

PTC2892
Princípios da Formação e
Processamento de Imagens Médicas

FFT e filtros
Sérgio S Furuie

S. Furuie 19/8/2010 - 1

INTRODUÇÃO A FILTROS NO
DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

S. Furuie 19/8/2010 - 2

Intuição sobre decomposição e frequência

- ❑ Sinal de áudio
- ❑ Componentes
- ❑ Decomposição
 - ✓ Transformada de Fourier
 - ✓ Funções periódicas complexas
 - ✓ FFT 1D

S. Furuie 19/8/2010 - 3

Conteúdo em frequência

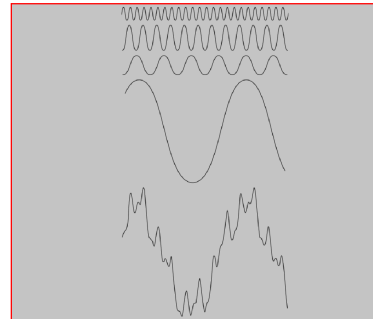


FIGURE 4.1 The function at the bottom is the sum of the four functions above it. Fourier's idea in 1807 that periodic functions could be represented as a weighted sum of sines and cosines was met with skepticism.

S. Furuie 19/8/2010 - 4

Domínio do tempo	Domínio da frequência
Contínuo, aperiódico $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(w) \cdot e^{-jw \cdot t} dw$ TF	Contínuo, aperiódico $X(w) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-jw \cdot t} dt$ TF
Contínuo, periódico(T) $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{j2\pi k t / T}$ SF	Discreto(2π/T), aperiódico $a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) \cdot e^{-j2\pi k t / T} dt$ SF
Discreto(nΔ), aperiódico $x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) \cdot e^{j\Omega n \Delta} d\Omega$ TFTD	Contínuo, periódico(2π/Δ) $X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-j\Omega n \Delta}$ TFTD
Discreto(nΔ), periódico(1) $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{j2\pi k n / N}$ SFTD	Discreto(2π/T), periódico(2π/Δ) $a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j2\pi k n / N}$ SFTD

InCor/EPUSP SF

32

S. Furuie 19/8/2010 - 5

Filtragem de Imagens no domínio da
frequência

- ❑ Conceito de frequência espacial e espectro em frequência
 - ✓ frequência espacial
 - ✓ Transformada de Fourier
 - ✓ FFT

Filtragem de Imagens

S. Furuie 19/8/2010 - 6

Frequência espacial

• É uma medida de periodicidade de um conjunto de dados bi-dimensional com respeito à medida de distância

Baixa Frequência Espacial

1 mm => 1 ciclo/mm

Alta Frequência Espacial

1 mm => 2 ciclos/mm

Filtragem de Imagens

S.Furule 19/8/2010 - 7

Transf. de Fourier, DFT,FFT

Contínuo

Direta:

$$F(u, v) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \cdot \exp(-j2\pi(ux + vy)) \cdot dx \cdot dy$$

Inversa:

$$f(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} F(u, v) \cdot \exp(j2\pi(ux + vy)) \cdot du \cdot dv$$

Discreto

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cdot \exp(-j2\pi(u \frac{x}{M} + v \frac{y}{N}))$$

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \cdot \exp(j2\pi(u \frac{x}{M} + v \frac{y}{N}))$$

S.Furule 19/8/2010 - 8

Transformadas de Fourier bi-dimensional contínua:

$$f(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$$

Direta: $F(u, v) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \cdot e^{-j2\pi(ux+vy)} \cdot dx dy$

Inversa: $f(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} F(u, v) \cdot e^{j2\pi(ux+vy)} \cdot du dv$

S.Furule 19/8/2010 - 9

Reverendo: filtro e convolução

- Filtragem é uma operação feita sobre um sinal ou imagem para obter um outro sinal ou imagem
- Filtro linear e invariante pode ser implementado por convolução
- Convolução pode ser executado rapidamente no domínio da frequência por FFT

Ruído salt pepper

Filtro Média, r=1

Filtro Mediana, r=1

S.Furule 19/8/2010 - 10

Convolução 2D

$$g(x, y) = \sum_{r=-a}^a \sum_{c=-b}^b w(r, c) \cdot f(x-r, y-c)$$

95	80	80	80
95	90	90	105
150	20	100	130
220	150	160	150

*

0	1	0
1	-4	1
0	1	0

=>

	-75		

S.Furule 19/8/2010 - 11

Formalizando convolução: 2D, contínuo

Definição para funções contínuas:

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y)$$

$$g(x, y) \triangleq \iint_{-\infty}^{\infty} f(x', y') \cdot h(x - x', y - y') \cdot dx' dy'$$

Pode-se provar facilmente que equivale a:

$$g(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} h(x', y') \cdot f(x - x', y - y') \cdot dx' dy'$$

e

$$G(u, v) = H(u, v) \cdot F(u, v)$$

Na qual G, H e F são as transformadas de Fourier 2D de g, h e f respectivamente

Como faríamos a convolução se h e f fossem 1000 x 1000 cada ?

S.Furule 19/8/2010 - 12

Provando ...

$$g(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} h(x', y') \cdot f(x - x', y - y') dx' dy'$$

e

$$G(u, v) = H(u, v) \cdot F(u, v)$$

Na qual G, H e F são as transformadas de Fourier 2D de g, h e respectivamente

S.Furule 19/8/2010 - 13

Transformadas de Fourier bi-dimensional discreta:

$$f(x, y), \quad x = 0 \dots M-1; \quad y = 0 \dots N-1 \Rightarrow f[M][N]$$

$$F(u, v), \quad u = 0 \dots M-1; \quad v = 0 \dots N-1 \Rightarrow F[M][N]$$

Direta:

$$F(u, v) = \frac{1}{M \cdot N} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(u \frac{x}{M} + v \frac{y}{N})}$$

$$u = 0, \dots, M-1; \quad v = 0, \dots, N-1$$

Inversa:

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(u \frac{x}{M} + v \frac{y}{N})}$$

$$x = 0, \dots, M-1; \quad y = 0, \dots, N-1$$

S.Furule 19/8/2010 - 14

Transformada de Fourier de imagem

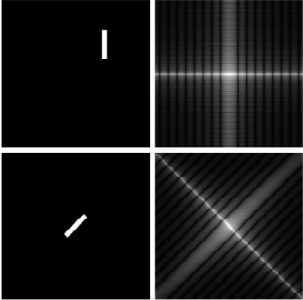
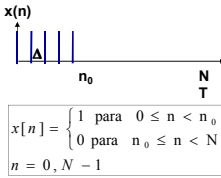


FIGURE 4.23
(a) The rectangle in Fig. 4.24(a) translated, and (b) the corresponding spectrum. (c) Rotated rectangle, and (d) the corresponding spectrum. The spectrum corresponding to the translated rectangle is identical to the spectrum corresponding to the original image in Fig. 4.24(a).

Note a periodicidade em cada direção

Ref.: Gonzalez, 2008 S.Furule 19/8/2010 - 15

Exemplos: TDF de pulso retangular



$$x[n] = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq n < n_0 \\ 0 & \text{para } n_0 \leq n < N \end{cases}$$

$$n = 0, N-1$$

$f_a = 1000 \text{ Hz} \Rightarrow \Delta = 1 \text{ ms}$
 $T = 512 \text{ ms} \Rightarrow N = 512$
 $N = \frac{f_a}{\delta} \Rightarrow \delta = 1.95 \text{ Hz}$
 $n_0 = 32$

S.Furule 19/8/2010 - 16

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N}$$

$$= \sum_{n=0}^{n_0-1} A e^{-j2\pi kn/N}$$

$$= A + A e^{-j2\pi k/N} + A e^{-j2\pi k \cdot 2/N} \dots A e^{-j2\pi k(n_0-1)/N}$$

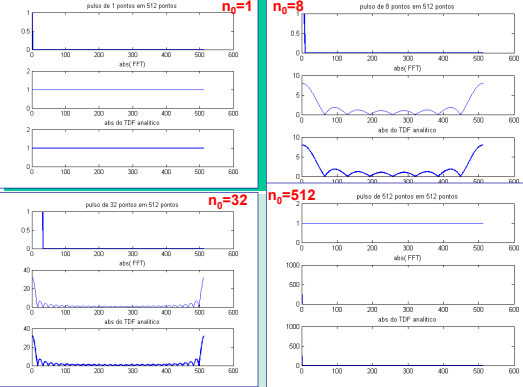
$$= A \frac{1 - e^{-j2\pi k n_0/N}}{1 - e^{-j2\pi k/N}}$$

$$= A \frac{e^{-j2\pi k n_0/N/2} (e^{j2\pi k n_0/N/2} - e^{-j2\pi k n_0/N/2})}{e^{-j2\pi k/N/2} (e^{j2\pi k/N/2} - e^{-j2\pi k/N/2})}$$

$$= A e^{-j2\pi k(n_0-1)/N/2} \frac{\text{sen}(2\pi k n_0/N/2)}{\text{sen}(2\pi k/N/2)}$$

$|X(k)| = A \frac{\text{sen}(2\pi k n_0/N/2)}{\text{sen}(2\pi k/N/2)}$
 $\text{fase}(X(k)) = -\pi k(n_0-1)/N$
 $\text{delay} = \text{fase} / (2\pi k/N) = -(n_0-1)/2$

Ilustração com Matlab => S.Furule 19/8/2010 - 17



S.Furule 19/8/2010 - 18

Exemplo de FFT no ImageJ

- FFT => parte real, parte imaginária, módulo, espectro
- ✓ Notação: circular
- ✓ Notação: centrada

S.Furue 19/8/2010 - 19

Como aplicar?

- Propriedade fundamental:
 - ✓ $G(u,v) = H(u,v) \cdot F(u,v)$

Filtragem de Imagens

S.Furue 19/8/2010 - 20

Filtros no domínio da frequência

- Filtro passa-baixa
 - ✓ Butterworth de ordem n

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{u^2 + v^2}{D_0^2} \right]^n}$$

D_0 : frequência de corte

FIGURE 4.44 (a) Perspective plot of a Butterworth lowpass-filter transfer function. (b) Filter displayed as an image. (c) Filter radial cross sections of orders 1 through 4.

Ref.: Gonzalez, 2008 S.Furue 19/8/2010 - 21

Exemplo de filtragem Butterworth, passa-baixa

FIGURE 4.41 (a) Test pattern of size 608 x 608 pixels and (b) its Fourier spectrum. The spectrum is double the image size due to padding; the original image is shown in half size so that it fits in the page. The superimposed circles have radii equal to 10, 20, 60, 100, and 400 with respect to the half-size spectrum image. These radii enclose 87.8, 93.1, 95.7, 97.8, and 99.2% of the padded image power, respectively.

FIGURE 4.45 (a) Original image. (b)-(f) Results of filtering using Butterworth filters of order 1, 2, 3, 4, and infinity, respectively, at the radii shown in Fig. 4.41. Compare with Fig. 4.41.

Ref.: Gonzalez, 2008 S.Furue 19/8/2010 - 22

Exemplo de filtragem (FFT) no ImageJ

Para filtrar f no domínio da frequência basta:

- 1) Realizar zero-padding se necessário
- 2) Obter $F(u,v) = \text{FFT}(f)$
- 3) Obter $H(u,v)$
- 4) $G = H \cdot F$
- 5) Obter a inversa de G
 $g(x,y) = \text{IFFT}(G)$

FFT/FD math (bridge256x256 e mask256x256)
 $g = f * h \Rightarrow$ mostrar G e g
 $f = g$ deconvolution h

Processo similar para filtros passa-alta, passa-banda, rejeita-banda, ...

Obs.: existe arquivo masks=> salvar 1 corte, escalar e salvar=> mask256x256

S.Furue 19/8/2010 - 23

Restauração no domínio da frequência: filtro de Wiener (MMS-Minimum Mean square error)

Filtro Inverso

$$G(u,v) = H(u,v) \cdot F(u,v) + N(u,v)$$

$$\hat{F}(u,v) = \left[\frac{H^*(u,v)}{|H(u,v)|^2 + S_N(u,v)} \right] G(u,v)$$

$S_N(u,v) = |N(u,v)|^2$ (espectro de potência do ruído)
 $S_f(u,v) = |F(u,v)|^2$ (estimado do f)

S.Furue 19/8/2010 - 24



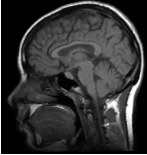
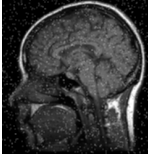
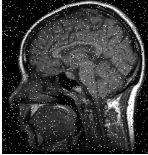
Síntese da aula

S.Furule 19/8/2010 - 25



Conceito: filtro, convolução e Fourier

- ❑ Filtragem é uma operação feita sobre um sinal ou imagem para obter um outro sinal ou imagem
- ❑ Filtro linear e invariante pode ser implementado por convolução
- ❑ Convolução pode ser executado rapidamente no domínio da frequência por FFT



Ruido salt pepper

Filtro Média, $r=1$

Filtro Mediana, $r=1$

S.Furule 19/8/2010 - 26



Lista de exercícios 3

- ❑ Entrega para próxima aula (P1)
- ❑ Devolutiva das listas 1 e 2

S.Furule 19/8/2010 - 27