é obtido da seguinte forma $b_{i,r_k-\ell} = \frac{1}{\ell!}\frac{d^\ell}{ds^\ell}\left[F(s)(s-p_i)^{r_k}\right]_{s=p_i}$

Exemplo de caso com pólos simples

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\alpha(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} \qquad m<n$$

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_1}{(s-p_1)} + \frac{a_2}{(s-p_2)} + \cdots + \frac{a_N}{(s-p_n)}$$

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_1}{(s-p_1)} + \frac{a_2}{(s-p_2)} + \cdots + \frac{a_N}{(s-p_n)}$$

$$(s-p_k)\left.\frac{N(s)}{D(s)}\right|_{s=p_k} = \frac{a_1}{(s-p_1)}(s-p_k) + \frac{a_2}{(s-p_2)}(s-p_k) + \cdots + \frac{a_k}{\cancel{(s-p_k)}}\cancel{(s-p_k)} + \cdots + \left.\frac{a_N}{(s-p_n)}(s-p_k)\right|_{s=-p_k}$$

$$(s-p_k)\left.\frac{N(s)}{D(s)}\right|_{s=p_k} = a_k \qquad \rightarrow \text{resíduo no pólo } s=p_k$$

$$L^{-1}\left[\frac{a_k}{s-p_k}\right] = a_k e^{p_k t}\cdot \mathbf{1}(t)$$

Obs.: o exemplo acima não é apropriado para o caso de pólos complexos. No caso de pólos complexos, convirá juntar as duas frações parciais correspondentes aos pólos complexos conjugados em uma só fração, com denominador de segundo grau e todos elementos reais.

Exemplo de caso com pólos múltiplos

$$\frac{N(s)}{D(s)} = G(s) = \frac{s^2+2s+3}{(s+1)^3} = \frac{b_1}{s+1} + \frac{b_2}{(s+1)^2} + \frac{b_3}{(s+1)^3}$$

$$(s+1)^3\frac{N(s)}{D(s)} = b_1(s+1)^2 + b_2(s+1) + b_3 \qquad \text{(Eq.1)}$$

E com $s=-1$

$$b_3 = \left[(s+1)^3\frac{N(s)}{D(s)}\right]_{s=-1} = 2$$

Derivando a Eq.1 em relação a s:

$$\frac{d}{ds}\left[(s+1)^3\frac{N(s)}{D(s)}\right]=b_2+2b_1(s+1) \qquad \text{(Eq.2)}$$

E com $s=-1$

$$b_2=\frac{d}{ds}\left[(s+1)^3\frac{N(s)}{D(s)}\right]\Bigg|_{s=-1}=2s+2\big|_{s=-1}=0$$

Derivando a Eq.2 em relação a s e então tomando $s=-1$:

$$\frac{d^2}{ds^2}\left[(s+1)^3\frac{N(s)}{D(s)}\right]\Bigg|_{s=-1}=2b_1=2 \qquad \therefore b_1=1$$

$$\therefore G(s)=\frac{s^2+2s+3}{(s+1)^3}=\frac{1}{s+1}+\frac{2}{(s+1)^3}$$

E

$$\therefore g(t)=\left[e^{-t}+2\frac{t^2e^{-t}}{2}\right]\mathbf{1}(t)$$

Em Matlab:

$N(s)=num=[\qquad\qquad]$
$D(s)=den=[\qquad\qquad]$

$[r,\quad p,\quad k]=residue(num,den)$
$r\ \rightarrow$ resíduos
$p\ \rightarrow$ pólos
$k\ \rightarrow$ termo direto ou constante

Por exemplo:

$$\frac{2s^3+5s^2+3s+6}{s^3+6s^2+11s+6}$$

% comandos usados no MatLab
$num=[2\quad 5\quad 3\quad 6];$
$den=[1\quad 6\quad 11\quad 6];$
$[r,\quad p,\quad k]=residue(num,den)$

% resultados

$r = [-6 \quad -4 \quad 3]$

$p = [-3 \quad -2 \quad -1]$

$k = 2$