

# Colisões Unidimensionais

## Colisões Elásticas

Considere duas partículas de massas  $m_1$  e  $m_2$ , com velocidades iniciais (antes da colisão)  $\vec{v}_{1i} = v_{1i} \hat{i}$  e  $\vec{v}_{2i} = v_{2i} \hat{i}$ , tal que  $v_{1i} > v_{2i}$  para que haja colisão. Sejam  $v_{1f}$  e  $v_{2f}$  as velocidades dessas partículas depois da colisão.



Como estamos assumindo **colisão elástica**, existe conservação do momento e da energia cinética do sistema. Então, devemos ter que:

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f, \quad \text{pois} \quad \vec{F}_{\text{res}}^{\text{ext}} \approx 0 \quad (1)$$

$$E_c^i = E_c^f \quad (2)$$

ou seja, o momento do sistema antes da colisão ( $\vec{P}_i$ ) deve ser sempre igual ao momento do sistema depois da colisão ( $\vec{P}_f$ ) e a energia cinética antes da colisão ( $E_c^i$ ) deve ser igual à energia cinética depois da colisão ( $E_c^f$ ), pelo fato da colisão ser um choque elástico. Das equações (1) e (2) temos:

$$p_{1i} + p_{2i} = p_{1f} + p_{2f} \quad (3)$$

$$\frac{p_{1i}^2}{2m_1} + \frac{p_{2i}^2}{2m_2} = \frac{p_{1f}^2}{2m_1} + \frac{p_{2f}^2}{2m_2} \quad (4)$$

Das equações (3) e (4) podemos escrever:

$$p_{2f} - p_{2i} = p_{1i} - p_{1f} \quad (5)$$

$$\frac{p_{2f}^2 - p_{2i}^2}{m_2} = \frac{p_{1i}^2 - p_{1f}^2}{m_1} \quad (6)$$

Definindo  $\lambda = \frac{m_2}{m_1}$ , podemos re-escrever a equação (6):

$$(p_{2f} - p_{2i})(p_{2f} + p_{2i}) = \lambda(p_{1i} - p_{1f})(p_{1i} + p_{1f}) \quad (7)$$

Dividindo a equação (7) pela equação (5) ficamos com:

$$p_{2f} + p_{2i} = \lambda(p_{1i} + p_{1f}) \quad (8)$$

Somando as equações (8) e (5) temos:

$$2p_{2f} = (\lambda + 1)p_{1i} + (\lambda - 1)p_{1f} \quad (9)$$

Da equação (5) temos que

$$p_{1f} = p_{1i} + p_{2i} - p_{2f} \quad (10)$$

Substituindo a expressão de  $p_{1f}$  (equação (10)) na expressão (9), encontramos a relação entre o momento final da partícula 2 e os momentos iniciais das duas partículas:

$$p_{2f} = \frac{2\lambda}{(1+\lambda)} p_{1i} - \frac{(1-\lambda)}{(1+\lambda)} p_{2i} \quad (11)$$

Substituindo este resultado na equação (5), encontramos a relação entre o momento final da partícula 1 e os momentos iniciais das duas partículas:

$$p_{1f} = \frac{(1-\lambda)}{(1+\lambda)} p_{1i} + \frac{2}{(1+\lambda)} p_{2i} \quad (12)$$

Destes resultados podemos verificar que a configuração final fica inteiramente determinada pela configuração inicial pelo fato de haver conservação tanto do momento linear como da energia cinética do sistema, independente da natureza das forças de interação (internas) entre as partículas.

Podemos, a partir das expressões (11) e (12), encontrar a relação entre as velocidades finais das partículas 1 e 2 em função de suas velocidades iniciais:

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{(m_1 + m_2)} v_{1i} - \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} v_{2i} \quad (13)$$

$$v_{1f} = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} v_{1i} + \frac{2m_2}{(m_1 + m_2)} v_{2i} \quad (14)$$

As expressões (13) e (14) mostram que no caso de uma colisão elástica entre duas partículas, suas velocidades relativas têm seu sentido invertido tal que

$$(v_{2f} - v_{1f}) = -(v_{2i} - v_{1i}) \quad (15)$$

A seguir, vamos analisar alguns casos particulares a partir dos resultados gerais obtidos anteriormente.

## Casos Particulares

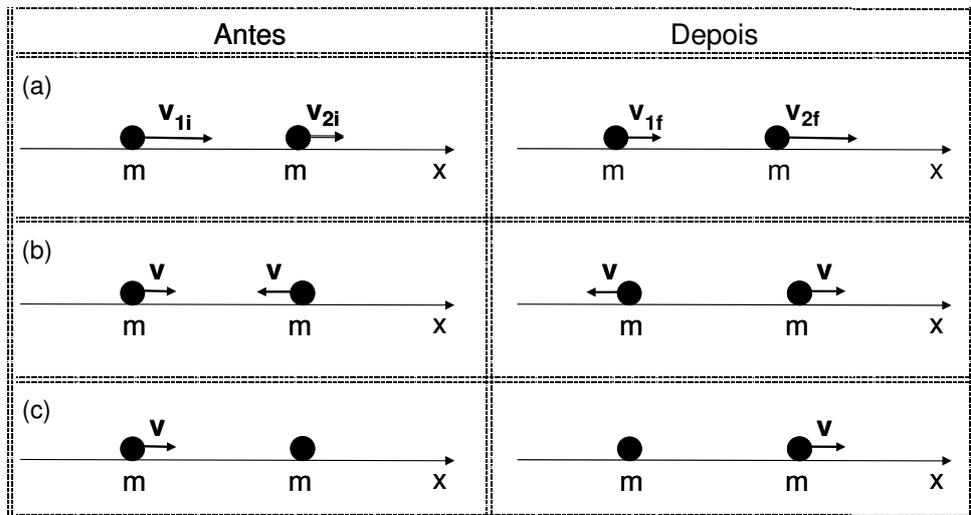
### 1. Partículas com massas iguais: $m_1 = m_2 = m \implies \lambda = 1$

Neste caso, as equações (11), (12), (13) e (14) ficam:

$$p_{2f} = p_{1i} \quad \text{e} \quad p_{1f} = p_{2i} \quad (16)$$

$$v_{2f} = v_{1i} \quad \text{e} \quad v_{1f} = v_{2i} \quad (17)$$

indicando que as partículas trocam entre si os momentos e as velocidades. Na próxima figura exemplificamos este caso, mostrando três diferentes situações:



- (a) partículas com velocidades iniciais não nulas, de módulos diferentes e mesmo sentido;
- (b) partículas com velocidades iniciais não nulas, de mesmo módulo e sentidos contrários;
- (c) uma partícula com velocidade inicial nula e a outra com velocidade inicial  $v$ .

### 2. Alvo em repouso: $p_{2i} = v_{2i} = 0$

A situação de alvo em repouso é bastante comum, significando que uma das partículas está inicialmente em repouso quando o processo de colisão ocorre. Analisaremos dois casos extremos designados por alvo pesado ( $m_1 \ll m_2$ ) e alvo leve ( $m_1 \gg m_2$ ).

- Alvo pesado:  $m_1 \ll m_2 \implies \lambda \gg 1$

Neste caso, as equações (11), (12), (13) e (14) ficam:

$$\boxed{p_{2f} \approx 2 p_{1i}} \quad \text{e} \quad \boxed{p_{1f} \approx -p_{1i}} \quad (18)$$

$$\boxed{v_{2f} \approx 2 \frac{m_1}{m_2} v_{1i} \approx 0} \quad \text{e} \quad \boxed{v_{1f} \approx -v_{1i}} \quad (19)$$

ou seja, quando uma partícula incidente muito leve colide com um alvo pesado em repouso, o momento linear transferido ao alvo é aproximadamente o dobro do momento da partícula incidente, que é praticamente refletida com velocidade de mesmo módulo e sentido contrário ao incidente, enquanto que o alvo sofre um recuo com velocidade muito pequena, a qual é tanto menor quanto menor a relação  $m_1/m_2$ . A variação do momento da partícula incidente é  $\Delta p_1 = -2 p_{1i}$ , ou seja, o momento transferido para o alvo, pela partícula incidente, é  $\Delta p_2 = 2 p_{1i}$ . Um exemplo deste caso é uma bola em queda livre na superfície da Terra.

- Alvo leve:  $\boxed{m_1 \gg m_2 \implies \lambda \approx 0}$

Neste caso, as equações (11), (12), (13) e (14) ficam:

$$\boxed{p_{2f} \approx 2 \frac{m_2}{m_1} p_{1i} \approx 0} \quad \text{e} \quad \boxed{p_{1f} \approx p_{1i}} \quad (20)$$

$$\boxed{v_{2f} \approx 2 v_{1i}} \quad \text{e} \quad \boxed{v_{1f} \approx v_{1i}} \quad (21)$$

ou seja, quando uma partícula incidente muito pesada colide com um alvo leve e em repouso, seu momento fica praticamente inalterado, assim como sua velocidade, como se ela *ignorasse* a presença do alvo. O momento linear transferido ao alvo é aproximadamente nulo e ele é lançado para a frente com aproximadamente o dobro da velocidade da partícula incidente. A variação dos momentos de ambas partículas é nula. Um exemplo deste caso é a bola de boliche colidindo com o pino.

Além da análise que efetuamos para os três casos limites, é interessante estudar como é o comportamento das velocidades finais das partículas,  $v_{1f}$  e  $v_{2f}$ , em função da razão de suas massas,  $\lambda$ . Para o caso de alvo em repouso temos que as equações (13) e (14), escritas em função de  $\lambda$ , ficam:

$$\boxed{v_{2f} = \frac{2}{(1 + \lambda)} v_{1i}} \quad (22)$$

$$\boxed{v_{1f} = \frac{(1 - \lambda)}{(1 + \lambda)} v_{1i}} \quad (23)$$

Uma análise destas equações mostra que para um valor fixo de  $v_{1i}$ , as velocidades finais das partículas são dependentes somente da relação entre suas massas ( $\lambda$ ), ou seja, teremos  $v_{1f}(\lambda)$  e  $v_{2f}(\lambda)$ , cuja amplitude depende de  $v_{1i}$ . Assumindo uma velocidade inicial  $v_{1i} = 1$  (m/s), as figuras 1 e 2 ilustram as funções  $v_{1f}(\lambda)$  e  $v_{2f}(\lambda)$  em função de  $\lambda$ , respectivamente, com  $\lambda$  variando no intervalo  $10^{-3} \leq \lambda \leq 10^3$ . O eixo x está em escala logarítmica para permitir a representação da vasta gama de valores de  $\lambda$ .

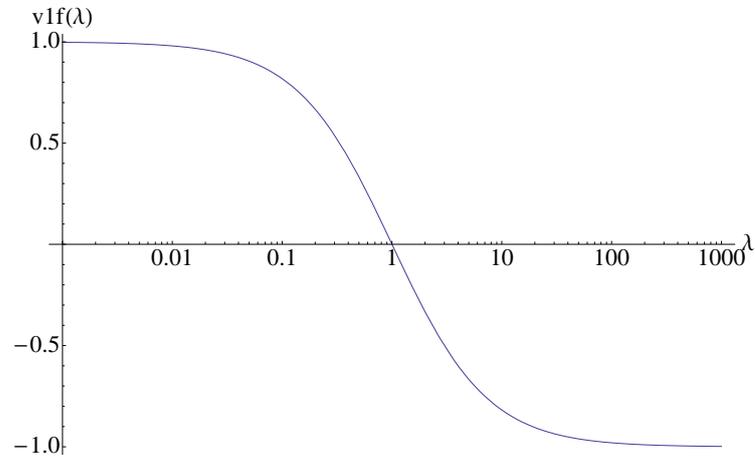


Figura 1: Velocidade final ( $v_{1f}$ ), após a colisão, da partícula incidente.

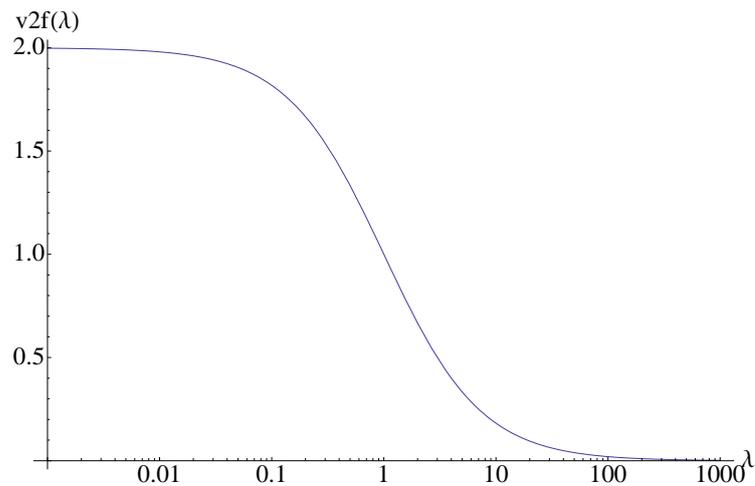


Figura 2: Velocidade final ( $v_{2f}$ ), após a colisão, da partícula alvo.

Os comportamentos nos limites estudados anteriormente podem ser observados nestas figuras:

A velocidade da partícula incidente  $v_{1f}$ , mostrada na figura 1, é praticamente igual a  $v_{1i}$ , variando muito pouco no limite  $\lambda \ll 1$  ( $m_1 \gg m_2$ ) e anulando-se para  $\lambda = 1$ . Para  $\lambda > 1$  há uma inversão de sinal e  $v_{1f}$  tende ao valor  $-v_{1i}$  para  $\lambda \gg 1$ .

A velocidade do alvo  $v_{2f}$ , mostrada na figura 2, apresenta um valor próximo de  $2v_{1i}$  quando  $\lambda \ll 1$ , diminuindo de valor com o aumento de  $\lambda$ , até se igualar a  $v_{1i}$  ( $v_{2f} = v_{1i} = 1$ ) para  $\lambda = 1$ . Em seguida, para  $\lambda \gg 1$ ,  $v_{2f}$  tende a zero.

OBS: Figuras 1 e 2 elaboradas e cedidas pelo estudante Gabriel Landi (IFUSP)

## Colisões Totalmente Inelásticas

Considere duas partículas de massas  $m_1$  e  $m_2$ , com velocidades iniciais (antes da colisão)  $\vec{v}_{1i} = v_{1i} \hat{i}$  e  $\vec{v}_{2i} = v_{2i} \hat{i}$ , tal que  $v_{1i} > v_{2i}$  para que haja colisão. No caso de uma colisão totalmente inelástica, a energia cinética relativa ao centro de massa (CM), depois da colisão, é nula. Desse modo, as velocidades das partículas do sistema, em relação ao CM, são nulas. Assim, as partículas passam a mover-se juntas, formando um único corpo de massa  $M = m_1 + m_2$ , com velocidade  $\vec{v}_f = \vec{v}_{CM}$ . Para este tipo de colisão não há conservação da energia cinética do sistema, só existindo conservação do momento linear:

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f, \quad \text{pois} \quad \vec{F}_{res}^{ext} \approx 0 \quad (24)$$

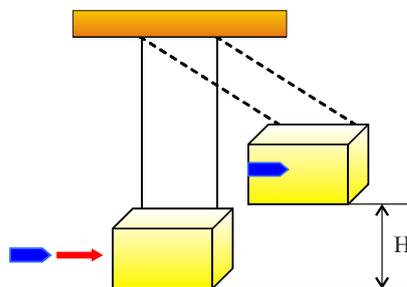
levando à:

$$m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i} = (m_1 + m_2) \vec{v}_f \quad (25)$$

Assim, só a conservação do momento é suficiente para descrever a configuração final em termos da configuração inicial:

$$\vec{v}_f = \frac{m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i}}{(m_1 + m_2)} = \vec{v}_{CM} \quad (26)$$

Um exemplo clássico deste tipo de colisão é o pêndulo balístico, que é um aparelho utilizado para medir a velocidade das balas de armas de fogo e consiste de um bloco de madeira de massa  $m_2$  suspenso por dois fios de forma que possa oscilar como um pêndulo. A bala, de massa  $m_1$ , com velocidade horizontal  $\vec{v}_{1i}$ , é disparada contra o bloco. Quando atinge o bloco, a bala aloja-se nele e juntos ( $m_2 + m_1$ ) sobem a uma altura de oscilação máxima  $H$ , que é medida.



Assim, a partir de  $H$ ,  $m_2$  e  $m_1$ , consegue-se obter a velocidade da bala  $v_{1i}$ . A colisão, totalmente inelástica, da bala com o bloco, dura um intervalo de tempo  $\Delta t$  tão curto que não dá tempo do bloco se elevar e, portanto, para descrever o movimento do sistema bala+bloco, este  $\Delta t$  pode ser desprezado e o movimento do CM pode ser tratado como unidimensional. Assim, utilizando a equação (25) e tomando  $\vec{v}_{2i} = 0$  temos que

$$\vec{v}_f = \vec{v}_{CM} = \frac{m_1 \vec{v}_{1i}}{(m_1 + m_2)} \quad e \quad (27)$$

$$v_f^2 = \frac{m_1^2 v_{1i}^2}{(m_1 + m_2)^2} \quad (28)$$

Com a expressão da velocidade do sistema bloco+bala, dada pela equação (28), podemos obter a expressão da energia cinética do sistema, depois da colisão:

$$\begin{aligned} E_c^f &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_f^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \left[ \frac{m_1^2 v_{1i}^2}{(m_1 + m_2)^2} \right] \\ &= \frac{m_1}{(m_1 + m_2)} \left[ \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 \right] = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)} E_c^i \end{aligned} \quad (29)$$

Esta energia cinética é responsável pelo movimento pendular do sistema bloco+bala e, quando o pêndulo atinge sua altura máxima, toda ela é transformada em energia potencial gravitacional. Desse modo devemos ter que:

$$E_c^f = U_g \implies \frac{m_1}{(m_1 + m_2)} \left[ \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 \right] = (m_1 + m_2) g H \quad (30)$$

O que leva à expressão para a velocidade da bala em função de  $H$ ,  $m_1$  e  $m_2$ :

$$\boxed{v_{1i} = \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} \sqrt{2gH}} \quad (31)$$

Podemos obter, ainda, a porcentagem da energia perdida durante a colisão  $E_p$ . Utilizando a equação (29) temos que:

$$E_p = \frac{E_c^i - E_c^f}{E_c^i} = \frac{m_2}{(m_1 + m_2)} \quad (32)$$

Por exemplo, se medidas mostram que a massa da bala é  $m_1 = 10$  g, que a massa do bloco de madeira é  $m_2 = 4$  kg e que a altura máxima atingida pelo pêndulo balístico é  $H = 5$  cm, então a velocidade da bala e a energia perdida na colisão são:

$$v_{1i} = \frac{4,010}{0,010} \sqrt{2 \times 9,8 \times 5 \times 10^{-2}} \approx 397 \text{ m/s} \quad e \quad E_p \approx 99,75\%. \quad (33)$$