Lista 7 2010

(1) $\ddot{y} + 8\dot{y} + 15y = 0$

$x_1 = y \qquad x_2 = \dot{y}$

E.E. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -15x_1 - 8x_2 \end{cases}$

$$\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -15 & -8 \end{bmatrix} \underline{x}$$

a) Como é um sistema linear o único ponto de equilíbrio é a origem do espaço de estados $\underline{x}_e = \underline{0}$

b) autovalores:

$$\det(\lambda I - A) = 0 \Rightarrow \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 15 & \lambda+8 \end{bmatrix} =$$

$$= \lambda^2 + 8\lambda + 15$$

$\therefore$ autovalores $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = -5$

autovetor $\underline{p}_1$ associado a λ_1:

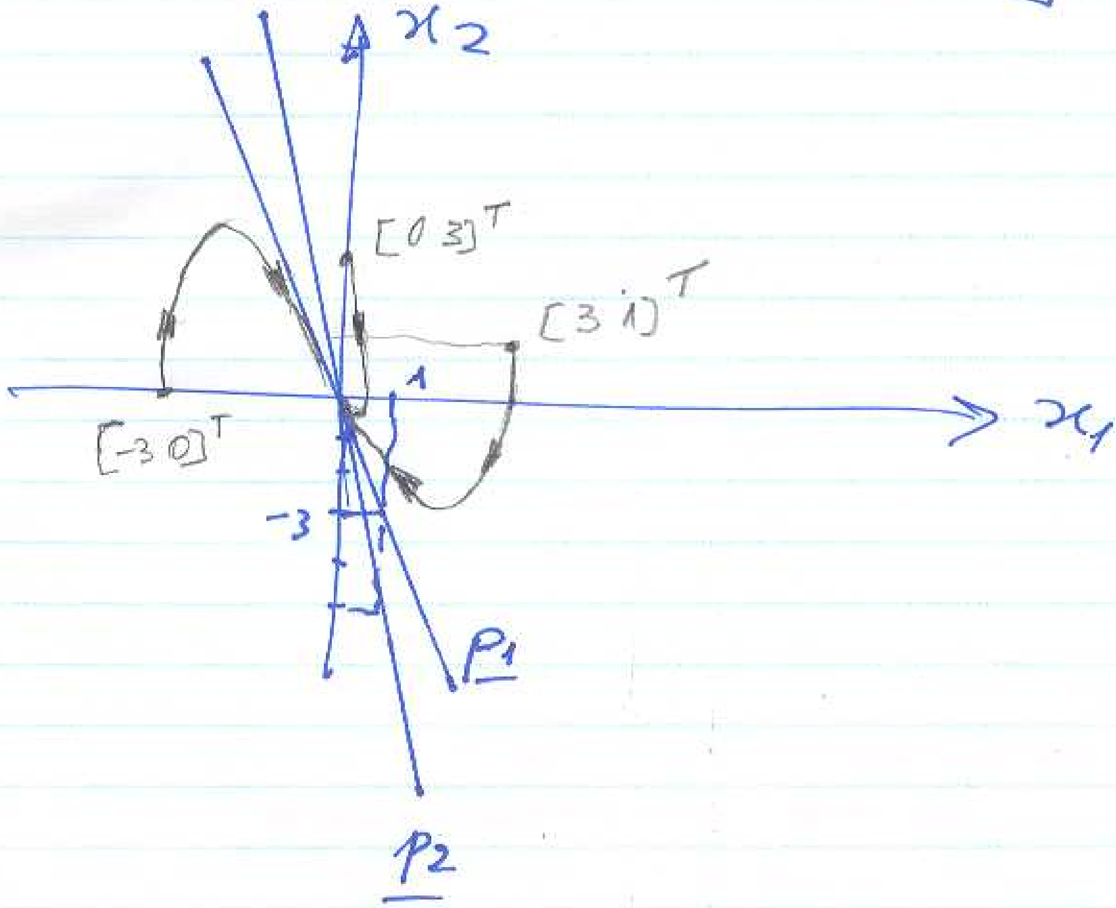
$$\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 15 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \end{bmatrix} = \underline{0} \Rightarrow -3p_{11} - p_{12} = 0$$

$\underline{p_{11} = 1} \quad \underline{p_{12} = -3} \quad \therefore \underline{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

(2

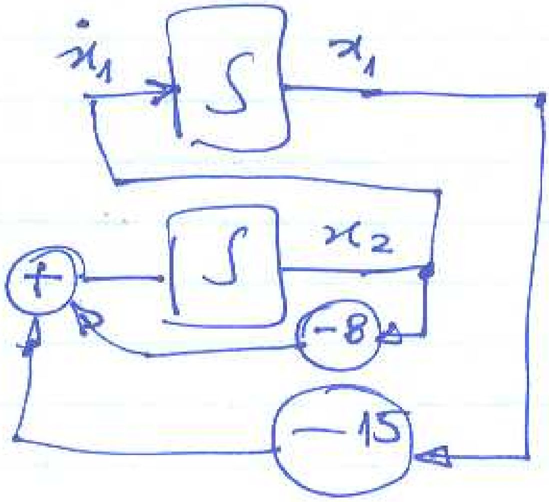
$$\begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 15 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{21} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \underline{0}$$

$$-5p_{21} - p_{22} = 0 \Rightarrow \underline{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}$$



c) Na direção $\underline{p}_1$ temos o modo natural e^{-3t} e na direção $\underline{p}_2$ o modo e^{-5t}, sendo que este decai mais rápido. Portanto, assintoticamente a direção privilegiada é a de $\underline{p}_1$

d)



e) vide figura do item (b)

---

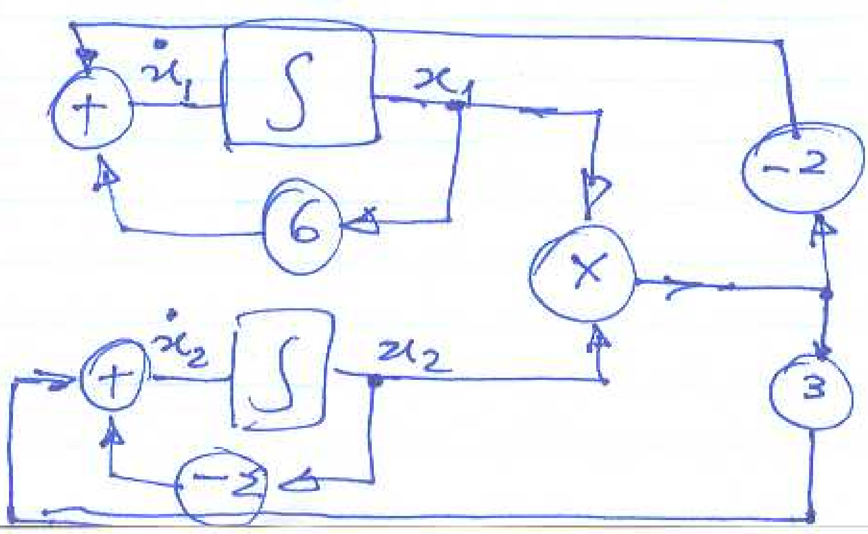
(2) (a) $\underline{\dot{x}} = \underline{0}$

$$\begin{cases} 6x_1 = 2x_1x_2 \\ 2x_2 = 3x_1x_2 \end{cases}$$

$\underline{x} = \underline{0}$ é um ponto de equilíbrio (sem graça)

e $\underline{x} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 3 \end{bmatrix}$ é outro ponto de equilíbrio.

(b)

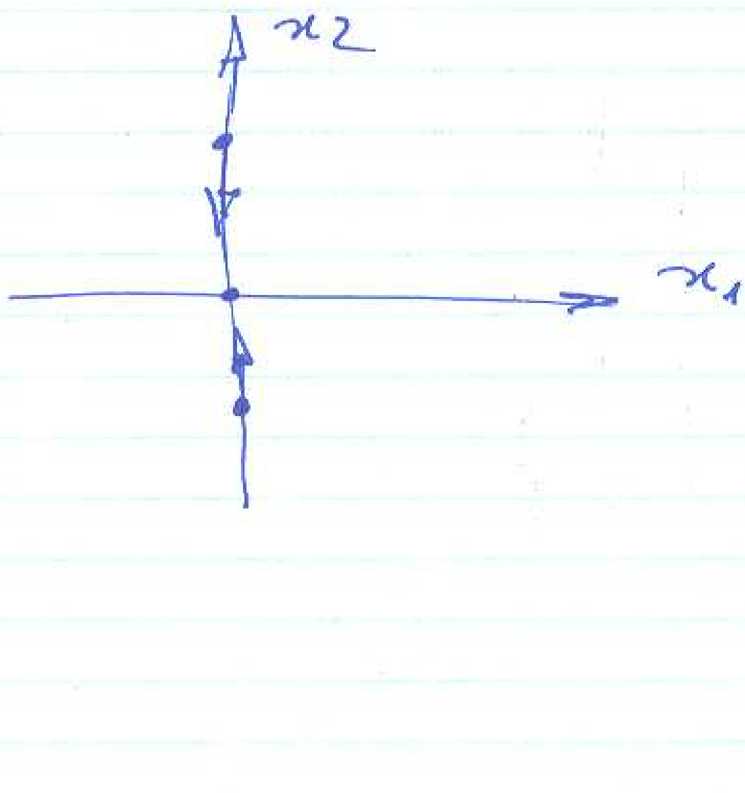


(c) Sobre o eixo x_2: $x_1 = 0$ e portanto

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 \end{cases}$$

ou seja, não há trajetória saindo de cima do eixo x_2

ou seja, se $x_2(0) > 0$ então a trajetória parte com $\dot{x}_2 < 0$ o que significa movimento no sentido da origem. Se $x_2(0) < 0$ então o movimento é para cima ou seja, no sentido da origem.



(3) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(3 - x_1 - 2x_2) \\ \dot{x}_2 = x_2(2 - x_1 - x_2) \end{cases}$

(a) a taxa de crescimento é maior para x_1 pois no 2º membro temos $3x_1$ quando na equação diferencial do x_2 temos $2x_2$. Portanto, os coelhos (sua quantidade) correspondem a x_1. A interação entre as 2 espécies é dada pelos termos cruzados notando-se na 1ª equação diferencial $-2x_1x_2$ e na segunda $-x_1x_2$, o que significa que encontros entre coelhos e carneiros são mais prejudiciais aos coelhos na disputa pela grama. As taxas de morte são quadráticas ($-x_1^2$ e $-x_2^2$)

(b) e (c) $\underline{\dot{x}} = \underline{0} \Rightarrow \underline{x}_{e_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (não tem graça)

$x_1 = 0$ mas $x_2 \neq 0 \Rightarrow x_2 = 2$

$\therefore \underline{x}_{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ taxa de nascimento = taxa de morte de carneiros

$x_2 = 0$ mas $x_1 \neq 0 \Rightarrow x_1 = 3$

$\therefore \underline{x}_{e_3} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ idem acima, mas p/ os coelhos

$x_1 \neq 0$ e $x_2 \neq 0 \Rightarrow$

$\underline{x}_{e_4} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ equilíbrio entre competição por comida e taxas de nascimento e morte nas 2 populações

(d)