Lista 05 – Série e Transformada de Fourier

1) Sabendo que o sinal *x(t)* :

- é um sinal real, sem nível DC e com simetria par
- periódico com período $T_o = 4$
- na representação exponencial complexa possui os coeficientes $c_k = 0$ para |k| >1
- $\frac{1}{4}\int_{T_o} |x(t)|^2 \; dt = 13$

Determine *x(t)*.

2) A resposta impulsiva de um circuito RC que relaciona a tensão de entrada com a tensão no capacitor é $h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \mathbf{1}(t)$ sendo RC=1/8 seg.

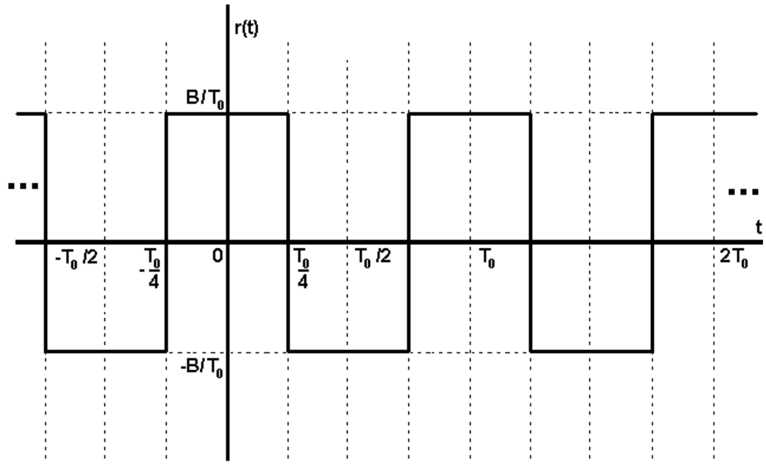
a.1) Encontre a resposta em freqüência do sistema. **(0.4)**

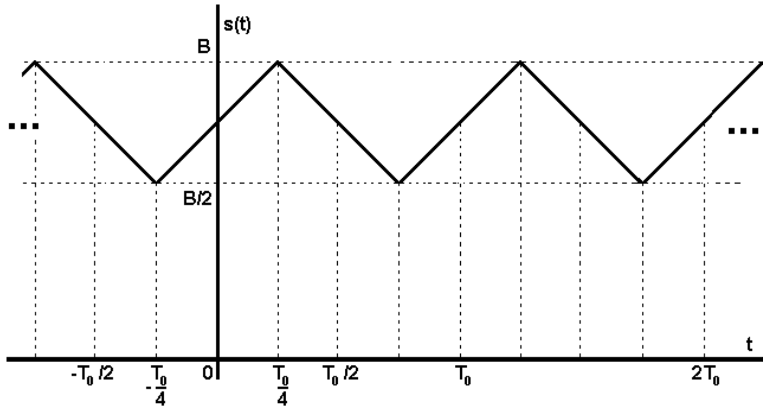
a.2) Faça o esboço do módulo e fase da resposta em freqüência. **(0.8)**

a.3) Considere uma onda periódica retangular *u(t)* com período $T_o = 1$ e uma taxa de trabalho de *1/4*. Determine a expressão para *u(t)* em termos de um somatório de exponenciais complexas com os parâmetros especificados. **(1.0)**

a.4) Encontre a representação de Fourier para a tensão no capacitor, ou seja, a saída do sistema quando a tensão de entrada é a onda retangular periódica do Item **a.3)**. **(1.0)**

3) Supondo que B e T_0 são constantes. Considere os sinais periódicos $r(t)$ e $s(t)$ apresentados nas figuras abaixo.





a) Determine a expansão em série de Fourier na forma complexa de $r(t)$;

b) Suponha que o sinal $r(t)$ seja a entrada de um filtro **passa-baixas ideal** com freqüência de corte $\omega_c = \frac{3 \cdot \pi}{T_0}$. Determine a saída do filtro **passa-baixas ideal** no domínio do tempo;

c) Determine a expansão em série de Fourier na forma complexa de $s(t)$.

Dica: $\begin{cases} \frac{d}{dt}(a \cdot t + b) = a \\ \frac{d}{dt}\left[a \cdot e^{f(t)}\right] = \frac{d}{dt} f(t) \cdot a \cdot e^{f(t)} \end{cases}$, onde a e b são constantes e $f(t)$ é uma função de t.

4)

a) Calcule a transformada de Fourier $S(\omega)$ da função $s(t)$

$$s(t) = \begin{cases} 0, & t < -1 \\ 1, & -1 < t < 0 \\ 2, & 0 < t < 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$$

b) Quanto deve valer $S(0)$?

c) Desenhe as curvas de $|S(\omega)|$ e $\angle S(\omega)$. (Este item deve ser resolvido com auxílio computacional)

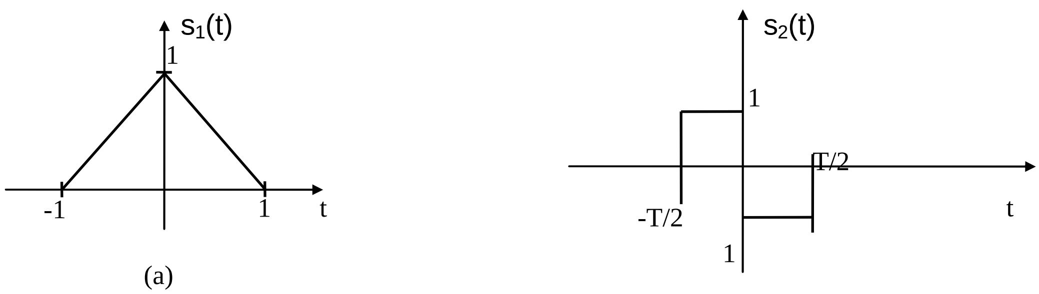
5) Sabendo que a transformada de Fourier de $s(t)$ é dada por:

$$S(\omega)=\begin{cases}0, & -\infty<\omega<-2\\ 2, & -2<\omega<-1\\ 1, & -1<\omega<1\\ 2, & 1<\omega<2\\ 0, & 2<\omega<\infty\end{cases}$$

Determine $s(t)$.

(Nilson, p.760)

6) Sabendo que a transformada de Fourier do pulso triangular da Figura 1.a. é $S_1(\omega)=\left[\dfrac{sen\left(\dfrac{\omega}{2}\right)}{\dfrac{\omega}{2}}\right]^2$. Determine a transformada de Fourier do sinal da Figura 1.b.



(a) (b)

Figura 1

7) A transformada de Fourier de um sinal complexo $s(t)$ é $S(\omega)$.

a) Define-se o sinal $y(t)=s(-t)$. Determine $Y(\omega)$, transformada de Fourier de $y(t)$, em função de $S(\omega)$;

b) Mostre que o sinal $z(t)=s(t)+y(t)$ e sua transformada $Z(\omega)$ são funções pares;

c) Como se modificam os resultados anteriores se $s(t)$ for real;

d) Tome $s(t)=e^{j\cdot 2\cdot\pi\cdot t}$ e desenhe $s(t)$, $S(\omega)$, $y(t)$, $Y(\omega)$, $z(t)$ e $Z(\omega)$. Comente o que você obteve para $Z(\omega)$.

(1ª Prova, 1990)

8) O programa Mathcad forneceu o seguinte par de Fourier

$$\mathbf{1}(t-T)-\mathbf{1}(t+T) \leftrightarrow \frac{-j}{\omega}\cdot e^{-j\cdot\omega\cdot T}+\frac{j}{\omega}\cdot e^{j\cdot\omega\cdot T}$$

onde $\mathbf{1}(.)$ é a função de Heaviside.

Verifique este resultado e calcule também a transformada de Fourier da função $1(t-T)+1(t+T)$.

9) Considere a transformada de Fourier (real e par) $G(\omega)=e^{-a\cdot|\omega|^n}$, com n sendo um número inteiro positivo fixo. Sem calcular $g(t)$ explicitamente (não é aconselhável tentar, a perda de tempo será muito grande!) responda às seguintes perguntas:

a) $g(t)$ tem simetria par, simetria ímpar ou nenhuma delas? Justifique brevemente.

b) $g(t)$ tem parte real nula, parte real imaginária nula ou nenhuma delas é sempre nula? Justifique brevemente.

c) Determine $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt$, explicitando os seus cálculos ou raciocínio feito.

(3ª Prova, 1999)

10) Um sinal $s(t)$, com espectro

$$S(\omega)=\sum_{k=1}^{3}\left\{\frac{12\cdot\pi}{k}\cdot\left[\delta(\omega-2\cdot k)+\delta(\omega+2\cdot k)\right]\right\}$$

é gravado magneticamente em fita, com velocidade de gravação v_0.

a) Determine $s(t)$.

b) Este sinal é reproduzido, com uma velocidade de leitura igual a $5\cdot v_0$.

Determine o sinal reproduzido, $s_2(t)$, e seu espectro $S_2(\omega)$.

c) O sinal $s_2(t)$ é aplicado a um filtro passa-baixas ideal, com a função de transferência

$$H(\omega)=\begin{cases}1, |\omega|<15\\ 0, |\omega|>15\end{cases}$$

Determine o sinal na saída do filtro.

(Prova de recuperação, Fev. 1992)

11) O sistema de simulação da Figura 2 com entrada $u(t)$ e saída $y(t)$, é suposto em repouso (condição inicial nula) em $t = -\infty$.

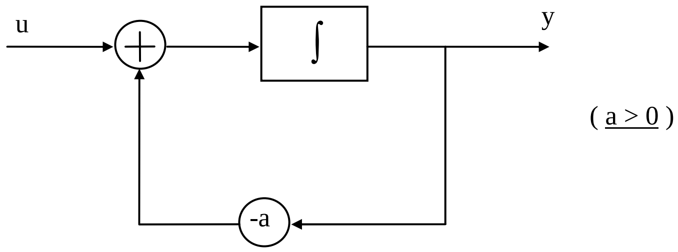


Figura 2

a) Determine a função de transferência transformada segundo Fourier $G(\omega) = \dfrac{Y(\omega)}{U(\omega)}$

b) Sendo $U(\omega) = 2 \cdot \pi \cdot A \cdot \delta(\omega)$, $A > 0$, qual será a resposta $y(t)$ do sistema? Esta resposta poderá ser obtida por simples inspeção do sistema?

c) Suponha agora que $U(\omega) = \dfrac{A}{j \cdot \omega}$. Qual será a nova saída $y(t)$? Faça um gráfico de $y(t)$.

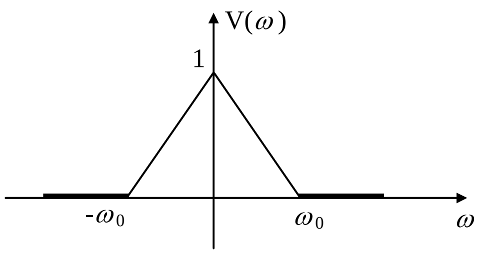
12) A resposta em freqüência de um sistema linear e invariante no tempo é dada por:

$$H(\omega) = \frac{\omega - j \cdot a}{\omega - j \cdot b}, \quad a > 0, \quad b > 0$$

Este sistema, em repouso, é excitado pelo sinal $v(t) = e^{-a \cdot t} \cdot 1(t)$.

a) Determine a resposta $y(t)$ do sistema utilizando a transformada de Fourier.

b) Um sinal $v(t)$ tem a transformada de Fourier esquematizada a seguir:



Este sinal é multiplicado por um sinal co-senoidal de amplitude A e freqüência $3 \cdot \omega_0$ gerando o sinal $y(t) = A \cdot v(t) \cdot \cos(3 \cdot \omega_0 \cdot t)$. Determine uma expressão para $Y(\omega)$ em função de $V(\omega)$ e esboce o gráfico de $|Y(\omega)|$.

(Substitutiva, 1999)

13) Demonstre as seguintes propriedades:

a) Deslocamento no tempo;

b) Deslocamento em freqüência;

c) Dualidade tempo-freqüência;

d) Simetria conjugada;

e) Simetria par e simetria ímpar;

f) Mudança de escala de tempo;

g) Derivada no tempo e na freqüência;

h) Integral.

14) Demonstre o teorema da convolução no tempo e da convolução em freqüência.

15) Demonstre a relação de Parseval.

16) Esboce o sinal $e^{-|t|}\cos(10t)$. Determine a sua transformada de Fourier e esboce o seu espectro.

(B. P. Lathi, Sinais e sistemas lineares, E.7.7,2ª Ed., Bookman, 2007)

17) Mostre que um filtro com resposta em freqüência $H(\omega) = e^{-\alpha\omega^2}$ é não realizável.

(B. P. Lathi, Sinais e sistemas lineares, E.7.12,2ª Ed., Bookman, 2007)

18) Mostre que se *x(t)* é uma função par de *t*, então, $X(\omega) = 2\int_0^{\infty} x(t)\cos\omega t\ dt$ e se *x(t)* for uma função ímpar de *t*, então, $X(\omega) = -2j\int_0^{\infty} x(t)\,\text{sen}\,\omega t\ dt$ Logo, prove que se x(t) for real e uma função par de t, então, $X(\omega)$ é real e uma função par de ω. Além disso, se x(t) for real e uma função ímpar de t, então, $X(\omega)$ é imaginário e uma função ímpar de ω.

(B. P. Lathi, Sinais e sistemas lineares, 7.1-1,2ª Ed., Bookman, 2007)

19) Encontre a transformada de Fourier do sinal pulso gaussiano:

$$x(t) = e^{-at^2} \qquad a > 0$$

(H. P. Hsu, Signals and systems, p.261, McGraw-Hill, 1995)

20) Considere um sistema linear e invariante no tempo descrito por:

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = u(t)$$

Usando a transformada de Fourier, encontre a saída $y(t)$ para cada um dos seguintes sinais de entrada:

a) $u(t) = e^{-t} \cdot \mathbf{1}(t)$;

b) $u(t) = \mathbf{1}(t)$

onde $\mathbf{1}(t)$ é a função de Heaviside.

(H. P. Hsu, Signals and systems, p.263, McGraw-Hill, 1995)

21) Um deslocador de fase de $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ *rad* $\left(ou \ \ -90^o\right)$ ideal é definido pela resposta em freqüência:

$$H(\omega) = \begin{cases} e^{-j\frac{\pi}{2}} & \omega > 0 \\ e^{+j\frac{\pi}{2}} & \omega < 0 \end{cases}$$

a) Encontre a resposta impulsiva $h(t)$ deste deslocador de fase;

b) Encontre a saída $y(t)$ para este deslocador de fase devido a uma entrada arbitrária $u(t)$;

c) Encontre a saída $y(t)$ quando $x(t) = \cos(\omega_0 t)$.

(H. P. Hsu, Signals and systems, p.269, McGraw-Hill, 1995)

22) Considere um filtro passa-baixas ideal com resposta em freqüência

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

A entrada do filtro é

$$u(t) = \frac{sen(at)}{\pi t}$$

a) Encontre a saída $y(t)$ para $a < \omega_c$;

b) Encontre a saída $y(t)$ para $a > \omega_c$;

c) Em qual dos casos a saída sofrerá distorção?

(H. P. Hsu, Signals and systems, p.273, McGraw-Hill, 1995)

23) Considere um filtro passa-baixas ideal com resposta em freqüência

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

A entrada do filtro é

$$u(t) = e^{-2t} \cdot \mathbf{1}(t)$$

Encontre o valor de ω_c tal que este filtro passe exatamente metade da energia normalizada do sinal de entrada $u(t)$.

(H. P. Hsu, Signals and systems, p.273, McGraw-Hill, 1995)

24) Seja $x(t)$ um sinal real com banda limitada especificado por

$$X(\omega) = 0 \qquad |\omega| > \omega_M$$

Seja $x_s(t)$ definido por

$$x_s(t) = x(t) \cdot \delta_{T_s}(t) = x(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_s)$$

a) Esboce $x_s(t)$ para $T_s < \dfrac{\pi}{\omega_M}$ e para $T_s > \dfrac{\pi}{\omega_M}$;

b) Encontre e esboce o espectro de Fourier $X_s(\omega)$ de $x_s(t)$ para $T_s < \dfrac{\pi}{\omega_M}$ e para $T_s > \dfrac{\pi}{\omega_M}$.

(H. P. Hsu, Signals and systems, p.273, McGraw-Hill, 1995)

25) Seja $x(t)$ um sinal real de banda limitada especificado por

$$X(\omega) = 0 \qquad |\omega| > \omega_M$$

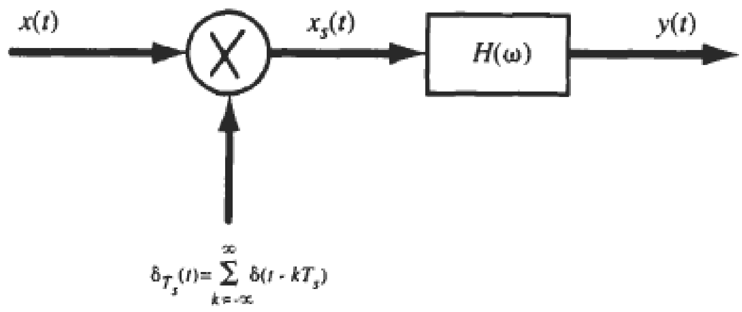
Mostre que $x(t)$ pode ser expresso como

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_s) \cdot \frac{sen[\omega_M (t - kT_s)]}{\omega_M (t - kT_s)}$$

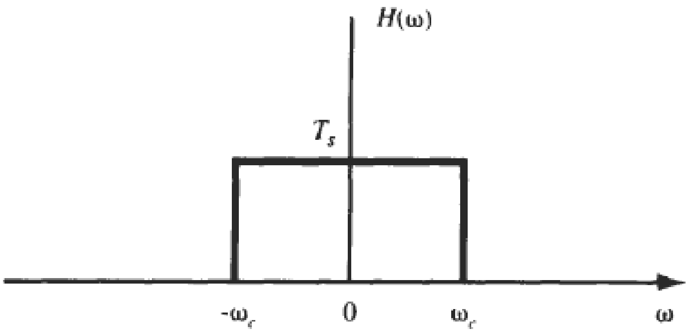
onde $T_s = \dfrac{\pi}{\omega_M}$.

(H. P. Hsu, Signals and systems, p.280, McGraw-Hill, 1995)

26) Considere o sistema apresentado na figura abaixo



A resposta em freqüência $H(\omega)$ do filtro ideal passa-baixas é dada por



$$H(\omega)=\begin{cases} T_s & |\omega|<\omega_c \\ 0 & |\omega|>\omega_c \end{cases}$$

Mostre que se $\omega_c=\dfrac{\omega_s}{2}$, então para qualquer escolha de T_s,

$$y(m\cdot T_s)=x(m\cdot T_s) \qquad\qquad m=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

(H. P. Hsu, Signals and systems, p.281, McGraw-Hill, 1995)

27) Seja $x(t)$ um sinal com transformada de Fourier $X(\omega)$ dada por

$$X(\omega)=\begin{cases} 1 & |\omega|<1 \\ 0 & |\omega|>1 \end{cases}$$

Considere o sinal

$$y(t)=\frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

Encontre o valor de

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|y(t)|^2dt$$

Dica: Utilize a relação de Parseval.

(H. P. Hsu, Signals and systems, p.285, McGraw-Hill, 1995)

28) Um sinal real $s_1(t)$ tem o espectro da Figura 1.1 (estamos supondo um espectro real para facilitar os desenhos). Ele é multiplicado por um co-seno e o sinal resultante, x(t), é multiplicado por um co-seno de outra freqüência. Este sinal resultante, $s_2(t)$ é passado por um filtro passa-baixas ideal, com ganho unitário, frequência angular de corte em 200π rad/s e curva de defasagem nula, resultando no sinal y(t). Veja a Figura 1.2.

Mostrando as passagens matemáticas apropriadas, desenhe os espectros dos sinais:

a) x(t)
b) $s_2(t)$
c) y(t)

Notas: (1) <u>espectros sem a devida justificativa matemática não terão pontuação nenhuma.</u>

(2) cosA cosB=1/2[cos(A+B)+cos(A-B)]

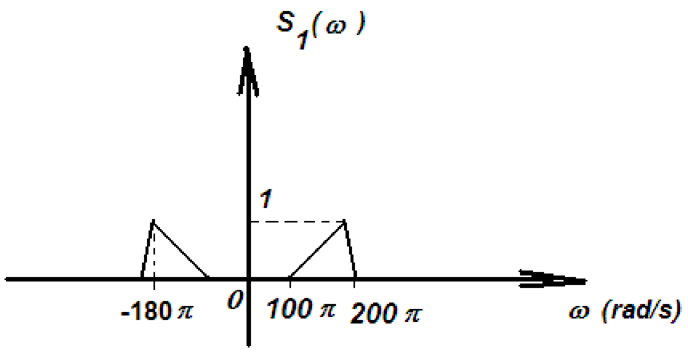


Figura 1.1

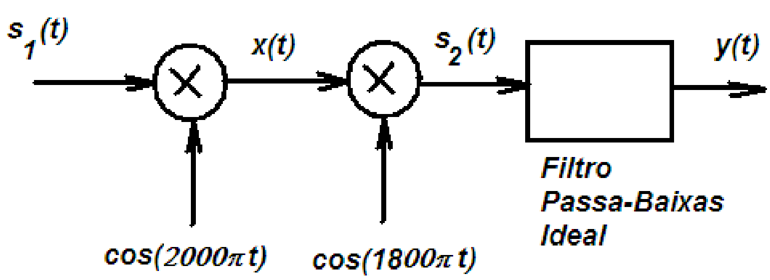


Figura 1.2