

Segmentação de Imagens

□ **Motivação**

- Identificação de objetos
- Quantização: contagens, área, perímetro, volume
- Visualização 2D, 3D
- Reconhecimento de padrões
- Classificação

Segm.

→

Reconh. Padrões

→

Classif.

→

- Normal
- Patolog.
 - Congen.
 - Adquir.
 - ...

Segmentação de Imagens S.Furuiê - 1

Motivação: exemplo de contorno ativo (snake)

traditional snake
gradient vector flow, or GVF
spatial diffusion of the gradient of an edge map derived from the image

<http://iacl.ece.jhu.edu/projects/gvf/>
S.Furuiê - 2

Motivação

□ **Processos convencionais (manual e semi-automático) : demorados e cansativos**

- gated MRI : 16 volumes, 12 cortes => 192 img
- gated SPECT: idem

Segmentação de Imagens S.Furuiê - 3

Resultados em RM

Transv.
RM

VD

VE

Mioc.

Segmentação de Imagens S.Furuiê - 4

VE: pre-Ventriculotomia

Diástole

Segmentação de Imagens S.Furuiê - 5

VE: pre-ventriculotomia

Sístole

Segmentação de Imagens S.Furuiê - 6

Visão Global

- Operadores
- Técnicas de segmentação
 - > thresholding
 - > snakes
 - > region-growing
 - > split-merge
 - > fuzzy connectedness
 - > redes neurais
 - > métodos estatísticos
- Interpretação

Segmentação de Imagens S.Furuiê - 7

Segmentação de Imagens

- Classificação:
 - > manual
 - > semi-automático
 - > automático
- Métodos baseados em:
 - > atributos: thresholding
 - > bordas: gradiente, laplaciano e LoG
 - > regiões: region-growing, fuzzy connectedness, split and merge

Segmentação de Imagens S.Furuiê - 8

Como detectar bordas?

Segmentação de Imagens S.Furuiê - 9

Derivadas de ECG

y1=|1.a. difer.|

y2=|smooth y1|

y3=|der. y2|

y4=y2+y3

limiar em y4

10 *Segmentação de Imagens* S.Furuiê - 10

Derivadas e diferenças

Como estimar a derivada em um ponto?

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} \Big|_{x=i} = f\left(i + \frac{1}{2}\right) - f\left(i - \frac{1}{2}\right)$$

$$f\left(i + \frac{1}{2}\right) = \frac{f(i) + f(i+1)}{2}$$

$$f\left(i - \frac{1}{2}\right) = \frac{f(i-1) + f(i)}{2}$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} \Big|_{x=i} = \frac{f(i+1) - f(i-1)}{2}$$

Segmentação de Imagens S.Furuiê - 11

Como detectar bordas em imagens?

95	80	80	80
95	90	90	105
150	20	100	130
220	150	160	150

Segmentação de Imagens S.Furuiê - 12

Gradiente

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \vec{u}_y \quad (\text{Vetor !})$$

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_x = \frac{f(x+1, y) - f(x-1, y)}{2}$$

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_y = \frac{f(x, y+1) - f(x, y-1)}{2}$$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$	-1	0	1
	-1	0	1
	-1	0	1

Sobel		
-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$	-1	-1	-1
	0	0	0
	1	1	1

Sobel		
-1	-2	-1
0	0	0
1	2	1

Cuidado com representação computacional da imagem (índices)

S.Furuiê - 13

Módulo do vetor gradiente

$$|G(x, y)| = \sqrt{\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right)^2}$$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$	-1	0	1
	-1	0	1
	-1	0	1

Sobel		
-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$	-1	-1	-1
	0	0	0
	1	1	1

Sobel		
-1	-2	-1
0	0	0
1	2	1

S.Furuiê - 14

Exemplos de derivadas

ImageJ

- diferença entre elementos na horizontal (bordas verticais)
 - Derivada parcial em x
- diferença entre elementos na vertical (bordas horizontais)
 - Derivada parcial em y
- módulo do gradiente

95	80	80	80
95	90	90	105
150	20	100	130
220	150	160	150

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$	-1	0	1
	-1	0	1
	-1	0	1

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$	-1	-1	-1
	0	0	0
	1	1	1

S.Furuiê - 15

Laplaciano

S.Furuiê - 10

Laplace

$$\nabla^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}$$

$$\left. \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \right|_i = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2}} - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{i-\frac{1}{2}}$$

$$= (f(x+1, y) - f(x, y)) - (f(x, y) - f(x-1, y))$$

$$= f(x-1, y) - 2f(x, y) + f(x+1, y)$$

0	1	0
1	-4	1
0	1	0

$H(z) = (z^{-1} - 2 + z)$
 $H(w) = -2(1 - \cos(wT))$

S.Furuiê - 18

Laplaciano da Gaussiana (LoG)

- Edge detector
 - Gauss=>Smooth
 - Laplace=>Zero crossing

$Gauss(x, y) = \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right)$
 $g(x, y) = \nabla^2 Gauss(x, y) * f(x, y)$

S.Furuiê - 19

gradiente em nD?

- basta considerar os nD-vizinhos

Segmentação de Imagens S.Furuiê - 20

Exemplos de detecção de bordas

ImageJ

- ◆ convolução
- ◆ edges

Segmentação de Imagens S.Furuiê - 21

Segmentação por região

- Região: Region-growing
 - conectividade, afinidade, tamanho, forma, possibilidade
 - semente
 - para cada vizinho, agregar o mesmo se similar. Se agregado, considerar os vizinhos deste.
- Região: Split and Merge
 - quadtree, octree
 - testar homogeneidade de cada quadrante
 - se não homogêneo, subdividir e continuar até último quadrante
 - merge de quadrantes vizinhos com homogeneidades similares.

Segmentação de Imagens S.Furuiê - 22

Região: Region-growing

- conectividade, afinidade, tamanho, forma, possibilidade
 - semente
 - para cada vizinho não visitado, agregar o mesmo se similar. Se agregado, considerar os vizinhos deste (usar fila)

• extensão p/ tons de cinza e 3D

Segmentação de Imagens S.Furuiê - 23

Região: Split and Merge

- quadtree, octree
 - testar homogeneidade de cada quadrante
 - se não homogêneo, subdividir e continuar até último quadrante
 - merge de quadrantes vizinhos com homogeneidades similares.

Segmentação de Imagens S.Furuiê - 24

Split and Merge

- Split
 - Quadrees: 2^n Palavra-chave: similaridade

- Merge (p. ex. labeling)
- Estender p/ tons de cinza
- Estender p/ 3D

Segmentação de Imagens S.Furuiê - 25

Técnicas: Thresholding

- $T = T[f(x,y), x, y, p(x,y)]$
 - de imagem $f(x,y)$
 - $p(x,y)$: propriedade local
- Global
- Ótimo:
 - Menor erro de classificação
 - Maior separabilidade: Otsu
- Pode ser baseado em características da imagem: gradiente, laplaciano, ...
- multi-banda

S.Furuiê - 26

Thresholding ótimo: menor erro de classificação

$$\min_T \text{Erro}(T)$$

$$\text{Erro}(T) = P_2 \cdot \int_{-\infty}^T p_2(x) dx + P_1 \cdot \int_T^{\infty} p_1(x) dx$$

$$\frac{\partial \text{Erro}(T)}{\partial T} = 0 \Rightarrow P_1 \cdot p_1(T) = P_2 \cdot p_2(T)$$

S.Furuiê - 27

Optimal thresholding

$$p(x) = P_1 \cdot p_1(x) + P_2 \cdot p_2(x)$$

$$P_1 + P_2 = 1$$

$$\text{Erro} = P_2 \cdot \int_{-\infty}^T p_2(x) \cdot dx + P_1 \cdot \int_T^{\infty} p_1(x) \cdot dx$$

$$\min_T \text{Erro} \Rightarrow \frac{\partial \text{Erro}}{\partial T} = 0$$

$$\Rightarrow P_1 \cdot p_1(T) = P_2 \cdot p_2(T)$$

se Gaussiano e com mesma variância:

$$p_i(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left(-\frac{(x - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right)$$

$$T = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} + \frac{\sigma^2}{\mu_1 - \mu_2} \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$$

S.Furuiê - 28

Técnicas: Thresholding por Otsu

- Global
- Baseado no histograma
- Ótimo para casos discretos (intensidade): maximiza a separabilidade entre classes
- Definição de separabilidade ?

S.Furuiê - 29

Otsu

$$S(C_1, C_2) = \frac{\sigma_B^2(C_1, C_2)}{\sigma_0^2}$$

$$\sigma_0^2 = \sum_{i=0}^L (i - m_0)^2 \cdot P(i)$$

$$m_0 = \sum_{i=0}^L i \cdot P(i)$$

$$\sigma_B^2(C_1, C_2) = P_1(m_1 - m_0)^2 + P_2(m_2 - m_0)^2$$

$$m_1 = m_1(T) = \sum_{i=0}^T i \cdot P(i | C_1)$$

$$m_2 = m_2(T) = \sum_{i=T+1}^L i \cdot P(i | C_2)$$

$$\Rightarrow \max_T \sigma_B^2(C_1, C_2)$$

S.Furuiê - 30

Optimal thresholding: Otsu

$$m_1 = \sum_{i=0}^T i \cdot P(i | C_1) = \sum_{i=0}^T i \cdot \frac{P(C_1 | i) \cdot P(i)}{P(C_1)} = \frac{1}{P_1} \sum_{i=0}^T i \cdot P(i) = \frac{m(T)}{P_1}$$

$$m_2 = \sum_{i=T+1}^L i \cdot P(i | C_2) = \frac{m_0 - m(T)}{P_2}$$

$$\Rightarrow \sigma_B^2(C_1, C_2; T) = \frac{(m_0 P_1(T) - m(T))^2}{P_1(T) \cdot (1 - P_1(T))}$$

S.Furuiê - 31

Efeito da filtragem

FIGURE 10.40 (a) Noisy image from Fig. 10.36 and (b) its histogram. (c) Result obtained using Otsu's method. (d) Noisy image smoothed using a 5×5 averaging mask and (e) its histogram. (f) Result of thresholding using Otsu's method.

Segmentação de Imagens S.Furuié - 32

Técnicas: extensão Thresholding

- Múltiplas dimensões espaciais
- multi-atributos => histograma nD
- Global
- Pode ser otimizado
- Pode ser baseado em características: gradiente, laplaciano, ...

Segmentação de Imagens S.Furuié - 33

Exemplos: programando Plugin

- ImageJ
 - > Comparar com teste_sf_thresh

Segmentação de Imagens S.Furuié - 34

k-NN: k nearest neighbours

Segmentação de Imagens S.Furuié - 35

Isodata (k-means)

- 0) K classes com centro em c_j
- 1) Inicializar $c_j^{(0)}$
- 2) Para cada x_i => atribuir x_i p/ classe j com menor distancia
- 3) Recalcular c_j
- 4) Repetir 2) e 3) ate nao haver mais alter.

Segmentação de Imagens S.Furuié - 36

Segmentação de estruturas 3D dinâmicas

- Motivação
 - > medida e visualização de estruturas do mundo real
 - > estruturas dinâmicas
 - > coração, VE, miocárdio, ...
 - > parâmetros: FE, volume, área, ...
- Dificuldades
 - > elevado volume de dados: 16 vol. X 12 slices X 256 X 256 => 192 slices
 - > estruturas complexas : forma, superposição, diversas intersecções com um plano, não-homogeneidade, especificidade, ...

Segmentação de Imagens S.Furuié - 41

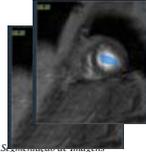
Segmentação por fuzzy connectedness

- PROBLEMA
 - Segmentação de estruturas 3D, 4D
 - Estruturas complexas
- PROPOSTA
 - conectividade fuzzy considerando múltiplas imagens de um objeto
- RAZÕES INTUITIVAS
 - estruturas de interesse tem voxels conectados (fuzzy) pelo menos em alguma dimensão
 - conectividade baseado em afinidade entre voxels
 - fácil expansão p/ 3D, 4D

Segmentação de Imagens S.Furuié - 42

Hipóteses

- Possibilidade de treinar o classificador através de uma amostra do objeto com características aproximadamente homogêneas.
- Os parâmetros estimados, através de um corte (treinamento), são válidos para todo o objeto;



Segmentação de Imagens S.Furuié - 43

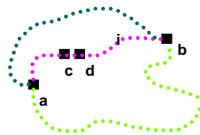
Fuzzyness

- fuzzy sets, membership
 - Domínio X
 - Fuzzy Set = { (x, f(x)) | x ∈ X }
 - f : X => [0,1] (membership)
- fuzzy relation
 - i ∈ X, j ∈ X
 - relation = { (i,j), r(i,j) }
 - r : X x X => [0,1]

Segmentação de Imagens S.Furuié - 45

Metodologia

- Cálculo da *conectividade* de cada voxel a cada objeto de interesse
 - Vínculo entre dois voxels depende da afinidade e da conectividade espacial em todos os caminhos possíveis



$$\text{afin}(c,d) = \text{adj}(c,d) \cdot h[f(c), f(d)]$$

$$v(a,b | i) = \min \{ \text{afin}(c,d) \}$$

$$\text{con}(a,b) = \max_i \{ v(a,b | i) \}$$

Segmentação de Imagens S.Furuié - 47

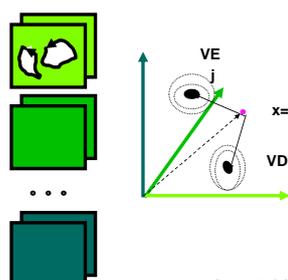
Metodologia

- Afinidade é baseado no vetor de atributos e adjacência
 - $\text{afin}(c,d) = h[\text{adj}(c,d), f(c), f(d), c, d]$
 - f(c): vetor de atributos do voxel c
- $\text{afin}(c,d) = \text{adj}(c,d) \cdot h[f(c), f(d)]$
- h() = grau de similaridade dos atributos ao objeto
- programação dinâmica

Segmentação de Imagens S.Furuié - 48

associação 'fuzzy'

função de associação : verossimilhança



$$h_j : R^M \rightarrow [0,1]$$

$$h_j(x) = \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot d_j^2(x)\right)$$

$$d_j^2(x) = (x - \bar{x}_j)^T \cdot S_j^{-1} \cdot (x - \bar{x}_j)$$

Segmentação de Imagens S.Furuié - 49

Algoritmo

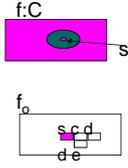
O algoritmo, para um dado objeto de interesse, consiste portanto em:

- Semente(s) de uma região fornecida pelo usuário;
- Estimar os parâmetros estatísticos (média e covariância) do objeto;
- Calcular a matriz de covariância inversa;
- Obter a conectividade de cada voxel a cada objeto
 - Para cada voxel, calcular a associação ao objeto
 - Calcular afinidade
 - Obter a conectividade (Programação dinâmica)

S.Furuié - 50

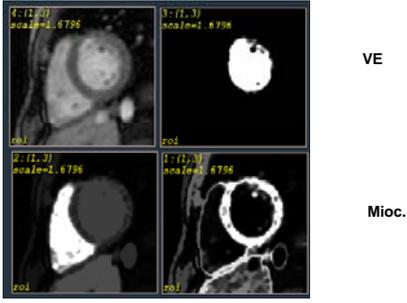
Conectividade Fuzzy

- **Algorit: Fuzzy Object Extraction**
 - Input: imagem (C,f) e seed **s**
 - Output: imagem (C_o,f_o)
 - Auxiliares:queue Q
 0. Set f_o(i)=0, i≠s e f_o(s)=1
 1. Push all spels **c** of C_o | affin(s,c)>0 to Q
 2. While Q is not empty do
 - 2.1. Remove a spel **c** from Q
 - 2.2. find f_{max}=max_d [min(f_o(d),affin(c,d))]
 - 2.3. if f_{max}> f_o(c) then
 - set f_o(c) = f_{max}
 - push all spels **e** | affin(c,e)>0 to Q
 - endif
 - 2.4. endwhile



S.Furuié - 51

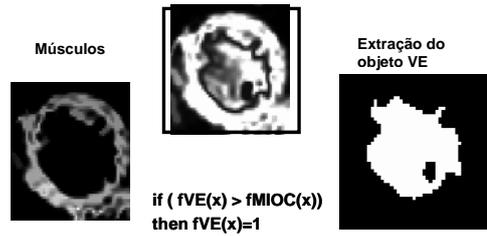
Resultados em RM



S.Furuié - 52

Competição

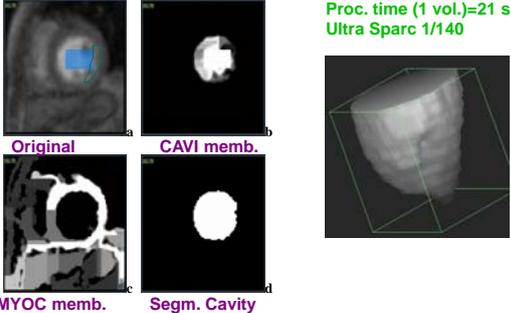
Imagem com a associação aos objetos VE e Mioc.



if (fVE(x) > fMIOC(x))
then fVE(x)=1
else fVE(x)=0

S.Furuié - 53

Cavity Segmentation: results



Proc. time (1 vol.)=21 s
Ultra Sparc 1/140

S.Furuié - 54

Segmentação de estr. deform.

- Baseados na intensidade do pixel/voxel
 - optical flow, region-growing, conectividade,...
 - ad hocs
- Baseados em contornos/superfícies
 - Snakes
 - Balloon
 - Topological snakes
- Baseados em marcas fiduciais (int. e ext.)
 - MR tagging

S.Furuié - 55

Snakes

- > Objetivo: segmentação (obtenção de contornos e superfícies)
- > Dado: imagem (intensidades) e solução inicial
 - obter uma função de energia (interna + externa) em função parametrizada
 - minimizar em relação ao contorno
 - analiticamente
 - numericamente: steepest descent, CG, ...

Segmentação de Imagens S.Furuiê - 56

Exemplos de snakes



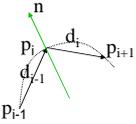


traditional snake
gradient vector flow, or GVF
spatial diffusion of the gradient of an edge map
derived from the image

<http://iacl.ece.jhu.edu/projects/gvf/>
Segmentação de Imagens
S.Furuiê - 57

Snakes: equilíbrio de forças

- 1) P/ cada vértice do contorno inicial, obter:
 - > forças internas (curvatura...)
 - > forças externas (gradiente ..)
- 2) Determinação iterativa da velocidade e posição



$$curv = \frac{\vec{d}_i - \vec{d}_{i-1}}{\|\vec{d}_i - \vec{d}_{i-1}\|}$$

$$f_{int} = (curv \otimes filtro)_{radial}$$

$$f_{ext} = (-\nabla I)_{radial}$$

$$\vec{a}_i^{(k+1)} = \frac{1}{m_i} \cdot \vec{f}_i^{(k+1)}$$

$$\vec{v}_i^{(k+1)} = \vec{v}_i^{(k)} + \vec{a}_i^{(k+1)} \cdot \Delta t$$

$$\vec{p}_i^{(k+1)} = \vec{p}_i^{(k)} + \vec{v}_i^{(k+1)} \cdot \Delta t$$

Segmentação de Imagens S.Furuiê - 58

Snakes: fundamento

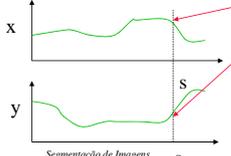
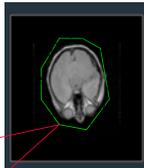
$c(s)$: config

$$E(c) = E_I(c) + E_E(c)$$

$$E(c) = \int_c [w_1 \left| \frac{\partial c}{\partial s} \right|^2 + w_2 \left| \frac{\partial^2 c}{\partial s^2} \right|^2] ds + \int_c w_3 \cdot P(c) \cdot ds$$

$\min_c E(c)$

$c(s) = (x(s), y(s))$

Segmentação de Imagens S.Furuiê - 59

Definição adequada da Energia

$$\min_c E(c)$$

$$E(c) = \int_c F(s; c, c', c'') \cdot ds$$

$$c(s), c', c''$$

$F(s; c(s), c'(s), c''(s))$
 $F(s; c + \epsilon v(s), c' + \epsilon v', c'' + \epsilon v'') = F(s; c, c', c'') + \epsilon v \cdot \frac{\partial F}{\partial c} + \epsilon v' \cdot \frac{\partial F}{\partial c'} + \epsilon v'' \cdot \frac{\partial F}{\partial c''} + \dots$

$$\min_\epsilon E \Rightarrow \frac{\partial E}{\partial \epsilon} = 0 \Rightarrow \text{Euler-Lagrang}$$

$$\frac{\partial F}{\partial c} - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial F}{\partial c'} \right) + \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{\partial F}{\partial c''} \right) = 0$$

Segmentação de Imagens S.Furuiê - 60

Definição adequada da Energia

- Elasticidade (suavidade do contorno)
- Rigidez (curvaturas)
- Informações de borda

$c(s)$: config

$$E(c) = E_I(c) + E_E(c)$$

$$E(c) = \int_c [w_1 \left| \frac{\partial c}{\partial s} \right|^2 + w_2 \left| \frac{\partial^2 c}{\partial s^2} \right|^2] ds + \int_c w_3 \cdot P(c) \cdot ds$$

$$P(c(s)) = -\|\nabla(G_\rho * \text{Im})\|$$

Segmentação de Imagens S.Furuiê - 61

Solução da minimização

Equilíbrio

$$E(c) = \int_c [w_1 |c'(s)|^2 + w_2 |c''(s)|^2] ds + \int_c w_3 \cdot P(c) \cdot ds$$

Euler - Lagrange =>

$$-\frac{d}{ds} (w_1 \cdot \frac{dc}{ds}) + \frac{d^2}{ds^2} (w_2 \cdot \frac{d^2c}{ds^2}) + \nabla P(c) = 0$$

Dinâmica

$$\frac{dc}{dt} - \frac{d}{ds} (w_1 \cdot \frac{dc}{ds}) + \frac{d^2}{ds^2} (w_2 \cdot \frac{d^2c}{ds^2}) + \nabla P(c) = 0$$

Segmentação de Imagens S.Furuiê - 62

Implementação: difer.finitas

$$-w_1 \cdot c'' + w_2 \cdot c'''' = -\nabla P(c)$$

$$c(i) = \begin{bmatrix} x(i) \\ y(i) \end{bmatrix}$$

$$x'(i) = \frac{x(i+1) - x(i)}{h}$$

$$x''(i) = \frac{x(i-1) - 2x(i) + x(i+1)}{h^2}$$

$$x''''(i) = (x''(i))''$$

...

$$-w_1 \cdot \frac{x(i-1) - 2x(i) + x(i+1)}{h^2} + w_2 \cdot [a_4 \cdot x(i-2) + \dots + a_5 \cdot x(i+2)] = -\nabla P(i)$$

Para cada ponto i do contorno em equilíbrio

Segmentação de Imagens S.Furuiê - 63

Diferenças finitas (solução de equilíbrio)

$$0 + 0 + \dots + b_1 \cdot x(i-2) + b_2 \cdot x(i-1) + \dots + b_2 \cdot x(i+1) + 0 = -\nabla P(i)$$

$$\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & 0 \\ 0 & b_1 & \dots & \\ 0 & & b_2 & \\ 0 & & & b_1 & b_2 \\ 0 & & & & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(1) \\ x(2) \\ \dots \\ x(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla P(1) \\ -\nabla P(2) \\ \dots \\ -\nabla P(n) \end{bmatrix}$$

$$A \cdot \vec{X} = \vec{f}(\vec{X})$$

Sistema de equações com dependência implícita

- Métodos numéricos direto ou iterativo

Segmentação de Imagens S.Furuiê - 64

Modo dinâmico

$$\frac{dc}{dt} - \frac{d}{ds} (w_1 \cdot \frac{dc}{ds}) + \frac{d^2}{ds^2} (w_2 \cdot \frac{d^2c}{ds^2}) + \nabla P(c) = 0$$

$$\frac{dX}{dt} + A \cdot \vec{X} = \vec{f}(\vec{X})$$

$$\frac{X^t - X^{t-1}}{\Delta t} + A \cdot X^{t-1} = f(X^{t-1})$$

$$X^t = (I - \Delta t \cdot A) \cdot X^{t-1} + \Delta t \cdot f(X^{t-1})$$

Solução iterativa até atingir o equilíbrio

Segmentação de Imagens S.Furuiê - 65

Snakes: Vantagens/desvantagens

- + Emula modelo físico. Imagens são apenas representações de modelos físicos.
- Processos reais são complexos p/ modelar
- Constantes desconhecidas
- Pesos relativos ?
- Apenas segmentação e alinhamento. Tracking exige modelagem mais precisa.

Segmentação de Imagens S.Furuiê - 66

Segmentação de Imagens S.Furuiê - 67

Snake: Gradient Vector Flow

$$\frac{dc}{dt} = \frac{d}{ds} \left(\alpha \cdot \frac{dc}{ds} \right) - \frac{d^2}{ds^2} \left(\beta \cdot \frac{d^2c}{ds^2} \right) + F_{ext}(x, y)$$

$$F_{ext}(x, y) = \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix}$$

seja $f(x, y)$: edge map

$$\begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} \text{ tal que :}$$

$$\min_{u,v} \iint \left\{ \mu \cdot (u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2) + |\nabla f|^2 \cdot \left[\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} - \nabla f \right]^2 \right\} dx dy$$

Solução iterativa até atingir o equilíbrio

S.Furuiê - 68

Solução: Euler equations

$$\mu \cdot \nabla^2 u - (u - f_x)(f_x^2 + f_y^2) = 0$$

$$\mu \cdot \nabla^2 v - (v - f_y)(f_x^2 + f_y^2) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu \cdot \nabla^2 u - (u - f_x)(f_x^2 + f_y^2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \mu \cdot \nabla^2 v - (v - f_y)(f_x^2 + f_y^2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu \cdot \nabla^2 u - (u - f_x)(f_x^2 + f_y^2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \mu \cdot \nabla^2 v - (v - f_y)(f_x^2 + f_y^2)$$

S.Furuiê - 69

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t} (u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t} (v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n)$$

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\Delta x \cdot \Delta y} (u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j})$$

$$\nabla^2 v = \frac{1}{\Delta x \cdot \Delta y} (v_{i+1,j} + v_{i,j+1} + v_{i-1,j} + v_{i,j-1} - 4v_{i,j})$$

S.Furuiê - 70

$$u_{i,j}^{n+1} = (1 - b_{i,j} \Delta t) u_{i,j}^n + r(u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}) + c_{i,j} \Delta t$$

$$v_{i,j}^{n+1} = (1 - b_{i,j} \Delta t) v_{i,j}^n + r(v_{i+1,j} + v_{i,j+1} + v_{i-1,j} + v_{i,j-1} - 4v_{i,j}) + d_{i,j} \Delta t$$

$$r = \frac{\mu \Delta t}{\Delta x \cdot \Delta y}$$

estabilida de ($r \leq \frac{1}{4}$) $\Rightarrow \Delta t \leq \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{4\mu}$

$$b_{i,j} = f_x(i, j)^2 + f_y(i, j)^2$$

$$c_{i,j} = b_{i,j} \cdot f_x(i, j)$$

$$d_{i,j} = b_{i,j} \cdot f_y(i, j)$$

S.Furuiê - 71

estabilidade

$$u_{i,j}^{n+1} = A u_{i+1}^n + B u_i^n + C u_{i-1}^n$$

Se :

- $A > 0$
- $B > 0$
- $C > 0$
- $A + B + C \leq 1$

\Rightarrow estável

S.Furuiê - 72

resultados

S.Furuiê - 73



Snakes: Vantagens/desvantagens

- + Emula modelo físico. Imagens são apenas representações de modelos físicos.
- Processos reais são complexos p/ modelar
- Constantes desconhecidas
- Pesos relativos ?
- Apenas segmentação e alinhamento.
Tracking exige modelagem mais precisa.