

Índice

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Informações gerais | 3 |
| 1.1 | Introdução | 3 |
| 1.2 | Resumo do programa | 3 |
| 1.3 | Bibliografia | 4 |
| 1.4 | Critério de avaliação | 4 |
| 1.5 | Critério de aprovação | 5 |
| 1.6 | Calendário dos feriados escolares | 6 |
| 1.7 | Calendário das provas gerais | 6 |
| 1.8 | Calendário das provinhas | 7 |
| 1.9 | Prova de recuperação | 7 |
| 1.10 | Equipe de professores da disciplina | 8 |
| 1.11 | Equipe de estagiários da disciplina | 9 |
| 1.12 | Horário e local das aulas | 11 |
| 1.13 | Plantões de dúvidas | 11 |
| 1.14 | Página da disciplina na internet | 11 |
| 2 | Coletânea de exercícios | 12 |
| 2.1 | Sistemas de partículas: conservação do momento linear | 12 |
| 2.2 | Sistema de partículas: colisões | 16 |
| 2.3 | Cinemática e dinâmica do movimento de corpos rígidos | 21 |
| 2.4 | Momento angular, sua conservação e aplicações | 29 |
| 2.5 | Corpo rígido em equilíbrio | 37 |
| 2.6 | O oscilador harmônico | 41 |
| 2.7 | Fluidos | 47 |
| 3 | Resumo sobre oscilações forçadas amortecidas | 51 |
| 3.1 | Forma trigonométrica de um número complexo | 52 |
| 3.2 | Como achar a solução particular | 53 |
| 4 | Solução do exercício 16 | 56 |
| 5 | Solução do exercício 27 | 59 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 6 | Respostas dos exercícios | 61 |
| 6.1 | Sistemas de partículas: conservação do momento linear | 61 |
| 6.2 | Sistema de partículas: colisões | 62 |
| 6.3 | Cinemática e dinâmica do movimento de corpos rígidos | 63 |
| 6.4 | Momento angular, sua conservação e aplicações . . | 65 |
| 6.5 | Corpo rígido em equilíbrio | 67 |
| 6.6 | O oscilador harmônico | 69 |
| 6.7 | Fluidos | 72 |
| 7 | Tabela de momentos de inércia | 73 |

1 Informações gerais

1.1 Introdução

Este texto contém informações importantes sobre a disciplina de Física I. Nele estão apresentados o programa da disciplina, a bibliografia recomendada, os critérios de avaliação e de aprovação, o calendário das provas, a equipe de professores e estagiários, assim como uma coletânea de exercícios, que foi planejada para auxiliar o aprendizado de todo o conteúdo da disciplina. A maioria dos problemas e exercícios foram selecionados nos livros indicados na bibliografia desta coletânea.

1.2 Resumo do programa

1. Sistemas de partículas e centro de massa
2. Conservação do momento linear
3. Colisões elásticas e inelásticas em uma dimensão
4. Colisões elásticas e inelásticas em duas dimensões
5. Determinação do centro de massa de corpos rígidos
6. Impulso e média temporal de uma força
7. Rotação de um corpo rígido em torno de um eixo fixo
8. Torque e aceleração angular de um corpo rígido
9. Momento angular e energia de sistemas de partículas e corpos rígidos
10. Momento de inércia
11. Rolamento sem deslizamento
12. Oscilador harmônico simples

13. Oscilador amortecido e forçado
14. Ressonância
15. Fluidos: densidade e pressão
16. Princípios de Pascal e de Arquimedes
17. Equação de Bernoulli

1.3 Bibliografia

A bibliografia básica do curso engloba os livros:

1. *Física I*, H. D. Young e R. A. Freedman, vol. 1, 10^a edição, Editora Addison Wesley (Sears e Zemansky);
2. *Física*, P. A. Tipler, vol. 1, Editora Guanabara Dois;
3. *Física*, D. Halliday e F. Resnick, vol. 1, 4^a Edição, Editora LTC;
4. *Física 1 - Mecânica e Gravitação*, R. Serway, Editora LTC;
5. *Curso de Física Básica*, H. M. Nussenzveig, vol. 1 e vol. 2, 2^a edição, Editora Blücher Ltda.;
6. *Curso de Física de Berkeley*, vol. 1.

1.4 Critério de avaliação

A avaliação será feita através de **Provas Gerais** e **Provas de Exercícios**, ou provinhas. As provinhas terão duração de 30 minutos e as provas gerais de 120 minutos.

1. **Provas Gerais:** Serão realizadas duas Provas Gerais, \mathbf{PG}_1 e \mathbf{PG}_2 , mais uma Prova Substitutiva, \mathbf{P}_S .

A \mathbf{P}_S é uma prova única, no final do semestre, versando sobre toda a matéria e a nota da \mathbf{P}_S substituirá obrigatoriamente a nota de uma das provas gerais (\mathbf{PG}_1 ou \mathbf{PG}_2).

2. **Nota de Exercícios:** Serão realizadas provinhas quinzenais, em um total de seis, e a Nota de Exercícios, \mathbf{N}_E , resulta da média aritmética das cinco melhores notas das provinhas. *Não haverá provinha substitutiva* e a nota das provinhas não poderá substituir qualquer nota de prova.

Outras questões que digam respeito ao bom aproveitamento do curso e que não se enquadram dentro das regras acima deverão ser resolvidas pela equipe de professores de Física I.

OBS: Nos dias das Provas e das Provinhas os alunos devem apresentar um documento de identidade.

1.5 Critério de aprovação

A Média Final, \mathbf{M}_F , será calculada da seguinte forma:

$$\mathbf{M}_F = 0,35(\mathbf{PG}_1 + \mathbf{PG}_2) + 0,3\mathbf{N}_E$$

de modo que

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_F \geq 5 &\implies \text{aprovação} \\ 3 \leq \mathbf{M}_F < 5 &\implies \text{recuperação} \\ \mathbf{M}_F < 3 &\implies \text{reprovação} \end{aligned}$$

O(A) aluno(a) que alcançar frequência mínima às aulas de 70% e média final entre 3,0 (três) e 5,0 (cinco), poderá realizar uma prova de recuperação, \mathbf{P}_{Rec} , a qual compreende toda a matéria do semestre. Neste caso, a nota final \mathbf{N}_F será calculada da seguinte forma:

$$\mathbf{N}_F = (\mathbf{M}_F + 2\mathbf{P}_{\text{Rec}})/3$$

de modo que se

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_F \geq 5 &\implies \text{aprova\~{c}\~{a}o} \\ \mathbf{N}_F < 5 &\implies \text{reprova\~{c}\~{a}o} \end{aligned}$$

1.6 Calendário dos feriados escolares

- 06-11/setembro - Semana da Pátria
- 11/outubro - Recesso Escolar - (segunda-feira)
- 12/outubro - Dia da Padroeira do Brasil - (terça-feira)
- 28/outubro - Dia do funcionário público (quinta-feira)
- 29/outubro - Recesso Escolar - (sexta-feira)
- 01/novembro - Recesso Escolar - (segunda-feira)
- 02/novembro - Finados (terça-feira)
- 15/novembro - Proclamação da República (segunda-feira)

1.7 Calendário das provas gerais

- **1^a Prova Geral (PG₁):** 27/setembro, segunda-feira
- **2^a Prova Geral (PG₂):** 29/novembro, segunda-feira
- **Prova Substitutiva (P_S):** 06/dezembro, segunda-feira

Período Diurno: as provas PG_1 e PG_2 serão realizadas nas respectivas salas de aula.

Período Noturno: as provas PG_1 , PG_2 serão realizadas no Auditório Abraão de Moraes.

A prova substitutiva P_S será realizada no Auditório Abraão de Moraes, as 19 horas, simultaneamente, para todos os alunos do DIURNO e do NOTURNO.

1.8 Calendário das provinhas

- 1^a provinha: 16/agosto, segunda-feira
- 2^a provinha: 30/agosto, segunda-feira
- 3^a provinha: 20/setembro, segunda-feira
- 4^a provinha: 18/outubro, segunda-feira
- 5^a provinha: 8/novembro, segunda-feira
- 6^a provinha: 22/novembro, segunda-feira

Todas as provinhas serão realizadas nas respectivas salas de aula.

1.9 Prova de recuperação

A Prova de Recuperação (P_{rec}) será realizada no período de 14 a 28 de fevereiro de 2011, às 19:00 horas, para todos os alunos dos períodos DIURNO e NOTURNO, com data e local a serem definidos oportunamente.

1.10 Equipe de professores da disciplina

Rafael Sá de Freitas (turma T1)

Professor doutor do Departamento de Física dos Materiais e Mecânica. Desenvolve pesquisa na área experimental de sistemas eletrônicos fortemente correlacionados, incluindo propriedades magnéticas e de transporte elétrico de óxidos de metais de transição e materiais magnéticos geometricamente frustrados.

Escritório: Ed. Mário Schemberg, Bloco C, sala 217C

Fone: 3091-6889

e-mail: freitas@if.usp.br

Lucy Vitória Credidio Assali (turma T2)

Professora associada do Departamento de Física dos Materiais e Mecânica. Desenvolve pesquisa na área de propriedades físicas de materiais e nano-materiais através de simulações computacionais que utilizam métodos de primeiros princípios, investigando propriedades mecânicas, eletrônicas, magnéticas, ópticas, de transporte e de difusão.

Escritório: Edifício Alessandro Volta, Bloco C, sala 210

Fone: 3091-7041

e-mail: lassali@if.usp.br

Márcia Carvalho de Abreu Fantini (turma T3)

Professora titular do Departamento de Física Aplicada. Desenvolve pesquisa na área de desenvolvimento de novos materiais nas formas volumétrica, de filmes finos e de dimensões nanoscópicas com propriedades morfológicas, ópticas, elétricas e estruturais ajustáveis para aplicações específicas, tais como ligas amorfas de Si, materiais mesoporosos ordenados, lipídeos polares para liberação controlada de fármacos e materiais nano-cerâmicos (ZrO_2), utilizados como células combustíveis de estado sólido (SOFC). Os materiais são investigados experimentalmente pelos métodos de difração (XRD), espalhamento (SAXS) e absorção (XANES e EXAFS),

utilizando fonte de raios-X convencional e radiação síncrotron.

Escritório: Ed. Basílio Jafet, sala 224

Fone: 3091-6882

e-mail: mfantini@if.usp.br

Euzi C. Fernandes da Silva (turma T4) - coordenadora

Professora associada do Departamento de Física dos Materiais e Mecânica. Desenvolve pesquisa na área de materiais semicondutores com ênfase no estudo de heteroestruturas semicondutoras que servem de base para a fabricação de dispositivos (fotodetectores e lasers) do estado sólido que operam no infravermelho.

Escritório: Ed. Mário Schemberg, sala 210

Fone: 3091-6880

e-mail: euzicfs@if.usp.br

1.11 Equipe de estagiários da disciplina

Alexsander Ramos Duarte (turma T1)

Aluno de mestrado no Departamento de Física Experimental. Desenvolve pesquisa na área de espectroscopia de impedância em soluções eletrolíticas no intervalo de frequências de 100 a 300 MHz.

Escritório: Edifício van de Graff, sala de bolsistas.

Fone: 3091-6638

e-mail: alexsanderrd@gmail.com

Bruno C. de Sousa Franzon (turma T2)

Aluno de mestrado no Departamento de Física Experimental. Desenvolve pesquisa na área de física de partículas elementares e interações hadrônicas.

Escritório: Edifício Principal, Ala II, sala 349.

Fone: 3091-6875

e-mail: brfranzon@yahoo.com.br

Rebeca Bacani (turma T3)

Aluna de doutorado no Departamento de Física Aplicada, no laboratório de cristalografia. Desenvolve pesquisa na área de materiais mesoporosos auto-organizados.

Escritório: Edifício Basílio Jafet, sala 124B

Fone: 3091-6814

e-mail: rbacani@if.usp.br

André Luiz dos Santos (turma T4)

Aluno de mestrado no Departamento de Física dos Materiais e Mecânica. Desenvolve pesquisa no Laboratório de Novos Materiais Semicondutores na área de caracterização de estruturas semicondutoras utilizadas na fabricação de fotodetectores.

Escritório: Ed. Mário Schemberg, sala 204

Fone: 3091-6875

e-mail: andre.luiz.santos@usp.br

Leonardo Matheus Marion Jorge (página da disciplina)

Aluno de doutorado no Departamento de Física dos Materiais e Mecânica. Desenvolve pesquisa na área de propriedades eletrônicas e óticas de interfaces orgânico/inorgânico através de cálculos ab initio.

Escritório: Edifício Alessandro Volta, Bloco C, sala 102.

Fone: 3091-6881

e-mail: leomm@usp.br

1.12 Horário e local das aulas

Período diurno:

2^{as} das 10:00 às 12:00 h e 4^{as} e 6^{as} das 14:00 às 16:00 h

- **Turma T1 - Rafael Sá de Freitas**
Sala 206 do Edifício Principal, Ala Central
- **Turma T3 - Márcia C. A. Fantini**
Sala 202 do Edifício Principal, Ala Central

Período noturno:

2^{as} e 5^{as} das 21:00 às 23:00 h e 3^{as} das 19:00 às 21:00 h

- **Turma T2 - Lucy V. C. Assali**
Sala 206 do Edifício Principal, Ala Central
- **Turma T4 - Euzi C. F. da Silva**
Sala 202 do Edifício Principal, Ala Central

1.13 Plantões de dúvidas

Os plantões para resolver dúvidas serão nas terças-feiras e sextas-feiras das 13:00h às 14:00h e das 18:00h às 19:00h, na sala 202 do Edifício Principal, Ala Central. Entretanto, qualquer problema com este horário, sugerimos o contato, por e-mail ou telefone, com qualquer pessoa da equipe.

1.14 Página da disciplina na internet

A disciplina contará com uma página na internet, onde diversas informações, além das contidas neste livreto, estarão anunciadas, tais como alterações de datas de provas, notas, gabaritos, etc. Deste modo, é importante consultá-la periodicamente. Para acessá-la entre na página do IFUSP (web.if.usp.br/ifusp/), escolha **Ensino**, depois **Graduação**, depois **páginas das disciplinas** e, finalmente, **4300111 - Física I**.

2 Coletânea de exercícios

2.1 Sistemas de partículas: conservação do momento linear

1. Ache as coordenadas do centro de massa dos sistemas mostrados nas figuras abaixo. Em (a) todas as massas são pontuais, em (b) os fios tem a mesma densidade linear uniforme de massa e em (c) a placa tem densidade superficial uniforme de massa.

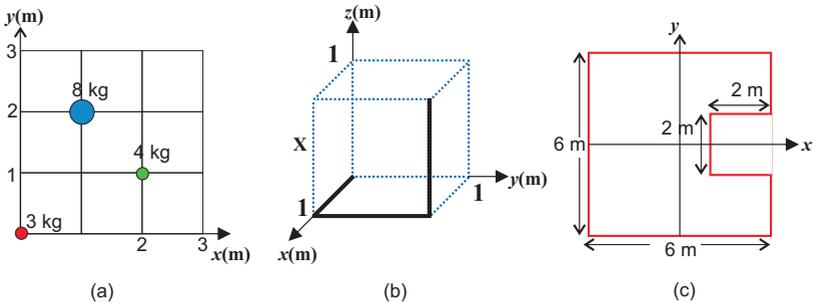


Figura 1: Exercício 1.

2. As massas $m_1 = 10 \text{ kg}$ e $m_2 = 6 \text{ kg}$ estão ligadas por uma barra rígida de massa desprezível. Inicialmente em repouso, elas são submetidas às forças $\vec{F}_1 = 8 \hat{i} \text{ (N)}$ e $\vec{F}_2 = -6 \hat{j} \text{ (N)}$, como indicado na figura.
 - (a) Escreva as coordenadas do centro de massa como função do tempo.
 - (b) Expresse a quantidade de movimento total como função do tempo.
3. Um avião explode no ar e se divide em três partes, cujas massas e velocidades, imediatamente depois da explosão, são (unidades no SI):

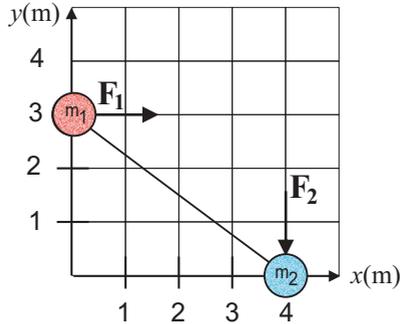


Figura 2: Configuração inicial das massas do exercício 2.

$$m_1 = 4000 \text{ kg}, \quad \vec{v}_1 = 200 \hat{i} + 25 \hat{k};$$

$$m_2 = 2000 \text{ kg}, \quad \vec{v}_2 = -50 \hat{i} + 50 \hat{j} - 25 \hat{k};$$

$$m_3 = 2000 \text{ kg}, \quad \vec{v}_3 = -50 \hat{i} - 25 \hat{k}.$$

- (a) Qual era a velocidade do avião ao explodir?
 - (b) Qual era o seu momento linear?
4. Um corpo de massa 5 kg desloca-se para a direita com velocidade de 5 m/s, perseguindo outro corpo de 3 kg, que se desloca também para a direita a 1 m/s. Determine:
- (a) A energia cinética dos dois corpos nesse referencial e a velocidade do centro de massa;
 - (b) A velocidade de cada um dos corpos em relação ao centro de massa;
 - (c) A energia cinética do movimento em relação ao centro de massa;
 - (d) A energia cinética do movimento do centro de massa.

5. Um corpo de 3 kg escorrega ao longo de um plano horizontal sem atrito com velocidade $\vec{v} = (4 \text{ m/s}) \hat{i}$. Num certo instante, explode, dividindo-se em duas partes, uma de massa 2 kg e outra de massa 1 kg. Depois da explosão, o pedaço de 1 kg desloca-se com velocidade $\vec{v} = (8 \text{ m/s}) \hat{j}$.
- (a) Qual a velocidade do pedaço de 2 kg depois da explosão?
 - (b) Qual a velocidade do centro de massa depois da explosão?
6. Um projétil de 6 kg é disparado num ângulo $\theta = 30^\circ$ com a horizontal, com velocidade inicial de 40 m/s. No topo da sua trajetória, o projétil explode em dois fragmentos com massas de 2 kg e 4 kg. Os fragmentos deslocam-se na horizontal, imediatamente depois da explosão, e o fragmento de 2 kg cai no lugar do disparo do projétil. Determine:
- (a) O local onde cai o fragmento de 4 kg;
 - (b) A energia liberada na explosão.
7. Um homem com 70 kg e um garoto de 35 kg, estão juntos sobre uma superfície gelada, na qual o atrito é desprezível. Um empurra o outro, e o homem se desloca para trás, com velocidade de 0,3 m/s, em relação ao gelo.
- (a) Qual a separação dos dois depois de 5 s?
 - (b) A energia mecânica do sistema se conserva?
8. Um remador de 75 kg, sentado na popa de uma canoa de 150 kg e 3 m de comprimento, conseguiu trazê-la para uma posição em que está parada perpendicularmente à margem de um lago, que nesse ponto forma um barranco, com a proa encostada numa estaca, onde o remador quer amarrar a canoa. Ele se levanta e caminha até a proa, o que leva a canoa a afastar-se da margem. Chegando à proa,

ele consegue esticando o braço, alcançar até uma distância de 80 cm da proa. Conseguirá agarrar a estaca? Caso contrário, quanto falta? Despreze a resistência da água e considere o centro de massa da canoa como localizado em seu ponto médio.

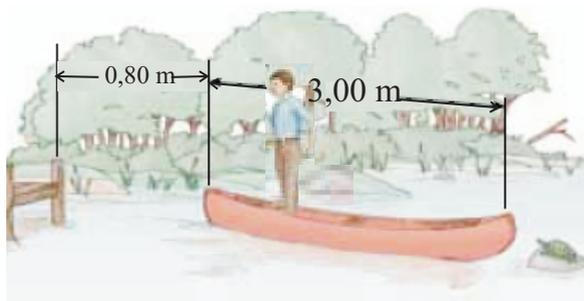


Figura 3: Remador do exercício 8.

9. Um garoto de massa 30 kg, correndo a 2,5 m/s, salta sobre um carrinho de massa 10 kg, que estava parado, permanecendo sobre ele.
- (a) Determine a velocidade do conjunto carrinho+garoto depois que ambos estiverem andando juntos.
 - (b) Em seguida, o garoto começa a andar sobre o carrinho com a velocidade de 0,5 m/s, relativa ao carrinho, dirigindo-se para frente do mesmo. Qual a nova velocidade do carrinho?
 - (c) Quando o garoto chega na extremidade do carrinho, ele pula para frente com velocidade de 1 m/s em relação ao carrinho. Com que velocidade o carrinho fica depois disso?
10. Um atirador, com um rifle de 2 kg apoiado ao ombro, dispara uma bala de 15 g, cuja velocidade na boca da arma é $\vec{v}_0 = 800 \hat{i}$ (m/s).

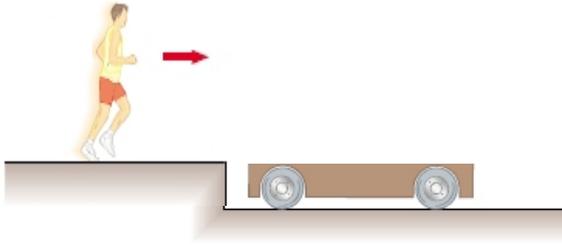


Figura 4: Garoto saltando sobre o carrinho do exercício 9.

- (a) Com que velocidade inicial a arma recua?
 - (b) Que impulso transmite ao ombro do atirador?
 - (c) Se o impulso é absorvido pelo ombro em 0,05 s, qual é a força média exercida sobre ele?
11. Um canhão montado em uma carreta, apontado numa direção horizontal, atira uma bala de 50 kg, cuja velocidade na boca do canhão é $\vec{v}_0 = 300 \hat{i}$ (m/s). A massa total do canhão e da carreta é de 5 toneladas. Calcule:
- (a) A velocidade inicial de recuo da carreta;
 - (b) A distância que a carreta recua, se o coeficiente de atrito cinético é 0,7.

2.2 Sistema de partículas: colisões

12. Uma bala de 10 g é disparada sobre um pêndulo balístico de massa 990 g.
- (a) Se a velocidade inicial da bala é 300 m/s, qual a altura atingida pelo pêndulo (junto com a bala) depois da colisão?

- (b) Se a velocidade inicial da bala é 200 m/s , determine a altura máxima atingida pelo pêndulo quando a bala passa através dele e emerge com velocidade de 50 m/s .

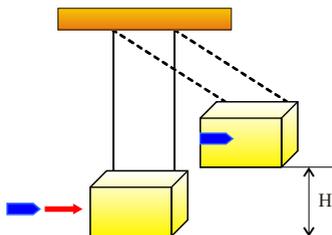


Figura 5: Pêndulo balístico do exercício 12.

13. Um vagão de 20 toneladas está freado no topo de uma descida. Quando o carro é solto, ele rola, descendo 9 m em relação à posição original. Na parte mais baixa da ladeira, ele engata em outro vagão, de 10 toneladas, que está livre nos trilhos. Os dois, engatados, sobem uma ladeira até uma altura H . Calcular H .
14. Um bloco de madeira, de massa 1 kg , está ligado a uma mola de constante de força 200 N/m e repousa sobre uma superfície horizontal lisa, sem atrito. Uma bala de 20 g atinge o bloco e comprime a mola de $13,3 \text{ cm}$. Determine:
- (a) A velocidade da bala antes da colisão;
 - (b) A fração da energia mecânica inicial se perde na colisão.
15. Um corpo de 4 kg , deslocando-se a 5 m/s , na horizontal, efetua uma colisão perfeitamente elástica com um corpo de 1 kg , inicialmente em repouso. Determine a velocidade final de cada corpo e a energia transferida para o corpo de 1 kg .

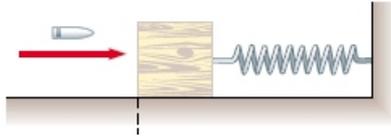


Figura 6: Sistema massa-mola do exercício 14.

16. Considere o espalhamento elástico entre uma partícula alfa de massa $m_1 = 4m$ por um neutron em repouso, de massa $m_2 = m$ como mostra a figura 7.
- Qual é o ângulo máximo θ_1 de espalhamento?
 - Neste ângulo, que fração da energia cinética incidente vai para o neutron?
 - Qual é o ângulo θ_2 entre a direção de recuo e a de incidência?

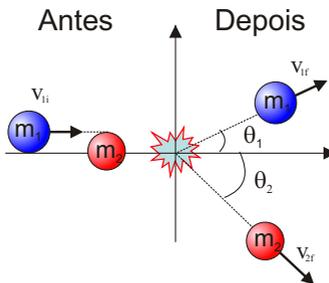


Figura 7: Espalhamento bidimensional do exercício 16.

17. Durante a madrugada, um carro de luxo de massa 2.400 kg, bate na traseira de um carro de massa 1.200 kg, que estava parado. O motorista do carro de luxo alega que o outro estava com as luzes apagadas, e que ele vinha reduzindo a marcha ao aproximar-se do sinal, estando a menos de 10 km/h quando o acidente ocorreu. A perícia constata que o carro

- de luxo arrastou o outro de uma distância de 10,5 m, e estima que o coeficiente de atrito cinético com a estrada, no local do acidente, era 0,6. Calcule a que velocidade o carro de luxo vinha realmente correndo.
18. Um caminhão carregado, de massa $M = 3$ ton, viajando para o norte a 60 km/h, colide, num cruzamento, com um carro de massa total $m = 1$ ton, que vinha trafegando para leste a 90 km/h. Calcule em que direção e de que distância o carro é arrastado pelo caminhão, sabendo que o coeficiente de atrito cinético no local do acidente é 0,5.
19. Uma bola deslocando-se a 10 m/s, faz um colisão perfeitamente elástica, mas oblíqua, com uma outra bola de mesma massa e em repouso. A bola incidente é desviada de um ângulo $\theta_1 = 30^\circ$ em relação à direção inicial do movimento. Determinar a velocidade de cada bola depois da colisão o ângulo de recuo θ_2 .
20. Num choque entre dois corpos de massas $m_1 = 0,8$ kg e $m_2 = 1,2$ kg, o primeiro desvia 90° de sua trajetória original, mantendo inalterada sua energia cinética. Se as velocidades iniciais dos corpos eram, respectivamente,
 $\vec{v}_1 = (3,0 \text{ m/s}) \hat{i}$,
 $\vec{v}_2 = (2,0 \text{ m/s}) \hat{i} - (1,0 \text{ m/s}) \hat{j}$:
- (a) Calcule o vetor velocidade de m_2 após a colisão;
(b) Verifique se o choque foi elástico ou inelástico.
21. Uma bala de massa 4,5 g é disparada horizontalmente num bloco de madeira de massa 2,4 kg, em repouso sobre a superfície horizontal. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a superfície vale 0,20. A bala fica retida no bloco, que sofre um deslocamento de 1,8 m até parar.
- (a) Qual a velocidade do bloco imediatamente após a bala parar em seu interior?

- (b) Qual a velocidade inicial da bala?
22. Uma bola de massa $m = 0,5 \text{ kg}$ é presa a um pino por um fio leve e inextensível de $0,8 \text{ m}$ de comprimento. A bola é abandonada quando o fio está na horizontal. Na parte mais baixa da trajetória a bola atinge um bloco de massa $M = 2,0 \text{ kg}$, inicialmente em repouso sobre uma superfície áspera. A colisão, entre a bola e o bloco, pode ser considerada como perfeitamente elástica. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a superfície é $\mu_c = 0,16$.
- (a) Qual o trabalho realizado pelas forças que atuam sobre a bola?
- (b) Quais as velocidades dos corpos após a colisão?
- (c) Até que altura sobe a bola após a colisão?
- (d) Qual a distância percorrida pelo bloco depois da colisão?

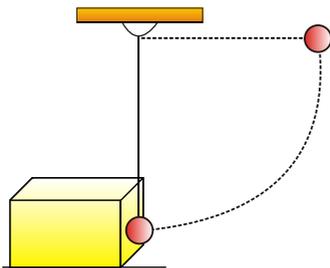


Figura 8: Colisão do exercício 22.

2.3 Cinemática e dinâmica do movimento de corpos rígidos

23. No sistema mostrado na figura 9, os corpos estão ligados por barras muito leves cujos momentos de inércia podem ser desprezados. O sistema gira em torno do eixo y com velocidade angular $\omega = 2 \text{ rad/s}$.
- Considere que no instante $t=0 \text{ s}$, os corpos estejam nas posições indicadas na figura. Determine o vetor velocidade de cada partícula usando o produto vetorial $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$.
 - Use a velocidade escalar de cada corpo para calcular a energia cinética do sistema.
 - Determine o momento de inércia do sistema em torno do eixo y e calcule a energia cinética do sistema utilizando a relação $E = \frac{I\omega^2}{2}$.

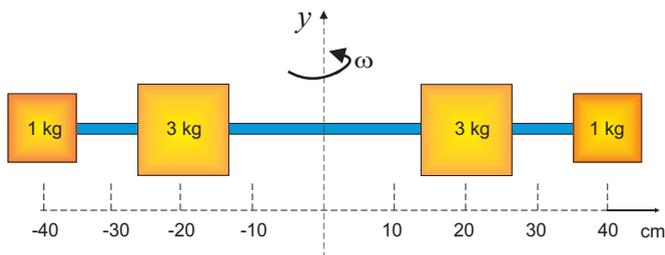


Figura 9: Massas girando em torno do eixo y do exercício 23.

24. Quatro esferas pequenas de massa m estão presas às extremidades de uma estrutura de massa desprezível, no plano xy , como mostrado na figura 10.
- Se a rotação do sistema ocorre ao redor do eixo y com velocidade angular ω , encontre o momento de inércia

I_y ao redor do eixo y e a energia cinética rotacional ao redor desse eixo.

- (b) Supondo que o sistema gire no plano xy , com velocidade angular ω , ao redor de um eixo passando por O (eixo z), calcule o momento de inércia I_z ao redor do eixo z e a energia rotacional ao redor desse eixo.

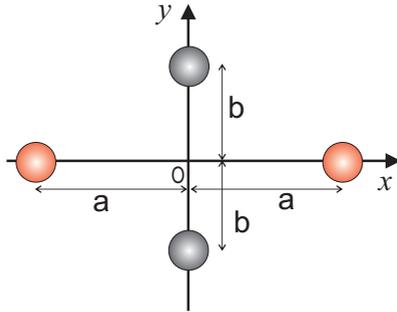


Figura 10: Esferas girando, do exercício 24.

25. Uma barra fina, com uma distribuição de massa uniforme, tem massa M e comprimento L . Calcule o seu momento de inércia em relação a um eixo que passa pelo centro da barra (eixo z). Usando o Teorema dos eixos paralelos, determine o momento de inércia em relação ao eixo z' .

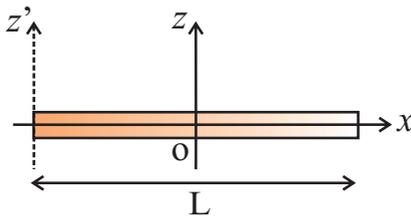


Figura 11: Barra delgada do exercício 25.

26. Um cilindro cheio, com uma distribuição de massa uniforme, tem um raio R , massa M , e comprimento L . Calcule seu momento de inércia em relação ao eixo z central.
27. (a) Mostre que o momento de inércia de um cilindro vazado de massa M , de raio interno R_1 e externo R_2 , em relação ao eixo z que passa pelo seu centro, é dado por $I_z = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$.
- (b) Um cilindro maciço de raio R_2 e massa M tem momento de inércia $I_z = \frac{1}{2}MR_2^2$, em relação ao eixo z que passa pelo seu centro. Como você explica que se eu fizer um buraco de raio R_1 em um cilindro maciço, o momento de inércia parece aumentar de uma quantidade $I_z = \frac{1}{2}MR_1^2$?

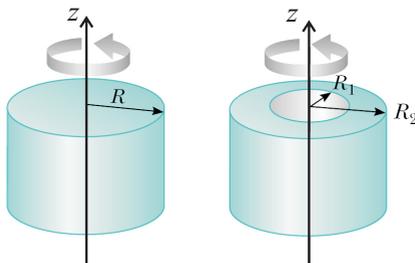


Figura 12: Cilindro maciço e cilindro vazado do exercício 27.

28. Utilizando apenas o resultado do exercício 26, calcule o momento de inércia de um cilindro uniforme vazado de massa M , de raio interno R_1 e externo R_2 , em relação ao eixo z (figura do exercício 27).
29. Um disco uniforme, de raio $R=0,12$ m e massa $m = 5$ kg, está apoiado de modo a poder girar livremente em torno de seu eixo. Uma corda está enrolada em torno do disco e é puxada com uma força de 20 N, como mostra a figura.
- (a) Qual é o torque exercido sobre o disco?

- (b) Qual é a aceleração angular do disco?
- (c) Se o disco parte do repouso, qual é a sua velocidade angular e sua energia cinética depois de 3 s?
- (d) Determine o deslocamento angular $\Delta\vec{\theta}$ do cilindro nesses 3 s. Verifique que o trabalho efetuado pelo torque ($W = \vec{\tau} \cdot \Delta\vec{\theta}$), neste intervalo de tempo, é igual a variação da energia cinética calculada no item (c).

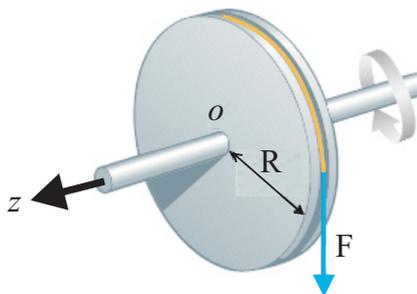


Figura 13: Disco do exercício 29.

30. Um cilindro de massa $m = 2$ kg gira em torno de um eixo que passa pelo seu centro. Sobre ele são aplicadas as forças indicadas na Figura 14 onde $R_a = 5$ cm e $R_b = 12$ cm.
- (a) Qual é o torque resultante exercido sobre o cilindro?
 - (b) Qual é o vetor aceleração angular do cilindro?
 - (c) Sabendo que a velocidade angular inicial do cilindro era $\vec{\omega}_0 = -4 \hat{k}$ (rad/s), determine $\vec{\omega}(t)$.
 - (d) Qual é a sua energia cinética depois de 3 s?
 - (e) Determinar o deslocamento angular $\Delta\vec{\theta}$ do cilindro nesses 3 s. Verifique que o trabalho efetuado pelo torque ($W = \vec{\tau} \cdot \Delta\vec{\theta}$), neste intervalo de tempo, é igual a variação da energia cinética calculada no item (d).

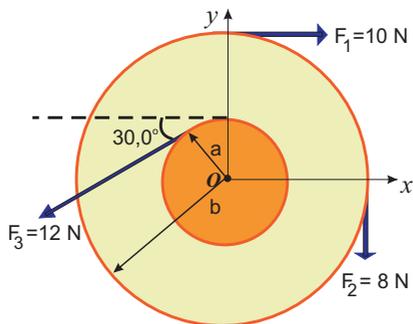


Figura 14: Cilindro sob a ação de forças do exercício 30.

31. Um disco uniforme de 100 kg e raio 0,60 m está sobre uma superfície de gelo lisa. Duas patinadoras gêmeas enrolam cordas em torno do disco, num mesmo sentido. Depois cada qual puxa a sua corda e se afasta do disco, exercendo sobre ele forças constantes de 40 N e 60 N durante 5 s.
- Determine a aceleração, a velocidade e a posição do centro de massa em função do tempo.
 - Quais são a aceleração angular e a velocidade angular em função do tempo?
 - Quantas voltas em torno de seu eixo o cilindro faz durante este tempo?
 - Calcule a energia cinética do cilindro quando $t = 5$ s.
32. Uma pedra de amolar circular, de massa 2 kg e raio 7 cm, gira a 700 rev/min. Depois de a potência do motor ter sido desligada, uma pessoa continua a afiar o seu machado, contra a pedra, durante 10 segundos, quando então o rebole pára. Encontre:
- A energia cinética de rotação no momento em que o motor é desligado;

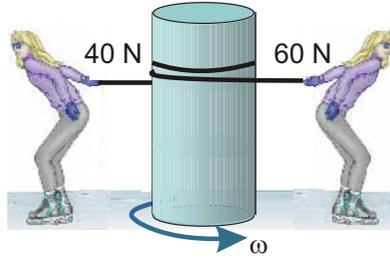


Figura 15: Patinadoras puxando o cilindro do exercício 31.

- (b) A aceleração angular da pedra, admitindo que seja constante;
 - (c) O torque exercido pelo machado sobre a pedra de amolar;
 - (d) O trabalho realizado pelo machado.
33. Dois corpos de massas m_1 e m_2 , estão ligados a cordas que passam por polias montadas num eixo comum. O momento de inércia total das duas polias é de $40 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ e os raios são $R_1 = 0,4 \text{ m}$ e $R_2 = 1,2 \text{ m}$.
- (a) Se $m_1 = 24 \text{ kg}$, determine m_2 de modo que o sistema fique em equilíbrio.
 - (b) Se ao corpo m_1 for adicionado outro de 12 kg , qual será a aceleração angular das polias e qual será a tensão nas cordas?
34. Dois blocos estão ligados por um fio de massa desprezível através de uma polia de raio $0,25 \text{ m}$ e momento de inércia I . O bloco sobre o plano inclinado, sem atrito, está subindo com uma aceleração constante de $2,00 \text{ m/s}^2$. Determine:
- (a) As tensões T_1 e T_2 nas duas partes do fio;
 - (b) O momento de inércia da polia.

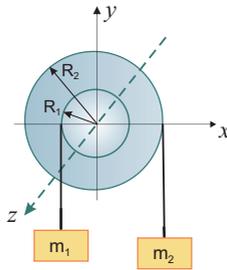


Figura 16: Cilindro sob a ação de forças exercício 33.

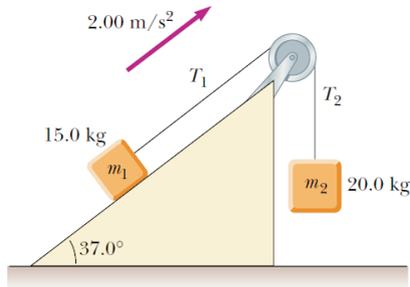


Figura 17: Esquema de massas e polia do exercício 34.

35. Calcule o efeito da massa M da polia, de raio R , sobre o sistema mostrado na figura 18, onde a massa m_1 , que desliza sem atrito, está ligada à massa suspensa m_2 , pelo fio que passa sobre a polia, determinando:
- A aceleração do sistema e as tensões T_1 e T_2 nos fios ligados a m_1 e m_2 , respectivamente, utilizando a segunda lei de Newton;
 - O torque externo resultante que atua sobre o sistema (os dois corpos e a polia) em relação ao centro da polia;
 - O momento angular total do sistema em relação ao centro da polia quando as massas deslocam-se com a

velocidade escalar v ;

- (d) A aceleração do sistema a partir dos resultados dos itens (b) e (c), fazendo o torque resultante igual à taxa de variação do momento angular do sistema.

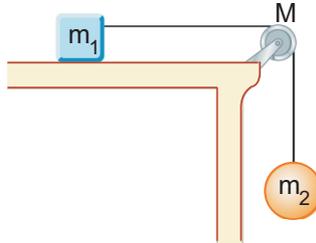


Figura 18: Esquema de massas e polia do exercício 35.

36. O sistema da Figura 19 principia a movimentar-se do repouso. O corpo de massa $m_2 = 30$ kg está dois metros acima do solo. O corpo apoiado no solo tem massa $m_1 = 20$ kg e a polia é um disco uniforme com um raio $R = 10$ cm e massa $M = 5$ kg. Determinar:
- (a) A velocidade escalar do corpo de massa m_2 imediatamente antes de atingir o solo e a velocidade escalar angular da polia neste instante;
 - (b) As tensões nos cabos;
 - (c) O tempo que o corpo de massa m_2 leva para atingir o nível do solo.

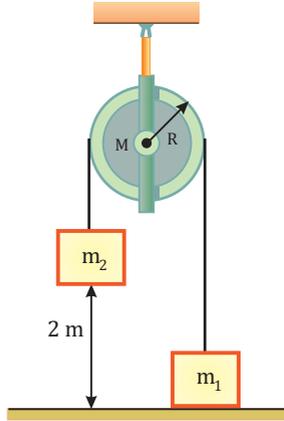


Figura 19: Esquema de massas e polia do exercício 36.

2.4 Momento angular, sua conservação e aplicações

37. Uma partícula de massa m move-se com velocidade constante em uma trajetória retilínea. De acordo com a figura 20, qual é o momento angular dessa partícula em relação ao ponto O ? E em relação ao ponto O' ?

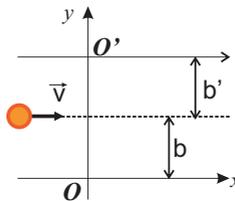


Figura 20: Partícula em MRU do exercício 37.

38. Uma partícula de massa m move-se num círculo de raio R com velocidade angular ω , como mostra a figura 21. Calcule:

- (a) O torque que atua sobre essa partícula em relação à origem O ;
- (b) O vetor momento angular em relação à origem O .

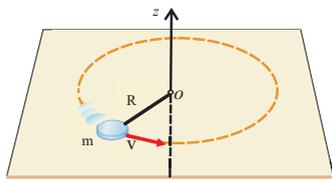


Figura 21: Partícula em movimento circular do exercício 38.

39. Uma bolinha presa a um fio de massa desprezível gira em torno de um eixo vertical com velocidade escalar constante, formando um ângulo $\theta_0 = 30^\circ$ com a vertical e mantendo-se a uma distância $d = 0,5$ m do eixo. O fio passa, sem atrito, através de um orifício O numa placa e é puxado lentamente para cima até que o ângulo com a vertical passe a ser $\theta = 60^\circ$.
- (a) Que comprimento $\delta\ell$ do fio foi puxado?
 - (b) Qual é a razão entre as velocidades de rotação final e inicial (ω_f/ω_i)?
40. Dois patinadores, cada um de massa $m = 60$ kg, deslizando sobre uma pista de gelo, com atrito desprezível, aproximam-se com velocidades iguais e opostas de módulo $v = 5$ m/s, segundo retas paralelas, na direção x as quais estão separadas por uma distância $d = 1,40$ m.
- (a) Calcule o vetor momento angular do sistema e mostre que é o mesmo em relação a qualquer ponto e se conserva.
 - (b) Quando os dois patinadores chegam a uma distância $d = 1,40$ m um do outro, estendem os braços e dão-se

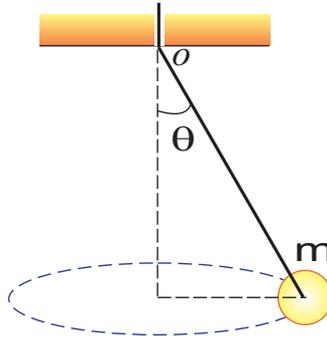


Figura 22: Pêndulo cônico do exercício 39.

as mãos, passando a girar em torno do centro de massa do sistema. Calcule a velocidade angular.

- (c) Calcule a energia cinética do sistema antes e depois dos patinadores se unirem. Explique o resultado.
41. Um disco com momento de inércia I_1 está girando com velocidade angular inicial ω_1 , em torno de um eixo central sem atrito. Num certo instante, este disco cai sobre outro disco, de momento de inércia I_2 , que está inicialmente em repouso, no mesmo eixo. Em virtude do atrito entre as superfícies, os dois discos terminam por atingir uma velocidade angular constante ω_f , comum a ambos.
- (a) Determine ω_f .
- (b) A energia cinética do sistema se conserva?
42. Uma porta de 15 kg e 70 cm de largura, suspensa por dobradiças bem azeitadas, está aberta de 90° , ou seja, com seu plano perpendicular ao plano do batente. Ela leva um empurrão na beirada aberta, com impacto equivalente ao de uma massa de 1 kg com velocidade de 2,5 m/s. Quanto tempo ela leva para fechar-se?

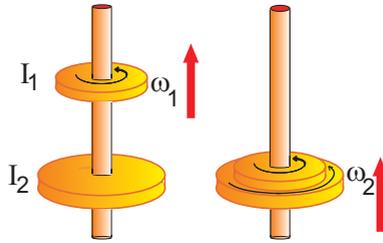
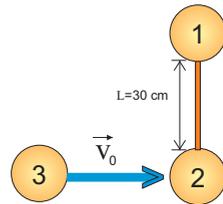


Figura 23: Discos girando do exercício 41.

43. Um haltere é formado por dois discos iguais, cada um massa m , rotulados por 1 e 2, unidos por uma barra rígida de massa desprezível e comprimento $L=30$ cm. O haltere repousa sobre uma mesa de ar horizontal. Um terceiro disco, rotulado por 3, de mesma massa m , desloca-se sobre a mesa com atrito desprezível e velocidade $v_0 = 3$ m/s, perpendicularmente ao haltere. Ele colide frontalmente com o disco 2 e fica colado a ele. Desprezando o raio dos discos, determine:
- O vetor posição do centro de massa em função do tempo;
 - O vetor velocidade do centro de massa;
 - A velocidade angular do sistema depois da colisão;
 - Determine a fração da energia mecânica inicial que é perdida no impacto.



44. Uma mesa de coquetel tem um tampo giratório, que é uma tábua circular de raio R e massa M , capaz de girar com atrito desprezível em torno de um eixo vertical da mesa. Uma bala de massa $m \ll M$ e velocidade v , disparada por um convidado, numa direção horizontal, vai encravar-se na periferia da tábua.

- Qual é a velocidade angular de rotação adquirida pela

tábua?

- (b) Que fração da energia cinética inicial é perdida no impacto?
45. Um alçapão quadrado de lado L e massa M está levantado verticalmente, em equilíbrio sobre as dobradiças, quando é levado a cair por uma ligeira trepidação. Desprezando o atrito, que velocidade angular terá adquirido ao bater no chão?
46. Um bloco de massa m_1 , que pode deslizar com atrito desprezível sobre um plano inclinado de inclinação θ em relação à horizontal, está ligado por um fio, que passa sobre uma polia de raio R e massa M , a uma massa suspensa m_2 ($m_2 > m_1$). O sistema é solto em repouso. Calcule, por conservação da energia, a velocidade v de m_2 após cair de uma altura h .

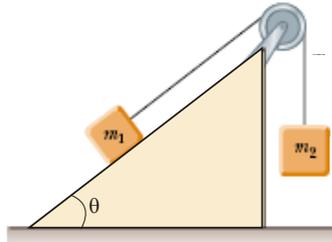


Figura 24: Esquema de massas e polia do exercício 46.

47. Um cilindro uniforme de raio R e massa M tem um fio enrolado sobre a sua superfície. O disco é solto do repouso com o fio vertical e com sua extremidade superior presa a uma barra fixa.
- (a) Qual é a tensão no fio?
- (b) Qual é o módulo da aceleração do centro de massa?
- (c) Qual é a velocidade do centro de massa depois que o disco desce uma distância vertical h ?

- (d) Verifique a resposta anterior utilizando o enfoque da energia.

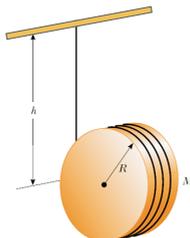


Figura 25: Cilindro do exercício 47.

48. Uma roda cilíndrica, de raio R e massa M , rola sem deslizar sobre um plano horizontal, deslocando-se com velocidade v , e sobe sobre um plano inclinado de inclinação θ , continuando a rolar sem deslizamento.
- (a) Até que altura h o centro da roda subirá sobre o plano inclinado?
- (b) Calcule a força de atrito entre o corpo e o plano inclinado para garantir que o movimento seja de rolamento sem deslizamento.

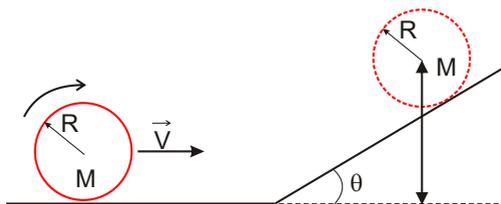


Figura 26: Roda cilíndrica subindo a rampa do exercício 48.

49. Uma bola de boliche esférica e uniforme, de massa M e raio R , é lançada com velocidade inicial $v = 5$ m/s e com veloci-

- dade angular inicial nula. O coeficiente de atrito cinético entre a bola e a pista é $\mu_c = 0,3$. Determinar:
- O tempo que a bola escorrega até atingir a condição de rolamento sem deslizamento;
 - A distância que a bola percorre antes de principiar a rolar sem escorregar.
50. Uma bola de futebol, de massa $m = 400 \text{ g}$ e com diâmetro $D = 24 \text{ cm}$, rola sem deslizar sobre um plano inclinado. Ela parte do repouso e, depois de 5 s e tendo completado exatamente 10 rotações, escapa pela borda do plano inclinado. Considerando que $I_{\text{CM}}^{\text{bola}} = 2/3MR^2$, calcule:
- O torque resultante sobre a bola relativo ao seu centro de massa, enquanto ela rola sobre o plano inclinado;
 - A energia de rotação da bola ao colidir com o solo.

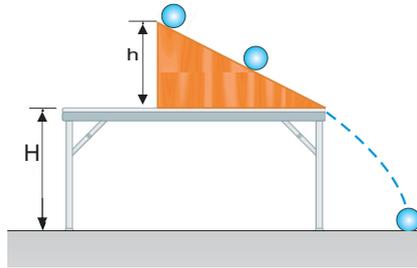


Figura 27: Bola descendo o plano inclinado do exercício 50.

51. Uma bola homogênea de raio r rola sem deslizar, a partir do repouso, desde o topo de um domo hemisférico de raio R .
- Depois de percorrer que ângulo θ em relação à vertical a bola deixará a superfície?
 - Com que velocidade v isso acontece?
 - A que distância D da parede do domo ela cai?

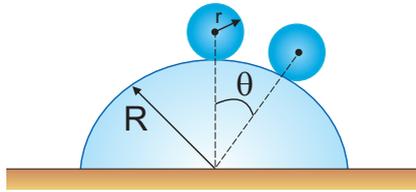


Figura 28: Bola rolando sobre um domo esférico do exercício 51.

52. Uma bola de bilhar de raio $R = 2,5$ cm e massa $m = 350$ g, inicialmente em repouso, recebe uma tacada seca. O impulso do taco é horizontal e aplicado à distância $2R/3$ abaixo da linha horizontal do centro. A velocidade linear da bola é $v_0 = 3$ m/s.

- Qual é o vetor velocidade angular inicial ω_0 ?
- Qual é o vetor velocidade linear da bola \vec{v}_r uma vez iniciado o rolamento sem escorregamento?
- Qual a energia cinética inicial da bola?
- Qual o trabalho da força de atrito?

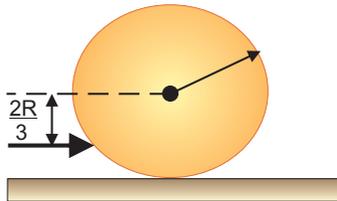
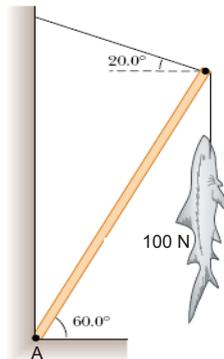


Figura 29: Bola de bilhar com tacada baixa do exercício 52.

2.5 Corpo rígido em equilíbrio

53. Na figura abaixo, a barra cujo peso é 20 N e o comprimento é L , está submetida à ação de várias forças.

- (a) Determine a tensão no fio que sustenta a barra.
- (b) Qual é o módulo da força exercida sobre a barra pela articulação A?
- (c) Se o fio que sustentam a barra e o peixe forem cortados, qual é a aceleração angular da barra exatamente no instante do corte?



- (d) Qual é a velocidade angular da barra quando esta atinge a posição horizontal?

54. Uma tábua de 90 N e 12 m de comprimento apóia-se em dois cavaletes, cada qual colocado a 1 m da extremidade da tábua. Um bloco 360 N é colocado sobre a tábua, a 3 m de uma extremidade. Determinar as forças exercidas pelos cavaletes sobre a tábua.

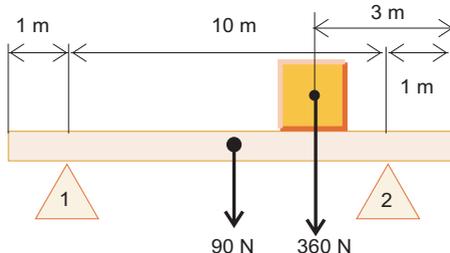
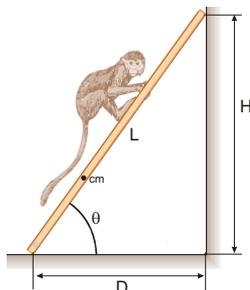


Figura 30: Tábua apoiada em cavaletes do exercício 54.

55. Uma escada de comprimento $L = 4,0$ m e massa $m = 15$ kg repousa apoiada numa parede. Sua extremidade superior está a uma altura $H = 3,0$ m do chão. O centro de gravidade da escada está situado a um terço do comprimento da escada, a partir da extremidade inferior. Um macaco de massa $m = 7$ kg sobe até um ponto situado na metade da escada. Suponha que não existe atrito entre a escada e a parede, mas que existe atrito entre a escada e o chão.

(a) Determine as forças exercidas na escada pela parede e pelo chão.

(b) Considere, agora, que o coeficiente de atrito estático entre a escada e o piso seja igual a $0,53$. Determine a fração do comprimento da escada que o macaco poderá subir sem que a escada comece a deslizar.



(c) Encontre os valores mínimo e máximo de μ_e , respectivamente, para que o macaco ou não possa sair do lugar ou possa chegar ao topo da escada, sem que ela comece a deslizar.

56. Na figura seguinte, considerando que a massa da barra horizontal é desprezível, pede-se:

- (a) Qual é o módulo das três forças que atuam na barra;
 (b) Qual é a força exercida pela barra sobre a articulação.

57. Uma barra homogênea, de massa $M = 1,0$ kg e comprimento $L = 0,75$ m, está apoiada em um banquinho, de altura $h = 0,40$ m, como mostra a figura 32. Sabendo que a distância $d = 0,30$ m, e supondo que a barra está parada e que só há atrito no ponto onde a barra encosta no chão, calcule:

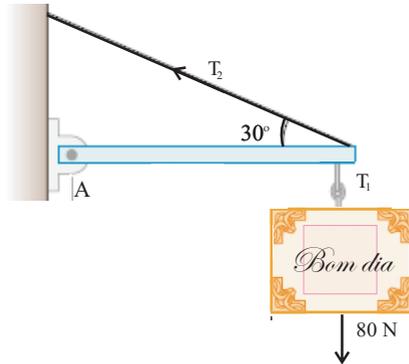


Figura 31: Esquema do exercício 56.

- (a) As forças de contato (normal) entre a cadeira e a barra (N_1) e entre a barra e o chão (N_2).
- (b) Calcule a força de atrito com o chão.

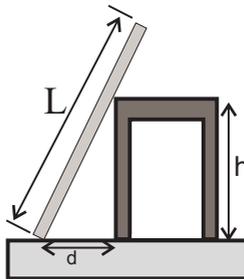


Figura 32: Esquema do exercício 57.

58. Na configuração da Figura 33, a barra tem peso 20 N e está submetida à ação de várias forças. Calcule a força R exercida pela articulação A sobre a barra.
59. A figura 34 mostra uma roda de massa M e raio R, onde uma força horizontal é aplicada sobre ela.

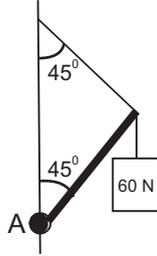


Figura 33: Esquema do exercício 58.

- (a) Calcule F_1 para que a roda suba o degrau de altura $h < R$.

Se uma força horizontal (designada agora por F_2) for aplicada no topo da roda, ela fica em repouso. Nesse caso pede-se:

- (b) Qual será a força normal exercida pela superfície horizontal sobre a roda?
- (c) Qual a componente horizontal da força exercida pela aresta do degrau sobre a roda?
- (d) Qual a componente vertical da força exercida pela aresta do degrau na roda?

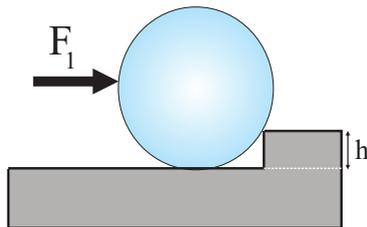


Figura 34: Roda subindo um degrau do exercício 59.

60. Considere uma barra homogênea, de comprimento $L=3$ m, massa $M = 90$ kg, e largura desprezível, mantida em equi-

lábrio suspensa por uma força F perpendicular à barra e aplicada a uma distância $d = 0,6$ m da extremidade. A outra extremidade se apoia no chão, dando uma inclinação $\theta = 27^\circ$. Calcule

- (a) A intensidade da força F e a força de atrito compatíveis com a situação;
- (b) A intensidade da força de reação do solo (R) sobre a extremidade da barra.

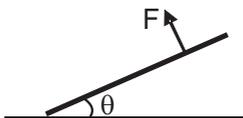


Figura 35: Esquema do exercício 60.

2.6 O oscilador harmônico

- 61. Um bloco de massa M , capaz de deslizar com atrito desprezível sobre um trilho de ar horizontal, está preso a uma extremidade do trilho por uma mola de massa desprezível e constante elástica k , inicialmente relaxada. Uma bolinha de chiclete de massa m , lançada em direção ao bloco com velocidade horizontal v , atinge-o no instante $t=0$ e fica grudada nele. Ache a expressão do deslocamento $x(t)$ do sistema para $t > 0$.
- 62. Uma partícula cuja massa é $0,50$ kg move-se em um movimento harmônico simples. O período de oscilação é de $0,10$ s e a amplitude do movimento é $0,10$ m. Quando a partícula está a $0,050$ m da posição de equilíbrio pede-se:
 - (a) Qual é magnitude da força que age sobre a partícula?

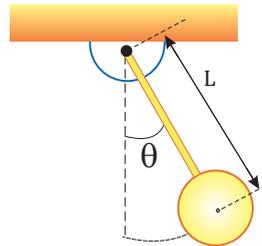
- (b) Qual a sua energia cinética?
63. Uma partícula oscila em movimento harmônico simples com período $T = 2$ s. Inicialmente está na posição de equilíbrio com velocidade escalar de 4 m/s no sentido de x crescente. Escrever as expressões da sua posição $x(t)$, da sua velocidade $v(t)$ e da sua aceleração $a(t)$. Represente graficamente essas funções.
64. A posição de uma partícula é dada por $x(t) = \sin 2t$, onde x está em metros e t em segundos.
- (a) Qual é o valor máximo de x ? Qual é o primeiro instante depois de $t = 0$ s em que ocorre esse máximo?
- (b) Determine $v(t)$. Qual é a velocidade em $t = 0$ s?
- (c) Determine $a(t)$. Qual é a aceleração em $t = 0$ s?
- (d) Qual é o valor máximo da aceleração?
65. Um corpo de massa 500 g executa um movimento harmônico simples com um período de 0,5 s. A sua energia total é de 5 J.
- (a) Qual é a amplitude das oscilações?
- (b) Qual é a velocidade máxima?
- (c) Qual é a aceleração máxima?
66. Uma partícula de 200 g está presa a uma mola de constante $k = 5$ N/m e pode oscilar livremente sobre uma superfície horizontal sem atrito. Se a massa for deslocada de 5 cm da sua posição de equilíbrio determine:
- (a) O período do seu movimento;
- (b) A máxima velocidade da partícula;
- (c) A máxima aceleração da partícula.

(d) Expresse o deslocamento, a velocidade e a aceleração da partícula como função do tempo.

(e) Qual é a energia total do sistema?

67. Um pêndulo simples é formado por uma massa de 12 kg, puntiforme, suspensa no teto por um fio ideal de comprimento $L = 2,5$ m. O pêndulo está inicialmente parado quando, em $t = 1$ s, a massa recebe um impulso lateral que lhe confere uma velocidade horizontal inicial de 1 cm/s. Escreva a equação diferencial que descreve o movimento na aproximação de pequenas oscilações. Determine a posição angular $\theta(t)$, onde θ é o ângulo que o fio faz com a direção vertical. Sugestão: utilize $\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t + \varphi)$.

68. O **pêndulo físico** é constituído por uma esfera de raio r e massa m suspensa por um fio de comprimento $L-r$. A distância entre o centro da esfera e o ponto de suspensão O é igual a L . Muitas vezes, quando r é muito menor do que L , pode-se tratar o sistema como um pêndulo simples de comprimento L .



(a) Utilizando o teorema dos eixos paralelos, calcular o momento de inércia em relação ao ponto de suspensão.

(b) Escreva a equação de movimento do sistema e mostre que o período pode ser escrito como:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g} \left(1 + \frac{2r^2}{5L^2} \right)} = T_0 \sqrt{1 + \frac{2r^2}{5L^2}}$$

onde T_0 é o período de um pêndulo simples de comprimento L .

- (c) Usando a aproximação $(1 + x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$, válida para $x \ll 1$, mostre que no caso $r \ll L$ o período pode ser aproximado por:

$$T = T_0 \left\{ 1 + \frac{r^2}{5L^2} \right\}$$

- (d) Para $L=1$ m e $r=0,2$ m, calcule o período do pêndulo.

69. A uma mola de massa desprezível e constante $k = 21$ N/m se encontra presa ao teto. Na sua extremidade livre é pendurado um bloco de 300 g e o sistema é abandonado sob ação do peso da massa e da força da mola. O sistema oscila harmonicamente, sem movimento pendular.

- (a) Qual é a elongação vertical (y_e) da mola, distância entre o ponto de equilíbrio da mola sem o bloco e do ponto de equilíbrio do sistema massa-mola?
- (b) Qual é a frequência das oscilações? E a amplitude das oscilações?
- (c) Escreva a equação do movimento e encontre $y(t)$.

70. Uma barra homogênea de massa M e comprimento L , suspensa por uma de suas extremidades (pêndulo físico), é deslocada da sua posição de equilíbrio, de um ângulo inicial θ_0 , e abandonada. Utilizando a aproximação de pequenas oscilações determine:

- (a) A frequência e o período do movimento;
- (b) A velocidade angular da barra ao passar pela posição de equilíbrio;
- (c) A posição angular do pêndulo físico em função do tempo.
- (d) Avalie as expressões encontradas nos itens anteriores assumindo que $\theta_0 = 0,1$ rad, $M = 100$ g e $L = 15$ cm.

71. Um disco homogêneo de raio R e massa M pode oscilar em torno de um eixo que passa pela sua borda. Determine seu período para pequenas oscilações e o comprimento do pêndulo simples equivalente.
72. Imagine um cilindro maciço, homogêneo, ligado a uma mola horizontal de massa nula, que pode rolar sem deslizar sobre uma superfície. A constante elástica da mola é $k = 3,0 \text{ N/m}$. Desloca-se o cilindro até a posição em que a mola distende $0,25 \text{ m}$, soltando-o em seguida.
- (a) Mostre que, nessas condições, o centro de massa do cilindro executa movimento harmônico simples com período $T = 2\pi \left(\frac{3M}{2k} \right)^{1/2}$.
 - (b) Determine a frequência e a amplitude do movimento e escreva as expressões de $x(t)$, $v(t)$ e $a(t)$.
 - (c) Analise o comportamento da força de atrito, mostrando que é oscilatória, e determine o valor mínimo do coeficiente de atrito estático que garanta que haja rolamento sem deslizamento;
 - (d) Calcule as energias cinéticas de rotação e translação do cilindro, quando ele passa pela posição de equilíbrio.
73. Um oscilador, com massa de 50 g e período $2,0 \text{ s}$, tem uma amplitude que decresce 5% em cada ciclo. Determine:
- (a) A constante de amortecimento;
 - (b) A fração da energia dissipada em cada ciclo;
 - (c) O tempo necessário para que a amplitude de oscilação caia à metade do valor inicial.
74. O movimento de recuo de um canhão é amortecido sob o efeito de um sistema de molas imerso em óleo. A constante elástica do sistema de molas é $k = 7,0 \times 10^4 \text{ N/m}$. Determinar o coeficiente ρ da força de resistência viscosa para que o

- cano do canhão volte à posição de equilíbrio o mais depressa possível, sem oscilar.
75. Um pêndulo simples oscila com período de 2 segundos e amplitude de 2° . Após dez oscilações completas a amplitude se reduz a $1,5^\circ$. Determine a constante de amortecimento γ .
76. Um corpo de massa $m = 0,5$ kg oscila sob a ação da força de uma mola, de constante elástica $k = 50,5$ N/m, e de uma força amortecedora $F = -dx/dt$. Sabendo-se que em $t = 0$ s o corpo é abandonado a uma distância x_0 da posição de equilíbrio,
- (a) Determine $x(t)$.
 - (b) Calcule a variação percentual de energia durante o primeiro ciclo de oscilação.
77. Um corpo de massa $m = 50$ g está preso a uma mola e oscila livremente com uma frequência angular de 20 rad/s. Este oscilador é posteriormente colocado num meio cujo coeficiente de atrito viscoso é $\rho = 0,25$ kg/s. Nestas condições o oscilador é mantido em regime estacionário, devido a uma força externa $F = F_o \cos \omega t$ onde $F_o = 0,25$ N e $\omega = 20$ rad/s. Determine para esta última situação:
- (a) A equação diferencial que descreve o movimento. Escreva a equação explicitando os valores numéricos dos coeficientes indicando, também, suas respectivas unidades;
 - (b) A amplitude do movimento;
 - (c) Em que instantes a elongação é máxima em módulo.
- Subitamente, a força externa é desligada, num instante em que a elongação é máxima. Determine para a nova situação:

- (d) A equação diferencial que descreve o movimento, explicitando os valores numéricos dos coeficientes bem como suas respectivas unidades;
- (e) A frequência angular de oscilação.
78. Um corpo de massa $m = 50$ kg está suspenso por uma mola de constante elástica $k = 1,125 \times 10^4$ N/m. Uma força harmônica de amplitude $f_{\max} = 45$ N atua sobre o corpo ao longo da direção vertical. Considerando-se a existência de atrito viscoso com o coeficiente $\rho = 100,0$ N · s/m determine para o regime estacionário:
- (a) A frequência de ressonância;
- (b) A amplitude máxima de ressonância;
- (c) A defasagem entre o máximo da força harmônica e o máximo da amplitude.
79. Mostre que o valor médio da variação da energia no tempo de um oscilador amortecido forçado é nulo, ou seja, mostre que $\overline{\frac{dE}{dt}} = 0$.
80. Considere um sistema massa-mola imerso em um meio viscoso numa oscilação harmônica forçada. Determine:
- (a) A potência média fornecida ao sistema massa-mola;
- (b) A potência fornecida ao sistema quando há ressonância.

2.7 Fluidos

81. Uma represa retangular, de largura L suporta uma massa de água com altura H .
- (a) Desprezando a pressão atmosférica, determine a força total devida à pressão da água atuando num elemento

infinitesimal retangular de altura dy , situado a uma profundidade y .

- (b) Integre o resultado obtido em (a) para calcular a força horizontal total exercida pela água sobre a represa. Por que é razoável desprezar a pressão atmosférica?

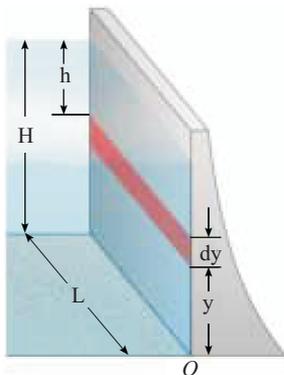


Figura 36: Esquema do exercício 81.

82. Um tubo em U, vertical, tem área de secção reta igual a $1,4 \text{ cm}^2$ e contém 75 ml de mercúrio. Calcule a diferença entre as interfaces água-ar e mercúrio-ar quando 25 ml de água são derramados em um dos braços do tubo.

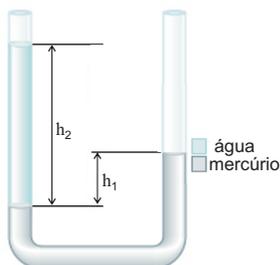


Figura 37: Esquema do exercício 82.

83. Um cilindro de área de secção transversal A está ligado por um tubo a um dos lados de um manômetro de mercúrio. Qual é a diferença de altura das duas colunas do manômetro quando uma massa M é colocada sobre o pistão do cilindro.
84. Num poço de 30 m de profundidade, com a superfície da água a 10 m do fundo, foi derramada, por acidente, gasolina até a boca. Sabendo que a pressão atmosférica local é de 105 N/m^2 , determine:
- (a) A pressão absoluta em função da profundidade z do poço no volume com gasolina, $p_1(z)$, e no volume com água, $p_2(z)$. Represente o resultado num gráfico de $p_{\text{abs}}(\text{N/m}^2) \times z(\text{m})$, considerando o eixo z positivo apontando para baixo.

Um bóia cilíndrica de 1 m de comprimento e secção transversal de 1 cm^2 , foi fabricada com plástico de densidade $0,3 \text{ g/cm}^3$. Um lastro de 50 g e volume desprezível foi colocado na extremidade inferior da bóia, para que a mesma permanecesse na posição vertical. Se a bóia for solta dentro do poço calcule:

- (b) Em que posição ela vai parar;
- (c) A porção da bóia que fica mergulhada na água.
85. Um pistão é constituído por um tubo oco cilíndrico de diâmetro d que se adapta a um recipiente também cilíndrico de diâmetro D ($d < D$). A massa do pistão com o tubo é M e ele está inicialmente no fundo do recipiente. Despeja-se então pelo tubo, uma massa m de líquido de densidade ρ e em consequência o pistão se eleva de uma altura H . Calcule H .
86. Quando um peso P é pendurado em água por uma corda presa a um dinamômetro, este marca P' . Mostre que a densidade do objeto pendurado é: $\rho = [P/(P - P')]\rho_{\text{água}}$. Quando

se pendura uma pedra de 6 kg a um dinamômetro e se mergulha a pedra em água, a leitura da balança é 40 N.

- (a) Qual a densidade da pedra?
- (b) Qual o volume da pedra?

87. Um bloco cúbico de aço, de 5 cm de aresta e densidade $7,8 \text{ g/cm}^3$, está mergulhado num recipiente com água, suspenso de uma balança de molas graduada. A massa total do recipiente e da água é de 1 kg e ele está sobre o prato de outra balança, equilibrado por um peso de massa m que se encontra no outro prato da balança.

- (a) Qual a leitura da balança de molas?
- (b) Qual é o valor de m ?

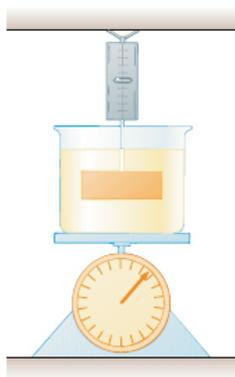


Figura 38: Esquema do exercício 87.

3 Resumo sobre oscilações forçadas amortecidas

A equação que descreve o movimento harmônico forçado é dada por:

$$m\ddot{x} + \rho\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t) \quad (1)$$

Dividindo a expressão anterior pela massa m obtemos:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) \quad (2)$$

onde definimos $\gamma = \rho/m$ e $\omega_0^2 = k/m$. A solução geral da equação 1 é dada por:

$$x(t) = x_p(t) + x_h(t) \quad (3)$$

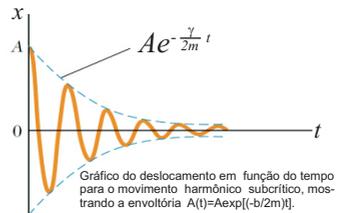
onde x_p é a solução particular (solução estacionária) e x_h é a solução da equação homogênea (solução transiente).

A solução homogênea pode ser:

1. **Subcrítico** ($\frac{\gamma}{2} < \omega_0$):

$$x(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\text{sendo } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$$



2. **Crítico** ($\frac{\gamma}{2} = \omega_0$):

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} [A + Bt]$$

3. **Supercrítico** ($\frac{\gamma}{2} > \omega_0$):

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} [Ae^{\beta t} + Be^{-\beta t}] \quad \text{sendo } \beta = \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$$

As soluções homogêneas tendem a zero para $t \rightarrow \infty$, tornando-se desprezíveis para tempos maiores que T_d (o tempo de decaimento).

Por outro lado, a força externa continua suprindo energia ao sistema indefinidamente de modo que a oscilações forçadas devem persistir e para $t \gg T_d$ vão sobreviver apenas as oscilações forçadas, correspondendo à solução particular da equação inhomogênea.

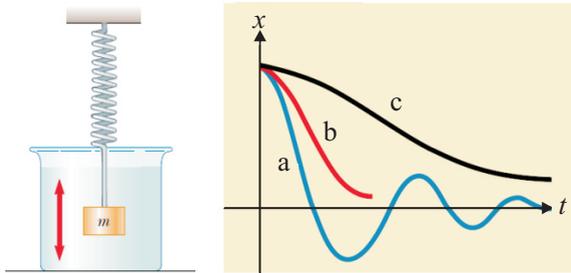


Figura 39: Gráfico do deslocamento em função do tempo para o movimento de oscilador com amortecimento: (a) subcrítico; (b) crítico e (c) supercrítico.

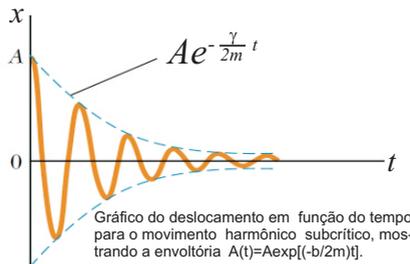


Figura 40: Gráfico do deslocamento em função do tempo para o movimento do oscilador com amortecimento subcrítico mostrando a envoltória $A(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}$.

3.1 Forma trigonométrica de um número complexo

Um número complexo pode ser escrito como a soma de um número real e um número imaginário puro:

$$z = x + iy \quad (4)$$

O número complexo z pode ser representado geometricamente no plano complexo como um segmento orientado (vetor) da origem ao ponto (x, y) . Podemos escrevê-lo em coordenadas polares utilizando as relações: $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$. Então teremos:

$$z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta} \quad (5)$$

que é a forma trigonométrica do número complexo.

O módulo de z é dado por:

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (6)$$

e θ chama-se argumento de z , dado por:

$$\theta = \tan^{-1}(y/x) \quad (7)$$

3.2 Como achar a solução particular

Consideremos a equação 1 para uma função complexa:

$$\ddot{z} + \gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t} \quad (8)$$

e procuremos uma solução da forma:

$$z(t) = C e^{i\omega t} \quad (9)$$

onde C é uma constante complexa arbitrária. Substituindo $z(t)$, $\dot{z} = (i\omega)C e^{i\omega t}$ e $\ddot{z} = (-\omega^2)C e^{i\omega t}$ na Eq. 8 obtemos:

$$-\omega^2 C e^{i\omega t} + \gamma(i\omega)C e^{i\omega t} + \omega_0^2 C e^{i\omega t} = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t} \quad (10)$$

Simplificando a expressão anterior temos:

$$C(-\omega^2 + \gamma(i\omega) + \omega_0^2) = \frac{F_0}{m} \quad (11)$$

ou

$$C = \frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega} \quad (12)$$

A constante complexa C é o quociente de dois números complexos:

$$C = \frac{z_1}{z_2} \quad (13)$$

onde

$$z_1 = \frac{F_0}{m} + i0 \quad (14)$$

e

$$z_2 = (\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega \quad (15)$$

Podemos ainda reescrever o número complexo z_1 como:

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \quad (16)$$

onde

$$r_1 = \frac{F_0}{m} \quad (17)$$

e

$$\tan \theta_1 = 0 \Rightarrow \theta_1 = 0 \quad (18)$$

O número complexo z_2 pode ser escrito na forma

$$z_2 = r_2 e^{i\theta_2} \quad (19)$$

onde

$$r_2 = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma^2 \omega^2)} \quad (20)$$

e

$$\tan \theta_2 = \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (21)$$

Com estas definições podemos reescrever a eq. 13 como:

$$C = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{r_1}{r_2} e^{-i\theta_2} \quad (22)$$

uma vez que $\theta_1 = 0$. Substituindo os valores de r_1 (eq. 16) e r_2 (eq. 20) podemos reescrever a eq. 22 como:

$$C = \frac{(F_0/m)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma^2 \omega^2)}} e^{-i\theta_2} = Ae^{i\varphi} \quad (23)$$

onde

$$A = \frac{(F_0/m)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma^2 \omega^2)}} \quad (24)$$

$$\varphi = -\theta_2 = -\tan^{-1} \left[\frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \right] \quad (25)$$

Estamos interessados apenas na parte real de z , ou seja:

$$x(t) = \text{Re}(z(t)) = \text{Re}(Ae^{i\varphi}e^{i\omega t}) \quad (26)$$

$$x(t) = \text{Re} [A(\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \omega t + i \sin \omega t)]$$

$$x(t) = A(\cos \varphi \cos \omega t - \sin \varphi \sin \omega t)$$

$$x_p(t) = A [\cos(\omega t - \varphi)]$$

onde a constante A é dada pela expressão 24 e a fase pela expressão 25.

4 Solução do exercício 16

(a) Seja \vec{p}_{1i} o momento da partícula incidente de massa m_1 . Então o momento do sistema na configuração inicial é $\vec{P}_i = \vec{p}_{1i} = m_1 \vec{v}_{1i}$. Se \vec{p}_{1f} e \vec{p}_{2f} são os momentos finais das duas partículas, o momento do sistema na configuração final é $\vec{P}_f = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f}$.

Por causa da conservação do momento, $\vec{P}_i = \vec{P}_f$, teremos:

$$\vec{p}_{1i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f} \Rightarrow \boxed{\vec{p}_{2f} = \vec{p}_{1i} - \vec{p}_{1f}} \quad (27)$$

Como estamos supondo a colisão elástica, temos a conservação da energia:

$$\frac{p_{1i}^2}{2m_1} = \frac{p_{1f}^2}{2m_1} + \frac{p_{2f}^2}{2m_2} \Rightarrow \boxed{\frac{p_{2f}^2}{m_2} = \frac{1}{m_1} (p_{1i}^2 - p_{1f}^2)} \quad (28)$$

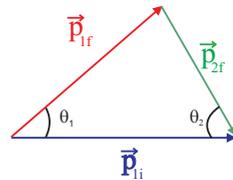
Elevando a expressão (1) ao quadrado obtemos:

$$\vec{p}_{2f} \cdot \vec{p}_{2f} = (\vec{p}_{1i} - \vec{p}_{1f}) \cdot (\vec{p}_{1i} - \vec{p}_{1f})$$

Esta expressão ainda pode ser desenvolvida como:

$$p_{2f}^2 = p_{1i}^2 + p_{1f}^2 - 2\vec{p}_{1i} \cdot \vec{p}_{1f} \quad (29)$$

Por causa da conservação do momento, os vetores \vec{p}_{1i} , \vec{p}_{1f} e \vec{p}_{2f} estão dispostos como no triângulo representado na figura ao lado. O produto escalar do terceiro termo no lado direito da equação (3) pode ser escrito como $2\vec{p}_{1i} \cdot \vec{p}_{1f} = 2p_{1i}p_{1f}\cos\theta_1$. Desta forma, a expressão (3) pode ser reescrita como:



$$p_{2f}^2 = p_{1i}^2 + p_{1f}^2 - 2p_{1i}p_{1f}\cos\theta_1 \quad (30)$$

Substituindo a expressão (4) em (2) obtemos:

$$p_{1i}^2 + p_{1f}^2 - 2p_{1i}p_{1f}\cos\theta_1 = \lambda p_{1i}^2 - \lambda p_{1f}^2 \quad (31)$$

onde introduzimos o parâmetro adimensional

$$\lambda = \frac{m_2}{m_1}.$$

Os termos da expressão (5) podem ser reagrupados e obtemos a equação do segundo grau:

$$(1 + \lambda)p_{1f}^2 - 2p_{1i}\cos\theta_1 p_{1f} + (1 - \lambda)p_{1i}^2 = 0 \quad (32)$$

Para que esta equação do segundo grau tenha solução devemos ter que:

$$\Delta = 4p_{1i}^2\cos^2\theta_1 - 4(1 + \lambda)(1 - \lambda)p_{1i}^2 \geq 0 \quad (33)$$

ou

$$4p_{1i}^2[\cos^2\theta_1 - (1 - \lambda^2)] \geq 0 \Rightarrow \cos^2\theta_1 \geq (1 - \lambda^2) \quad (34)$$

Em nosso problema, $\lambda = \frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{4}$. Então, obtemos a condição:

$$\cos^2\theta_1 \geq \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2\right) \Rightarrow \cos^2\theta_1 \geq 0,9375 \Rightarrow$$

$$\boxed{\theta_1 \leq 14,5^\circ}$$

(b) Como

- Energia cinética inicial da partícula α : $E_c^\alpha = \frac{p_{1i}^2}{4m}$
- Energia cinética do neutron de recuo: $E_c^n = \frac{p_{2f}^2}{m}$

então para obtermos que fração da energia cinética incidente vai para o neutron, devemos escrever o momento linear final do neutron (p_{2f}) em função do momento linear inicial da partícula α (p_{1i}). Temos então que, para $\theta_1 = 14,5^\circ$, a solução da equação (31) é:

$$p_{1f} = \frac{4}{5} p_{1i}(0,9682) \Rightarrow p_{1f} \approx 0,775 p_{1i} \quad (35)$$

Substituindo este resultado na equação (27), encontramos p_{2f} em função de p_{1i} :

$$p_{2f}^2 = \frac{m_2}{m_1} [p_{1i}^2 - (0,78 p_{1i})^2] \Rightarrow p_{2f} \approx 0,316 p_{1i} \quad (36)$$

Desse modo:

$$\boxed{\frac{E_c^n}{E_c^\alpha} = \frac{4 p_{2f}^2}{p_{1i}^2} \approx 4(0,316)^2 = 0,40}$$

Portanto, 40% da energia incidente vai para o neutron de recuo.

(c) Para obter o ângulo θ_2 entre a direção de recuo e a de incidência é melhor escrever as equações de conservação do momento linear nas direções x e y :

$$\text{direção } x: \quad p_{1f} \cos \theta_1 + p_{2f} \cos \theta_2 = p_{1i} \quad (37)$$

$$\text{direção } y: \quad p_{1f} \sin \theta_1 - p_{2f} \sin \theta_2 = 0 \quad (38)$$

Da equação (37) temos que

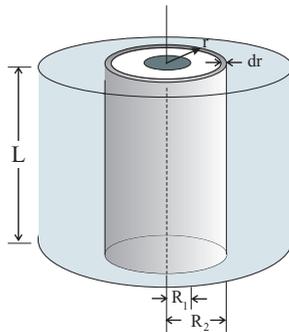
$$\sin \theta_2 = \frac{p_{1f}}{p_{2f}} \sin \theta_1 \quad (39)$$

Substituindo os resultados obtidos da relação entre p_{1f} e p_{2f} com p_{1i} , equações (34) e (35), na equação (38), e fazendo $\theta_1 = 14,5^\circ$, temos

$$\boxed{\sin \theta_2 = \frac{0,775}{0,316} (0,25) \approx 0,61 \Rightarrow \theta_2 = 37,5^\circ}$$

5 Solução do exercício 27

Escolhemos como elemento de volume uma casca cilíndrica fina de raio r , espessura dr e comprimento L . Todas as partes desse elemento de massa estão situadas a uma mesma distância do eixo do cilindro. O volume do elemento é aproximadamente igual ao volume de uma placa com comprimento L , espessura dr e largura $2\pi r$ (a circunferência da casca cilíndrica). Portanto



$$dm = \rho dV = \rho(2\pi r L dr).$$

O momento de inércia é dado por

$$\begin{aligned} I &= \int r^2 dm = \int_{R_1}^{R_2} r^2 \rho(2\pi r L dr) \\ &= 2\pi \rho L \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr \\ &= \frac{2\pi \rho L}{4} (R_2^4 - R_1^4) \\ &= \frac{\pi \rho L}{2} (R_2^2 - R_1^2)(R_2^2 + R_1^2) \end{aligned}$$

Geralmente é mais conveniente expressar o momento de inércia em função da massa total M do corpo, que é a sua densidade ρ multiplicada pelo volume total V . O volume é

$$V = \pi L (R_2^2 - R_1^2),$$

de modo que a massa é

$$M = \rho V = \pi L \rho (R_2^2 - R_1^2),$$

e o momento de inércia é

$$I = \frac{1}{2}M(R_2^2 + R_1^2).$$

No caso de um cilindro maciço, temos $R_1 = 0$. Chamando o raio externo R_2 simplesmente de R , verificamos que o momento de inércia de um cilindro maciço de raio R é dado por

$$I = \frac{1}{2}MR^2.$$

Caso o cilindro possua uma parede muito fina (como um tubo), $R_1 \approx R_2$; se designarmos por R o raio comum, obtemos

$$I = MR^2.$$

6 Respostas dos exercícios

6.1 Sistemas de partículas: conservação do momento linear

- (a) $\vec{R}_{\text{CM}} = \frac{16}{15} \hat{i} + \frac{20}{15} \hat{j}$ (m);
 - (b) $\vec{R}_{\text{CM}} = \frac{5}{6} \hat{i} + \frac{3}{6} \hat{j} + \frac{1}{6} \hat{k}$ (m);
 - (c) $\vec{R}_{\text{CM}} = -\frac{1}{4} \hat{i}$ (m).
- (a) $\vec{R}_{\text{CM}}(t) = \left[\frac{1}{4} t^2 + \frac{3}{2} \right] \hat{i} + \left[-\frac{3}{16} t^2 + \frac{15}{8} \right] \hat{j}$ (m);
 - (b) $\vec{P} = 8t \hat{i} - 6t \hat{j}$ (kg · m/s).
- (a) $\vec{V}_{\text{avião}} = \vec{V}_{\text{CM}} = 75 \hat{i} + 12,5 \hat{j}$ (m/s);
 - (b) $\vec{P} = 6 \times 10^5 \hat{i} + 1 \times 10^5 \hat{j}$ (kg · m/s).
- (a) $E_c = 64,0 \text{ J}$ e $\vec{V}_{\text{CM}} = 3,5 \hat{i}$ (m/s);
 - (b) $\vec{u}_1 = 1,5 \hat{i}$ (m/s) e $\vec{u}_2 = -2,5 \hat{i}$ (m/s);
 - (c) $E_{\text{rel}} = 15,0 \text{ J}$.
 - (d) $E_{\text{CM}} = 49,0 \text{ J}$.
- (a) $\vec{v}_2 = 6,0 \hat{i} - 4,0 \hat{j}$ (m/s);
 - (b) $\vec{V}_{\text{CM}} = 4,0 \hat{i}$ (m/s).
- (a) $x_2 = 120\sqrt{3}$ m;
 - (b) $\Delta E = +7200,0 \text{ J}$.
- (a) $D = 4,5$ m;
 - (b) A energia mecânica não se conserva, pois a energia cinética inicial é nula e a energia cinética final é diferente de zero, sendo que a energia potencial não se altera. A energia cinética final é igual a 9,45 J.

8. O remador não consegue alcançar a estaca. Faltam 20 cm.
9. (a) $\vec{v} = +1,88 \hat{i}$ (m/s);
 (b) $\vec{v}_c = +1,50 \hat{i}$ (m/s);
 (c) $\vec{v}_c = +1,13 \hat{i}$ (m/s);
10. (a) $\vec{v}_T = -6 \hat{i}$ (m/s);
 (b) $\vec{I} = -12 \hat{i}$ (N · s);
 (c) $\vec{F} = -240 \hat{i}$ (N).
11. (a) $\vec{v} = -3 \hat{i}$ (m/s);
 (b) $\Delta s = 64,3$ cm.

6.2 Sistema de partículas: colisões

12. (a) $H = 45,0$ cm ; (b) $h = 11,5$ cm.
13. $H = 4$ m.
14. (a) $v_{\text{bala}} \approx 95$ m/s.
 (b) 98% da energia mecânica inicial se perde na colisão.
15. (a) $v_{1f} = 3$ m/s e $v_{2f} = 8$ m/s.
 (b) A energia transferida é de 32 J.
16. Resolução na página 55 da apostila.
 (a) $\theta_1 = 14,5^\circ$;
 (b) $\frac{E_c^n}{E_c^\alpha} = 0,4$; (c) $\theta_2 \approx 37,5^\circ$
17. $v_f \approx 61$ km/h.
18. $\vec{v}_{\text{CM}} = \frac{1}{4} [25 \hat{i} + 50 \hat{j}]$ (m/s).
 O carro foi arrastado em uma direção que faz um ângulo $\theta \approx 63,4^\circ$ com o eixo x , por uma distância de 19,53 m.

19. $v_{1f} = 5\sqrt{3} \text{ m/s}$, $v_{2f} = 5 \text{ m/s}$ e $\theta_2 = 60^\circ$.
20. (a) $\vec{v}_{2f} = 4\hat{i} - 3\hat{j} \text{ (m/s)}$.
 (b) Choque inelástico. A variação da energia cinética foi $\Delta E_c = +12 \text{ J}$.
21. (a) $\vec{v}_{\text{bloco}} = 2,68\hat{i} \text{ (m/s)}$.
 (b) $\vec{v}_{\text{bala}} = 1432\hat{i} \text{ (m/s)}$.
22. (a) $W = +4 \text{ J}$.
 (b) Depois da colisão a velocidade da bola é $v_{\text{bola}} = -2,4 \text{ m/s}$ e a do bloco é $v_{\text{bloco}} = +1,6 \text{ m/s}$.
 (c) $H = 28,8 \text{ cm}$. (d) $\Delta s = 80 \text{ cm}$.

6.3 Cinemática e dinâmica do movimento de corpos rígidos

23. (a) Partículas nas posições $x_1 = \pm 0,2 \text{ m} \Rightarrow v_1 = 0,4 \text{ m/s}$.
 Partículas nas posições $x_2 = \pm 0,4 \text{ m} \Rightarrow v_2 = 0,8 \text{ m/s}$.
 (b) Energia cinética do sistema $\Rightarrow E_c = 1,12 \text{ J}$.
 (c) Momento de inércia do sistema $\Rightarrow I = 0,56 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.
24. (a) $I_y = 2ma^2$ e $E_c = ma^2\omega^2$.
 (b) $I_z = 2m(a^2 + b^2)$ e $E_c = (a^2 + b^2)m\omega^2$.
25. $I_z = \frac{1}{12}ML^2$ e $I_{z'} = \frac{1}{3}ML^2$
26. $I = \frac{1}{2}MR^2$
27. No cilindro vazado a massa M está distribuída em uma distância média maior, em relação ao eixo. Resolução na página 56 da apostila.

28. $I_z = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$
29. (a) $\vec{\tau} = -2,4 \hat{k}$ (N · m);
 (b) $\vec{\alpha}(t) = -\frac{200}{3} \hat{k}$ (rad/s²);
 (c) $\vec{\omega}(3) = -200 \hat{k}$ (rad/s) e $E_c = 720$ J;
 (d) $\Delta\vec{\theta}_{0 \rightarrow 3} = -300 \hat{k}$ (rad) e $W = \vec{\tau} \cdot \Delta\vec{\theta} = 720$ J.
30. (a) $\vec{\tau}_R = -1,56 \hat{k}$ (N · m);
 (b) $\vec{\alpha} = -108,33 \hat{k}$ (rad/s²);
 (c) $\vec{\omega}(t) = -(4 + 108,33t) \hat{k}$ (rad/s);
 (d) $E_c = 779,3$ J;
 (e) $\Delta\vec{\theta}_{0 \rightarrow 3} = -499,5 \hat{k}$ (rad) e $W = \vec{\tau} \cdot \Delta\vec{\theta} = 779,3$ J.
31. (a) $\vec{a}_{CM}(t) = +0,2 \hat{i}$ (m/s²);
 $\vec{v}_{CM}(t) = +0,2t \hat{i}$ (m/s);
 $\vec{r}_{CM}(t) = +0,1t^2 \hat{i}$ (m).
 (b) $\vec{\alpha}(t) = +\frac{10}{3} \hat{k}$ (rad/s²);
 $\vec{\omega}(t) = +\frac{10}{3}t \hat{k}$ (rad/s);
 $\vec{\theta}(t) = +\frac{10}{6}t^2 \hat{k}$ (rad).
 (c) O cilindro dará 6,63 voltas.
 (d) $E_c = 2550$ J.
32. (a) $E_c = 13,16$ J.
 (b) $\vec{\alpha} = -7,33 \hat{k}$ (rad/s²).
 (c) $\vec{\tau} = -0,036 \hat{k}$ (N · m).
 (d) $W = -13,16$ J.
33. (a) $m_2 = 8$ kg.

- (b) $\vec{\alpha} = 0,84 \hat{k}$ (rad/s²), $T_1 = 347,9$ N e $T_2 = 88,1$ N.
34. (a) $T_1 = 120,3$ N e $T_2 = 160,0$ N.
 (b) $I = 1,25$ kg · m².
35. (a) $a = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2 + M/2}$;
 $T_1 = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2 + M/2}$ e
 $T_2 = m_2 g \left[\frac{m_1 + M/2}{m_1 + m_2 + M/2} \right]$
- (b) $\tau = m_2 g R$, saindo ou entrando na página;
 (c) $L = (m_1 + m_2 + M/2) v R$, na mesma direção e no mesmo sentido do torque.
36. (a) $v = \left[\frac{2(m_2 - m_1)gh}{m_1 + m_2 + M/2} \right]^{1/2} = 2,76$ (m/s) e
 $\omega = 27,6$ rad/s.
 (b) $T_1 = 238$ N e $T_2 = 243$ N.
 (c) $t = 1,45$ s.

6.4 Momento angular, sua conservação e aplicações

37. $\vec{\ell}_0 = -m v b \hat{k}$ e $\vec{\ell}_{0'} = m v b' \hat{k}$
38. (a) O torque é nulo.
 (b) $\vec{\ell}_o = +m v R \hat{k} = m R^2 \omega \hat{k}$;
39. (a) $\delta \ell = 0,60$ m.
 (b) $\omega_f / \omega_i = 2,04$.
40. (a) $|\vec{L}| = 420$ kg · m²/s (direção perpendicular ao chão).

- (b) $|\vec{\omega}| = 7,14 \text{ rad/s}$ (mesma direção e sentido de L).
- (c) $E_c^a = E_c^d = 1500 \text{ J}$ (se conserva).
41. (a) $\omega_f = \left[\frac{I_1}{I_1 + I_2} \right] \omega_1$
- (b) A energia cinética do sistema diminui: $E_f = \left[\frac{I_1}{I_1 + I_2} \right] E_i$.
42. $t = 2,2 \text{ s}$.
43. (a) $\vec{R}_{CM}(t) = \frac{1}{3}v_0t \hat{i} + \frac{L}{3} \hat{j} = t \hat{i} + 0,1 \hat{j} \text{ (m)}$.
- (b) $\vec{V}_{CM}(t) = \frac{1}{3}v_0 \hat{i} = 1 \hat{i} \text{ (m/s)}$.
- (c) $\vec{\omega} = \frac{v_0}{2L} \hat{k} = 5 \hat{k} \text{ (rad/s)}$.
- (d) 50% da energia inicial foi perdida na colisão.
44. (a) $\omega = \frac{2mv}{MR}$;
- (b) $\frac{E_f}{E_i} = \frac{2m}{M}$ e a fração da energia cinética inicial perdida na colisão é $f = \left(\frac{2m}{M} - 1 \right)$
45. $\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}$.
46. $v = \left[\frac{2gh(m_2 - m_1 \sin \theta)}{m_1 + m_2 + M/2} \right]^{1/2}$
47. (a) $T = \frac{Mg}{3}$.
- (b) $a = \frac{2}{3}g$.
- (c) $v = \left[\frac{4}{3}gh \right]^{1/2}$.

48. (a) $h = R + \frac{3v^2}{4g}$. (b) $F_{\text{at}} = \frac{Mg \sin \theta}{3}$
49. (a) $t = \frac{10}{21}$ s.
 (b) $D = 2,04$ m.
50. (a) $\tau = 1,93 \times 10^{-2}$ N · m; (b) $E_{\text{rot}} = 1,2$ J.
51. (a) $\theta \approx 54^\circ$.
 (b) $v = \left[\frac{10}{17} g (R + r) \right]^{1/2}$.
52. (a) $\vec{\omega}_0 = \frac{5}{3} \frac{v_0}{R} \hat{k} = 200 \hat{k}$ (rad/s).
 (b) $\vec{v}_r = \frac{5}{21} v_0 \hat{i} = \frac{5}{7} \hat{i} = 0,714 \hat{i}$ (m/s) e
 $\vec{\omega}_r = -\frac{5}{21} R v_0 \hat{k} = -\frac{1}{56} \hat{k} = -0,018 \hat{k}$ (rad/s)
 (c) $E_c^i = \frac{19}{18} m v_0^2 = \frac{133}{40} = 3,325$ J.
 (d) $W_{\text{at}} = -\frac{64}{63} m v_0^2 = -\frac{16}{5} = -3,200$ J.

6.5 Corpo rígido em equilíbrio

53. (a) $T = 55,85$ N.
 (b) O vetor força na articulação é $\vec{A} = 52,48 \hat{i} + 100,90 \hat{j}$ (N).
 (c) $\alpha = \frac{3g}{4L}$.
 (d) $\omega^2 = \frac{3g\sqrt{3}}{2L}$.
54. $N_1 = 117$ N e $N_2 = 333$ N.
55. (a) As intensidades das forças são:

- Entre a parede e a tábua: $N_1 = 75 \text{ N}$;
 - Entre o chão e a tábua: $N_2 = 220 \text{ N}$ e $F_{\text{at}} = 75 \text{ N}$.
- (b) $r = 1,175 > 1$, ou seja, pode subir, sobre a escada, uma distância de até $D = 1,175 L = 4,7 \text{ m}$. Este resultado significa que o macaco pode subir até o topo da escada que ela não deslizará.
- (c) $\mu_e^{\text{mín}} = 0,341 \Rightarrow r = \frac{1}{2} \Rightarrow$ o macaco não pode se mexer, senão a escada escorrega.
- $\mu_e^{\text{máx}} = 0,481 \Rightarrow r = 1 \Rightarrow$ o macaco pode subir exatamente até o topo da escada, sem que ela escorregue.
56. (a) $T_1 = 80 \text{ N}$, $T_2 = 160 \text{ N}$ e o vetor força na articulação é $\vec{A} = 80\sqrt{3} \hat{i} = 138,6 \hat{i} \text{ (N)}$.
- (b) $\vec{F}_B = -\vec{A} = -80\sqrt{3} \hat{i} = -138,6 \hat{i} \text{ (N)}$.
57. (a) $N_1 = 4,5 \text{ N}$ e
- (b) $N_2 = 7,3 \text{ N}$.
- (c) $F_{\text{at}} = 3,6 \text{ N}$.
58. $R_x = 35 \text{ N}$ e $R_y = 45 \text{ N}$.
59. (a) $\vec{F}_1 > \frac{Mg\sqrt{2RH - H^2}}{R - H} \hat{i}$
- (b) $\vec{N} = \left[Mg - \frac{F_2\sqrt{2R - H}}{H} \right] \hat{j}$
- (c) $\vec{N}_H = -F_2 \hat{i}$
- (d) $\vec{N}_V = \frac{F_2\sqrt{2R - H}}{H} \hat{j}$
60. (a) $F = 501,2 \text{ N}$ e $F_{\text{at}} = 227,5 \text{ N}$.
- (b) $R = 507,3 \text{ N}$.

6.6 O oscilador harmônico

61. $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ onde $A = \frac{mv}{(m + M)\omega_0}$,
 $\omega_0 = \sqrt{k/(m + M)}$ e $\varphi = -\pi/2$.
62. (a) $F = 10\pi^2$ N; (b) $E = 0,75\pi^2$ J.
63. $x(t) = \frac{4}{\pi} \cos(\pi t - \pi/2)$;
 $v(t) = -4 \sin(\pi t - \pi/2)$;
 $a(t) = -4\pi \cos(\pi t - \pi/2)$.
64. (a) $x_{\text{máx}} = 1$ m e ocorre em $t = \pi/4$ s.
(b) $v(t) = 2 \cos(2t)$ e $v(t = 0) = 2$ m/s.
(c) $a(t) = -4 \sin(2t)$ e $a(t = 0) = 0$.
(d) A aceleração é máxima para $t = \frac{(2n + 1)\pi}{4}$ s,
onde $n = \text{inteiro}$, e seu valor em módulo é $a = 4$ m/s².
65. (a) $A = \frac{\sqrt{5}}{2\pi}$ m.
(b) $v_{\text{máx}} = 2\sqrt{5}$ m/s.
(c) $a_{\text{máx}} = 8\sqrt{5}\pi$ m/s².
66. (a) $T = 0,4\pi$ s.
(b) $v_{\text{máx}} = 0,25$ m/s.
(c) $a_{\text{máx}} = 1,25$ m/s².
(d) Em unidades no SI:
 - $x(t) = 0,05 \cos(5t)$;
 - $v(t) = -0,25 \sin(5t)$;
 - $a(t) = -1,25 \cos(5t)$.
- (e) $E = 62,5 \times 10^{-4}$ J.

67. $\theta(t) = 0,002 \sin(2t - 2)$.
68. (a) $I_O = mL^2 \left[1 + \frac{2r^2}{5L^2} \right]$.
- (b) Equação: $I_O \frac{d^2\theta}{dt^2} + mgL \sin \theta = 0$.
- (c) O período do pêndulo será: $T = T_0 (1 + 8 \times 10^{-3})$ s.
69. (a) $y_e = \frac{mg}{k} = \frac{1}{7}$ (m).
- (b) $\omega_0^2 = \frac{k}{m} = 70 \text{ s}^{-2} \rightarrow \omega_0 \approx 8,4 \text{ s}^{-1}$ e $A = y_e = \frac{1}{7}$ (m).
- (c) $y(t) = \frac{mg}{k} [1 + \cos(\omega_0 t)] = \frac{1}{7} [1 + \cos(\sqrt{70} t)]$ (m).
70. (a) $\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2L}}$ e $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{2L}{3g}}$.
- (b) $\omega = -\theta_0 \omega_0 = -\theta_0 \sqrt{\frac{3g}{2L}}$.
- (c) $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t) = \theta_0 \cos \left[\sqrt{\frac{3g}{2L}} t \right]$.
- (d) $\omega_0 = 10 \text{ rad/s}$; $T = \frac{\pi}{5} \text{ s}$; $\omega = 1 \text{ rad/s}$
e $\theta(t) = 0,1 \cos(10t)$.
71. $T = 2\pi \sqrt{\frac{3R}{2g}}$ e $L_{eq} = \frac{3}{2}R$.
72. (b) $\omega_0 = \sqrt{10} \text{ rad/s}$ e $A = 0,25\text{m}$;
- $x(t) = 0,25 \cos(\sqrt{10} t)$ (m)
 - $\dot{x}(t) = -0,25 \sqrt{10} \sin(\sqrt{10} t)$ (m/s)
 - $\ddot{x}(t) = -2,5 \cos(\sqrt{10} t)$ (m/s²)

$$(c) \mu_e^{\min} = 0,125;$$

$$(d) E_r = \frac{1}{32} \text{ J} \quad e \quad E_t = \frac{2}{32} \text{ J}.$$

73. (a) $\rho = 2,565 \text{ g/s}$

(b) $\frac{\Delta E}{E} = 9,75\%.$ (c) $t = 27 \text{ s}.$

74. $\rho = 1,4 \times 10^4 \text{ N} \cdot \text{s/m}.$

75. $\gamma = 0,0288 \text{ s}^{-1}.$

76. (a) $x(t) = x_0 e^{-t} \cos(10t).$

(b) $\frac{\Delta E}{E} = -0,72 \Rightarrow 72\%.$

77. (a) $\ddot{x} + 5\dot{x} + 400x = 5 \cos(20t)$

(b) $A = 0,05 \text{ m}$

(c) $t = \frac{(2n+1)\pi}{20} \text{ s}$

(d) $\ddot{x} + 5\dot{x} + 400x = 0$

(e) $\omega = 19,84 \text{ s}^{-1}$

78. (a) $\omega_R = 14,93 \text{ s}^{-1}$

(b) $A_R = 0,03 \text{ m}$ (c) $\varphi \approx 86,2^\circ$

79. A expressão que descreve a variação da energia total em

função do tempo é: $\frac{dE}{dt} = \dot{x} [m\ddot{x} + kx]$. Como

$$x(t) = A(\omega) \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{x}(t) = -\omega A(\omega) \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t),$$

substituindo estas equações na expressão de $\frac{dE}{dt}$, temos:

$$\frac{dE}{dt} = A^2 m \omega (\omega^2 - \omega_0^2) \sin[2(\omega t + \varphi)] \Rightarrow \overline{\frac{dE}{dt}} = 0.$$

80. (a) $\bar{P}(\omega) = \frac{\gamma F_0^2}{2m} \frac{\omega^2}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2]}$.
- (b) Na ressonância $\omega_R = \omega_0$ e $\bar{P}(\omega) = \frac{F_0^2}{2m\gamma}$

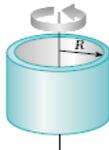
6.7 Fluidos

81. (a) $F_y = \rho g(H - y)Ldy$; (b) $F_{\text{total}} = \frac{L\rho g H^2}{2}$.
82. $\Delta y = 16,5 \text{ cm}$.
83. $h = \left[\frac{Mg}{A} - p_0 \right] \frac{1}{\rho_{\text{Hg}} g}$
84. (a) $p_1(z) = 1,0 \times 10^5 + 7,5 \times 10^3 z$ e
 $p_2(z) = 0,5 \times 10^5 + 1,0 \times 10^4 z$
- (b) A bóia fica uma parte na água e uma parte na gasolina;
- (c) 20% afundada na água e 80% imersa na gasolina.
85. $H = \frac{4}{\pi\rho D^2} \left[m - \frac{Md^2}{D^2 - d^2} \right]$
86. (a) $\rho_p = 3 \text{ g/cm}^3$;
- (b) $V_p = 2\ell$.
87. (a) 8,5 N;
- (b) 1,125 kg.

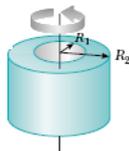
7 Tabela de momentos de inércia

Momentos de inércia de corpos homogêneos de várias formas

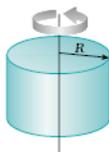
- a) Cilindro oco com paredes finas
 $I = MR^2$



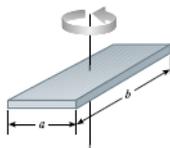
- b) Cilindro oco
 $I = \frac{M(R_1^2 + R_2^2)}{2}$



- c) Cilindro maciço
 $I = \frac{MR^2}{2}$



- d) Placa retangular
 $I = \frac{M(a^2 + b^2)}{12}$



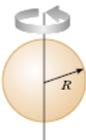
- e) Barra delgada
 $I = \frac{ML^2}{2}$



- f) Barra delgada
 $I = \frac{ML^2}{3}$



- g) Esfera maciça
 $I = \frac{2MR^2}{5}$



- h) Casca esférica
 $I = \frac{2MR^2}{3}$

