# PRO 2271 ESTATÍSTICA I

## 3. Distribuições de Probabilidades



## Variáveis Aleatórias

Variáveis Aleatórias são valores numéricos que são atribuídos aos resultados de um experimento aleatório. São classificadas em **inteiras** e **contínuas**.

Exemplos:

- número de acidentes no trabalho em fevereiro (int.)
- qtd de passageiros transportados em uma viagem (int.)
- peso líquido em uma embalagem (cont.)
- nível de um reservatório (cont.)
- tempo de espera na fila (cont.) etc

## Distribuição de Probabilidades

Variáveis Inteiras ou Discretas

$$p(x) \qquad x = 0, 1, 2, \cdots$$

$$p(x) \geq 0 \qquad \sum p(x) = 1$$

Distribuição Acumulada:

$$F(a) = P(X \leq a) = \sum_{x \leq a} p(x)$$

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$



## Exemplo - Moeda

Lançamento de três moedas (n=3)

- X = quantidade de caras (x = 0, 1, 2 e 3)

$$S = \begin{bmatrix} KKK & KKC & KCC & CCC \\ & KCK & CKC & \\ & CKK & CCK & \end{bmatrix}$$

| x | p(x) | F(x) |
|---|---|---|
| 0 | 1/8 | 0,125 |
| 1 | 3/8 | 0,500 |
| 2 | 3/8 | 0,875 |
| 3 | 1/8 | 1,0 |
| | 1,0 | |

## Média e Variância (var. inteiras)

Expectativa ou Média: $\mu = E(X) = \sum_x x \cdot p(x)$

Variância: $\sigma^2 = V(X) = \sum_x (x-\mu)^2 \cdot p(x)$

ou $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

Desvio Padrão: $\sigma = DP(X) = \sqrt{V(X)}$



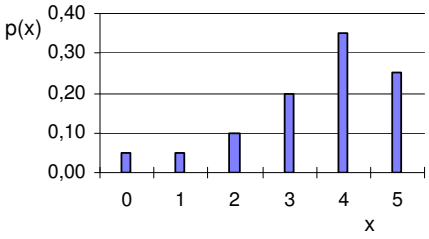
## Exemplo - Aluno

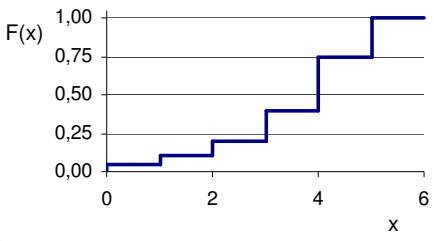
X = número de disciplinas por aluno

| x | p(x) | F(x) | x p(x) | $(x-\mu)^2$ p(x) |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,05 | 0,05 | 0,00 | 0,6125 |
| 1 | 0,05 | 0,10 | 0,05 | 0,3125 |
| 2 | 0,10 | 0,20 | 0,20 | 0,2250 |
| 3 | 0,20 | 0,40 | 0,60 | 0,0500 |
| 4 | 0,35 | 0,75 | 1,40 | 0,0875 |
| 5 | 0,25 | 1,0 | 1,25 | 0,5625 |
| | 1,0 | | 3,5 | 1,85 |

E(X) = 3,5 V(X) = 1,85 DP(X) = 1,36

## Exemplo (cont.)




p(x): distribuição de probabilidades

F(x): distribuição acumulada (descontínua)



## Média e Variância (cont.)

Definição: $E[H(X)] = \sum_x h(x) \cdot p(x)$

Propriedades:

$$E(aX + b) = a \cdot E(X) + b$$

$$V(aX + b) = a^2 \cdot V(X)$$

Variância: $V(X) = E[(X - \mu)^2] = \sum_x (x - \mu)^2 \cdot p(x)$

## Principais Distribuições de Probabilidade (var. inteiras)

**Uniforme**:
- probabilidades iguais (ex: dado)

**Hipergeométrica**:
- amostragem de população finita, sem reposição (ex: inspeção simples)

**Binomial**:
- amostragem de pop. infinita ou processo com prob. sucesso constante
- ex: quantidade de vitórias em 5 tentativas no jogo 7 ou 11

**Poisson**:
- quantidade de eventos (no tempo ou espaço)
- ex: gols em uma partida, focos de incêndio, chegada de clientes etc



## Distribuição Hipergeométrica

Aplicação: amostragem de população finita, sem reposição

Parâmetros:
- N = tamanho da população
- M = sucessos na população
- n = tamanho da amostra

Fórmulas:

$$p(x) = \frac{\binom{M}{x} \cdot \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$\mu = E(X) = n\frac{M}{N}$$

$$\sigma^2 = V(X) = n \cdot \frac{M}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right) \cdot \left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

## Exemplo – Cartas de Copas

Retirando-se aleatoriamente 5 cartas de um baralho, qual a probabilidade de sair exatamente duas cartas de copas?

– Parâmetros: N = 52, M = 13 e n = 5

$$p(2) = \frac{\binom{13}{2} \cdot \binom{39}{3}}{\binom{52}{5}} = \frac{78 \cdot 9139}{2.598.960} = 27{,}43\%$$

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$



## Exemplo (cont.)

$$p(x) = \frac{\binom{13}{x} \cdot \binom{39}{5-x}}{\binom{52}{5}}$$

| x | p(x) |
|---|---|
| 0 | 0,2215 |
| 1 | 0,4114 |
| 2 | 0,2743 |
| 3 | 0,0815 |
| 4 | 0,0107 |
| 5 | 0,0005 |
| | 1,0 |

$$E(X) = 5 \cdot \frac{13}{52} = 1{,}25$$

$$V(X) = 5 \cdot \frac{13}{52} \cdot \frac{39}{52} \cdot \frac{47}{51} = 0{,}864$$

$$\Rightarrow \quad DP(X) = \sqrt{0{,}864} = 0{,}93$$

Excel: Dist.HiperGeom()

## Distribuição Binomial

Aplicação:

- amostragem com reposição ou pop. infinita
- experimentos com probabilidade de sucesso constante

Parâmetros:

- n = qtd de experimentos independentes
- p = prob. de sucesso em cada experimento (cte)

Fórmulas:

$$p(x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}$$

$$\mu = E(X) = np$$

$$\sigma^2 = V(X) = np(1-p)$$



## Exemplo - Dado

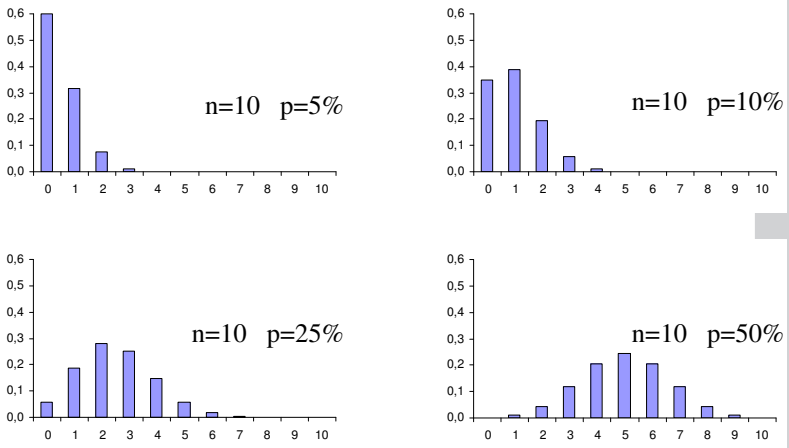
Determine a distribuição de probabilidades do número de resultados 6 em 5 lançamentos de um dado.

$$n = 5, \quad p = 1/6 \quad \Rightarrow \quad p(x) = \binom{5}{x} \cdot (0{,}1667)^x \cdot (0{,}8333)^{5-x}$$

| x | p(x) |
|---|---|
| 0 | 0,4019 |
| 1 | 0,4019 |
| 2 | 0,1608 |
| 3 | 0,0322 |
| 4 | 0,0032 |
| 5 | 0,0001 |

Excel:
DistrBinomial()

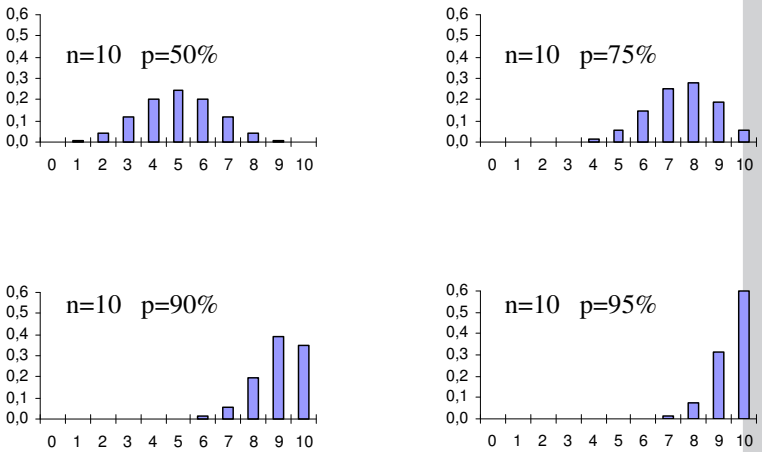
## Distribuição Binomial




15

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

## Distribuição Binomial (cont.)




16

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

## Distribuição Poisson

Aplicação: contagem de eventos (acidentes, chegadas etc)

Parâmetros:

- μ = número médio de eventos (μ >0)

Fórmula: $p(x) = \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$

$E(X) = \mu \qquad V(X) = \mu$

Média e Variância **iguais**

Verifica-se que: $e^{\alpha} = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\alpha^x}{x!}$



## Processo Poisson

Processo de Contagem de eventos ao longo do tempo (teoria de processos estocásticos).

Parâmetros:

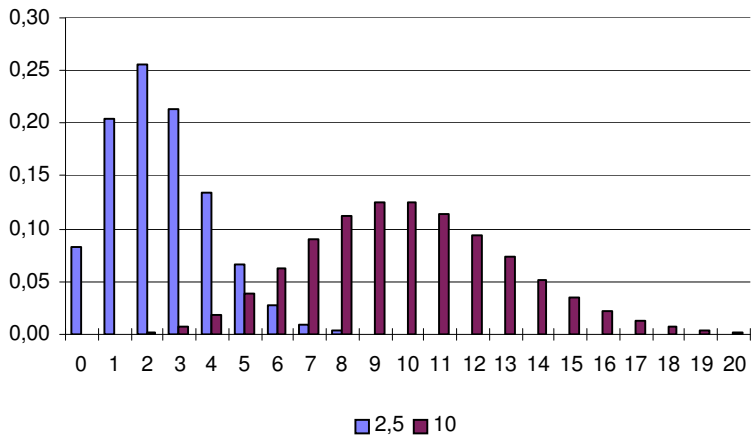
- λ = taxa de ocorrência dos eventos (λ >0)

Fórmula: $P_x(t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots \quad t > 0$

$\mu = E(X) = \lambda t$

$\sigma^2 = V(X) = \lambda t$

## Exemplos Poisson






## Distribuição Binomial Negativa

X = qtd de fracassos até obter "r" sucessos

$$p(x) = \binom{x+r-1}{r-1} \cdot p^r \cdot (1-p)^x \qquad x = 0,1,2,\ldots$$

$$E(X) = \frac{r(1-p)}{p} \qquad V(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

Caso Particular: **Distribuição Geométrica**, r = 1.

$$p(x) = p \cdot (1-p)^x \qquad x = 0,1,2,\ldots$$

EXERCÍCIOS

1) Em uma urna, encontram-se cinco bolas, três brancas e duas pretas. Considere-se que estas sejam retiradas sucessivamente, sem reposição, até sair a primeira bola preta. Pede-se: a) a distribuição de probabilidades da quantidade de bolas brancas; b) a distribuição acumulada da variável em questão; c) o valor esperado ("média") da quantidade de bolas brancas retiradas.

2) Um vendedor adquiri cinco unidades de um produto em lançamento. Cada unidade custa $6, será vendida aos clientes por $12 e, em caso de devolução ao fornecedor, o vendedor receberá $2 por unidade. Admitindo-se que a distribuição de probabilidades das vendas seja a abaixo apresentada, qual deve ser o lucro do vendedor ?

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| p(x) | 0,05 | 0,05 | 0,10 | 0,20 | 0,35 | 0,25 |

3) Calcule a expectativa e o desvio padrão da seguinte distribuição de probabilidades:

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| p(x) | 0,30 | 0,15 | 0,05 | 0,05 | 0,15 | 0,30 |

4) Uma turma é formada por 40 alunos, 24 homens e 16 mulheres. Retirando-se uma amostra aleatória de 5 alunos, qual a probabilidade de ocorrer exatamente duas alunas na amostra? Determine a distribuição de probabilidades, a média e o desvio padrão do número de alunas na amostra.

5) Uma empresa adquiriu quatro unidades de um sofisticado equipamento de análise. Suponha que o fornecedor ofereça garantia de 1 ano e que a probabilidade de falha de cada equipamento neste período seja de 5%. Então, qual a probabilidade de:
a) não ocorrer nenhuma quebra durante a garantia?
b) exatamente dois?
c) pelo menos um quebrar?
d) todos quebrarem?

6) (Cont.4) Resolva o exercício 4, considerando-se amostragem com reposição.

7) Sabe-se que 5% de um grande lote são peças desconformes. Uma amostra aleatória com dez peças será retirada do lote. Pede-se:
   a) qual a probabilidade de haver exatamente duas desconformes na amostra?
   b) no máximo uma?
   c) pelo menos uma?
   d) qual a expectativa e o desvio padrão da quantidade de desconformes na amostra?

8) No lançamento de dois dados, determine a distribuição de probabilidade do número de tentativas até que se obtenha soma de pontos 7 ou 11. Calcule a média e a variância.

9) Admitindo-se que a probabilidade de haver um ou mais erros em uma página seja de 0,5%, qual a probabilidade de que, em um relatório com 400 páginas, haja no máximo três páginas com erro ? Qual o número esperado de páginas com erro ?

10) Suponha que a quantidade de chamadas ao serviço de emergência tenha distribuição Poisson com taxa $\lambda$=2,5 chamadas/hora. Seja X a quantidade de chamadas em uma hora. Pede-se:
   a) qual a probabilidade de exatamente duas chamadas?
   b) no máximo cinco?
   c) pelo menos uma?
   d) qual a expectativa e o desvio padrão da quantidade de chamadas em uma hora?

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Determine a distribuição de probabilidades da soma dos pontos obtidos no lançamento de dois dados, a média e a variância. Idem para diferença dos pontos em cada dado.

2) Em um lava-rápido, há quinze carros nacionais e dez importados. Seis carros são escolhidos ao acaso. Pergunta-se:
a) qual a probabilidade de que sejam escolhidos exatamente três carros nacionais?
b) qual a probabilidade de que sejam escolhidos pelo menos três carros nacionais?
c) determine a distribuição de probabilidades do número de carros nacionais na amostra.

3) Na MEGA-SENA, cada apostador pode escolher de 6 a 15 dezenas entre 01 e 60. Determine a distribuição de probabilidades do número de acertos em uma aposta com exatamente 10 dezenas ? Idem, para apostas de 6 e 15.

4) Uma fábrica produz transistores em lotes de 50. Cinco transistores são retirados aleatoriamente de cada lote e testados; o lote é aceito se não houver nenhum transistor defeituoso na amostra. Suponha que um lote tenha exatamente dois transistores defeituosos dentre os cinqüenta; qual a probabilidade de que este lote seja rejeitado na inspeção ? Idem, para um lote com seis defeituosos.

5) (Cont.4) Resolva o exercício anterior, considerando amostragem com reposição.

6) Determine a distribuição de probabilidades da quantidade de caras em 10 lançamentos sucessivos de uma moeda. Calcule a média e o desvio padrão da variável aleatória.

7) O fabricante de um componente afirma que no máximo 1% das unidades vendidas apresenta algum tipo de defeito. Para verificar esta afirmação, um cliente pretende adquirir e inspecionar uma amostra aleatória com 50 unidades. Se três ou mais itens da amostra apresentarem defeitos, o fornecedor não será homologado pelo cliente. Pede-se: a) qual a probabilidade de rejeição do fornecedor, se a fração desconforme real for igual a 1% ?
b) quais a probabilidades de aceitação para p=5% ? E para p=10%?

8) Um esportista converte 60% dos arremessos livres de meia distância na quadra de basquete. Suponha que ele decida fazer arremessos até obter três sucessos. Pede-se:
a) qual a probabilidade de que consiga já nas três primeiras tentativas?
b) qual a probabilidade de conseguir em no máximo cinco tentativas?
c) qual a probabilidade de não conseguir em dez tentativas?

9) Suponha que a chegada de aviões em um aeroporto possa ser representada por um processo de Poisson com taxa λ = 4 aviões / hora. Pergunta-se:
a) Qual a probabilidade de que cheguem exatamente 3 aviões no período de uma hora? Pelo menos 3 ? No máximo 6 ?
b) Qual a média e o desvio padrão do número de chegadas em 90 min ?
c) Qual a probabilidade de que pelo menos 8 aviões pousem em 2½ h ?

10) Compare os resultados exato e aproximado pela Poisson da probabilidade de no máximo três sucessos de uma distribuição binomial nos seguintes casos: a) n=10 e p=20%; b) n=100 e p=2%.

11) Cada cliente que entra em uma concessionária de automóveis, compra um único veículo, com probabilidade "p" ou não compra veículo algum. Suponha que o número de clientes que entram na concessionária diariamente tenha distribuição Poisson com média λ.
Pede-se:
a) qual a probabilidade de que não seja vendido nenhum automóvel em certo dia?
b) demonstre que a distribuição do número de carros vendidos segue uma distribuição Poisson com taxa "λp".

12) Explique as diferenças entre as distribuições hipergeométrica, binomial e Poisson?