1 Resumo da décima-quarta semana

1.1 Métodos numéricos das equações diferenciais ordinárias

O problema do valor inicial a ser resolvido é o de encontrar uma função $x(t)$ que satisfaça:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t))$$
$$x(t_0) = x_0$$

definida num intervalo $[t_0, t_f]$, supondo que $f(t, x)$ satisfaça as condições de existência e unicidade de solução. Os métodos numéricos irão construir estimativas x_i dos valores $x(t_i)$, definidos nos pontos $t_i = t_0 + hi$. O número h é o passo do método com $h = (t_f - t_0)/n$.

1.2 Método de Euler

É um método de primeira ordem:

$$x_{i+1} = x_i + hf(t_i, x_i)$$

1.3 Método de Taylor de ordem p

$$x(t + h) = x(t) + h\dot{x} + (h^2/2)\ddot{x} + \cdots + (h^p/p!)x^{(p)} + O(h^{p+1})$$
$$\dot{x} = f$$
$$\ddot{x} = f_t + f_x f$$
$$\ldots$$
$$x^{(p)} = F(f, f_t, f_x, \ldots, f^{(p)}_{x^l t^k})$$

daí obtemos um método numérico:

$$x_{i+1} = x_i + hf + (h^2/2)(f_t + f_x f) + \cdots + (h^p/p!)F(f, f_t, f_x, \ldots, f^{(p)}_{x^l t^k})$$

1.4 Métodos de Runge-Kutta de segunda ordem

Geral:

$$x_{i+1} = x_i + w_1 F_1 + w_2 F_2$$
$$F_1 = hf(t_i, x_i)$$
$$F_2 = hf(t_i + \alpha h, x_i + \beta F_1)$$

Método de Heun:

$$x_{i+1} = x_i + 0.5F_1 + 0.5F_2$$
$$F_1 = hf(t_i, x_i)$$
$$F_2 = hf(t_i + h, x_i + F_1)$$

Método de Euler modificado:

$$x_{i+1} = x_i + F_2$$
$$F_1 = hf(t_i, x_i)$$
$$F_2 = hf(t_i + 0.5h, x_i + 0.5F_1)$$

1.5 Runge-Kutta de ordem 4

Caso geral:

$$x_{i+1} = x_i + w_1F_1 + w_2F_2 + w_3F_3 + w_4F_4$$
$$F_1 = hf(t_i, x_i)$$
$$F_2 = hf(t_i + \alpha_1 h, x_i + \beta_1^1 F_1)$$
$$F_3 = hf(t_i + \alpha_2 h, x_i + \beta_1^2 F_1 + \beta_2^2 F_2)$$
$$F_4 = hf(t_i + \alpha_3 h, x_i + \beta_1^3 F_1 + \beta_2^3 F_2 + \beta_3^3 F_3)$$

RK4-clássico:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{1}{6}(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4)$$
$$F_1 = hf(t_i, x_i)$$
$$F_2 = hf(t_i + 0.5h, x_i + 0.5F_1)$$
$$F_3 = hf(t_i + 0.5h, x_i + 0.5F_2)$$
$$F_4 = hf(t_i + h, x_i + F_3)$$