

1 Resumo da semana 10

1.1 Aproximação pelo Método dos Mínimos Quadrados

Dada uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e uma família de funções linearmente independentes $\Phi = \{g_0, \dots, g_k\}$, onde cada g_i é uma função $g_i : a, b \rightarrow \mathbb{R}$, queremos aproximar a função f por uma combinação linear $a_0 g_0 + \dots + a_k g_k$. Os coeficientes $a_0, \dots, a_k$ são escolhidos de forma a minimizar o erro quadrático:

$$M(a_0, \dots, a_k) = \langle r(x), r(x) \rangle \quad (1)$$

$$\text{onde } r(x) = f(x) - a_0 g_0(x) - \dots - a_k g_k(x) \quad (2)$$

O pseudo-produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ acima pode ser definido em duas situações:

- Caso contínuo: $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$
- Caso discreto: $\langle f, g \rangle = \sum_{j=0}^n f(x_j)g(x_j)$

Neste último caso, $\{x_0, \dots, x_n\}$ é um conjunto finito de pontos distintos do intervalo $[a, b]$ onde conhecemos a função que queremos aproximar f .

Para achar os coeficientes a_i que resolvem o nosso problema de otimização precisamos resolver o sistema linear, chamado sistema normal, de dimensão $k + 1$

$$\sum_{j=0}^k g_{ij} a_j = b_i \quad (3)$$

$$\text{onde } g_{ij} = \langle g_i, g_j \rangle \quad (4)$$

$$b_i = \langle f, g_i \rangle \quad (5)$$

1.2 Famílias de funções ortogonais

A família de funções, $\Phi = \{g_0, \dots, g_k\}$, é dita ortogonal quando $\langle g_i, g_j \rangle = 0$ se $i \neq j$, e $\langle g_i, g_i \rangle \neq 0 (> 0)$.

Polinômios ortogonais e a família de funções trigonométricas são exemplos importantes de famílias ortogonais.