



PRO2271 ESTATÍSTICA I

4. Distribuições Contínuas

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção



Variáveis Aleatórias Contínuas

Variáveis Aleatórias são valores numéricos que representam os resultados de um experimento aleatório. São classificadas em inteiras e contínuas.

As variáveis aleatórias contínuas, ao contrário das variáveis inteiras, assumem valores em um intervalo contínuo de números reais.

Exemplos:

- peso líquido em uma embalagem,
- nível de um reservatório,
- tempo de espera na fila,
- consumo de um motor etc

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

2



Distribuições Contínuas



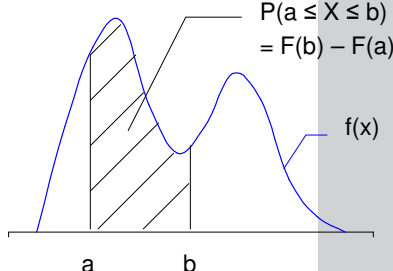
Densidade de Probabilidade – $f(x)$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

$$f(x) \geq 0 \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

Distribuição Acumulada – $F(x)$

$$F(a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx$$

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

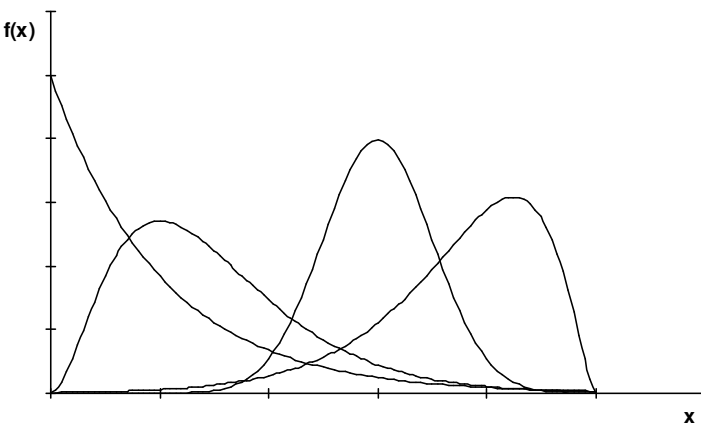
Departamento de Engenharia de Produção

3



Exemplos de Distribuições Contínuas





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Departamento de Engenharia de Produção

4



Média e Variância (var. contínuas)



Expectativa ou Média: $\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$

Variância: $\sigma^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$

ou $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

Desvio Padrão: $\sigma = DP(X) = \sqrt{V(X)}$

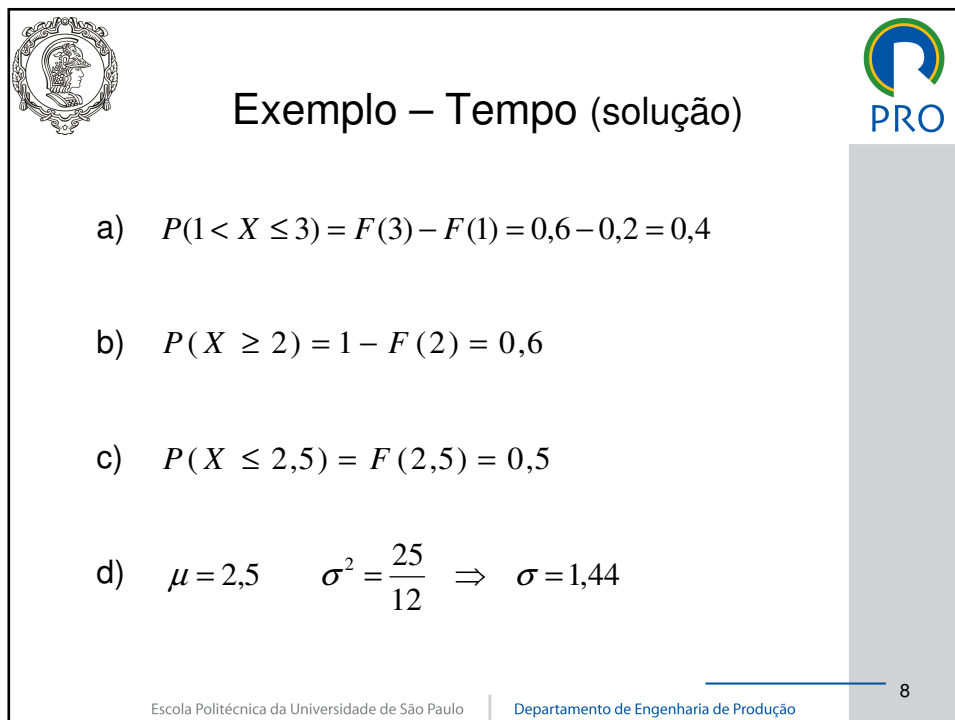
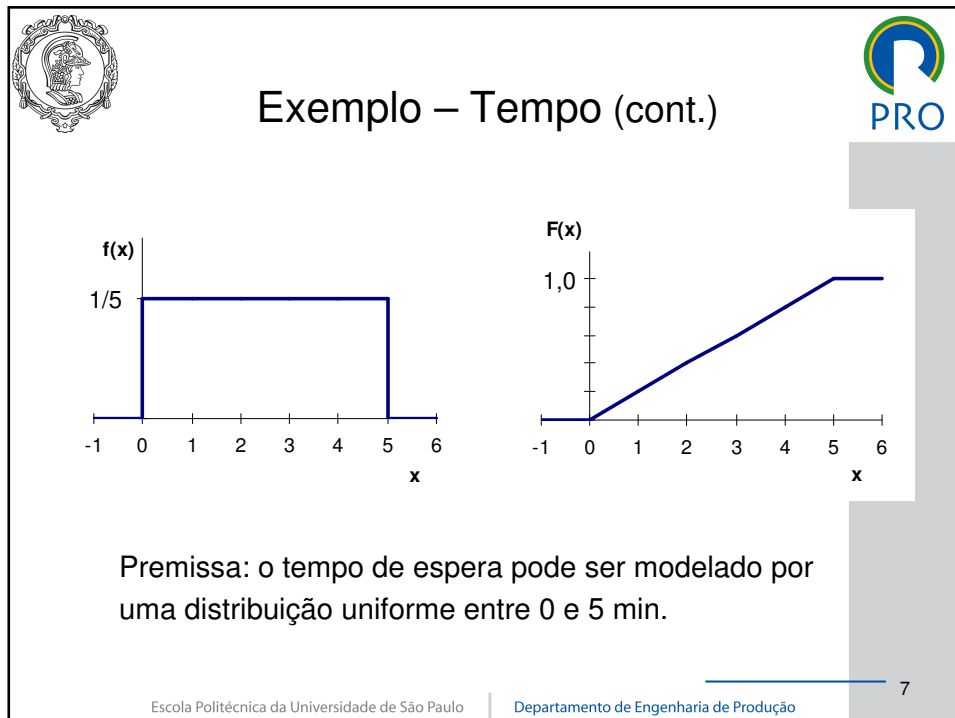


Exemplo – Tempo de Espera



Considere a seguinte situação: um passageiro chega na plataforma para embarque em um trem que passa regularmente a cada cinco minutos. Pergunta-se:

- a) qual a probabilidade de esperar de um a três minutos?
- b) qual a probabilidade de esperar no mínimo um minuto?
- c) qual a probabilidade de esperar menos que a média?
- d) calcule a média e o desvio padrão do tempo de espera.





Principais Distribuições Contínuas



Uniforme:

- densidade de probabilidade constante
- ex: tempo de espera pelo trem

Exponencial:

- aplicações em confiabilidade e teoria das filas
- ex: tempo de falha ou reparo, tempo de atendimento etc

Normal:

- distribuição simétrica em forma de sino
- ex: volume, peso, altura, tempo etc

Outras distribuições: **Gama, Beta, LogNormal, Weibull** etc...

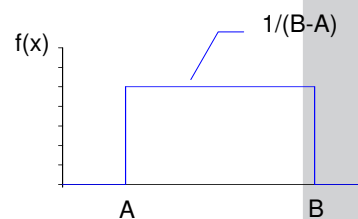


Distribuição Uniforme



Densidade de Probabilidade – $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{B-A} & \text{se } A \leq x \leq B \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$



Distribuição Acumulada – $F(x)$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq A \\ \frac{x-A}{B-A} & \text{se } A \leq x \leq B \\ 1 & \text{se } x \geq B \end{cases}$$

Média e Variância:

$$E(X) = \frac{A+B}{2}$$

$$V(X) = \frac{(B-A)^2}{12}$$



Distribuição Exponencial



Densidade de Probabilidade ($\lambda > 0$)

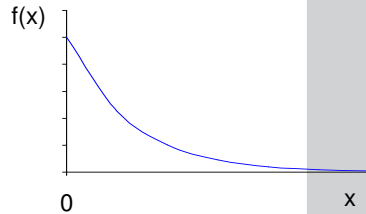
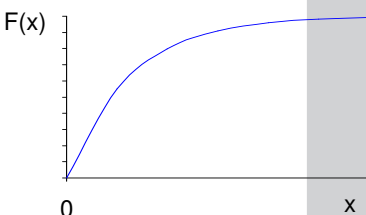
$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad x \geq 0$$

Distribuição Acumulada:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad x \geq 0$$

Média e Variância:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia de Produção



Exemplo - Fila



Suponha que o tempo entre chegadas de clientes em um posto de serviço seja uma v.a. exponencial com média de 5 min e que, em dado instante, o posto esteja vazio. Pede-se:

- qual a probabilidade de não chegar ninguém nos próximos 3 min?
- qual a probabilidade de chegar pelo menos um cliente nos próximos 10 min?
- qual a probabilidade de demorar mais de 5 min até a chegada do próximo cliente?
- calcule a média e o desvio padrão do tempo de espera até a próxima chegada.

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia de Produção



Exemplo – Fila (solução)



$$\lambda = 1/5 \quad F(x) = 1 - e^{-x/5} \quad (x \text{ em minutos})$$

- a) $P(X > 3) = 1 - F(3) = 0,549$
- b) $P(X \leq 10) = F(10) = 0,865$
- c) $P(X > 5) = 1 - F(5) = 0,368 \quad (\text{média})$
- d) $\sigma = \mu = 1/\lambda = 5 \text{ min}$

Estes resultados independem do tempo transcorrido desde a última chegada!



Distribuição Normal



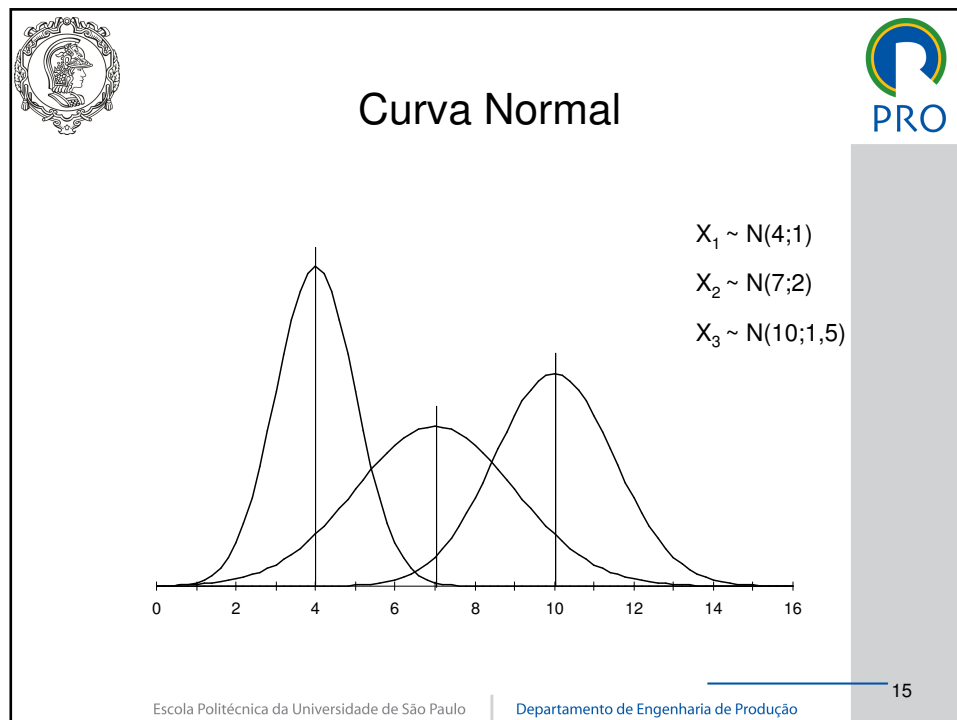
Distribuição de probabilidades mais utilizada na Estatística, tanto para descrever variáveis aleatórias quanto distribuições amostrais.

$$\text{Parâmetros: } \mu = E(X) \quad \sigma = DP(X) \quad X \sim N(\mu, \sigma)$$

Densidade de probabilidade (forma da distribuição):

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Distribuição acumulada: não há expressão analítica



Distribuição Normal Padrão

Normal Padrão: média zero e desvio-padrão unitário

$Z \sim N(0;1)$

Função densidade de probabilidade:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

Distribuição acumulada: $\Phi(a) = P(Z \leq a)$

Tabela da distribuição normal padrão acumulada

Excel: DIST.NORMP()

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

16

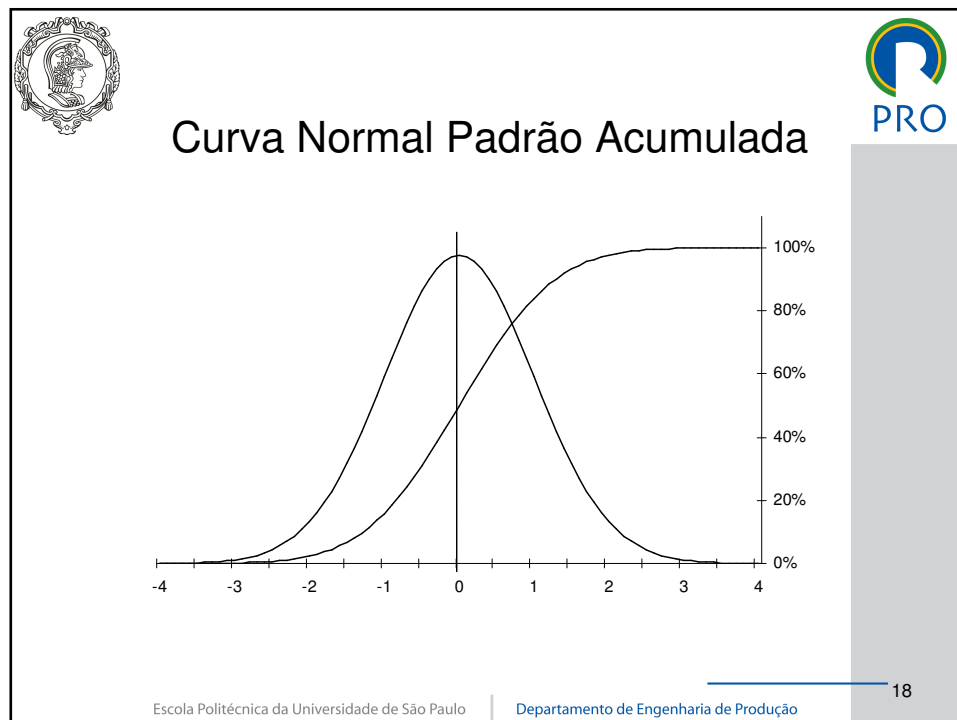
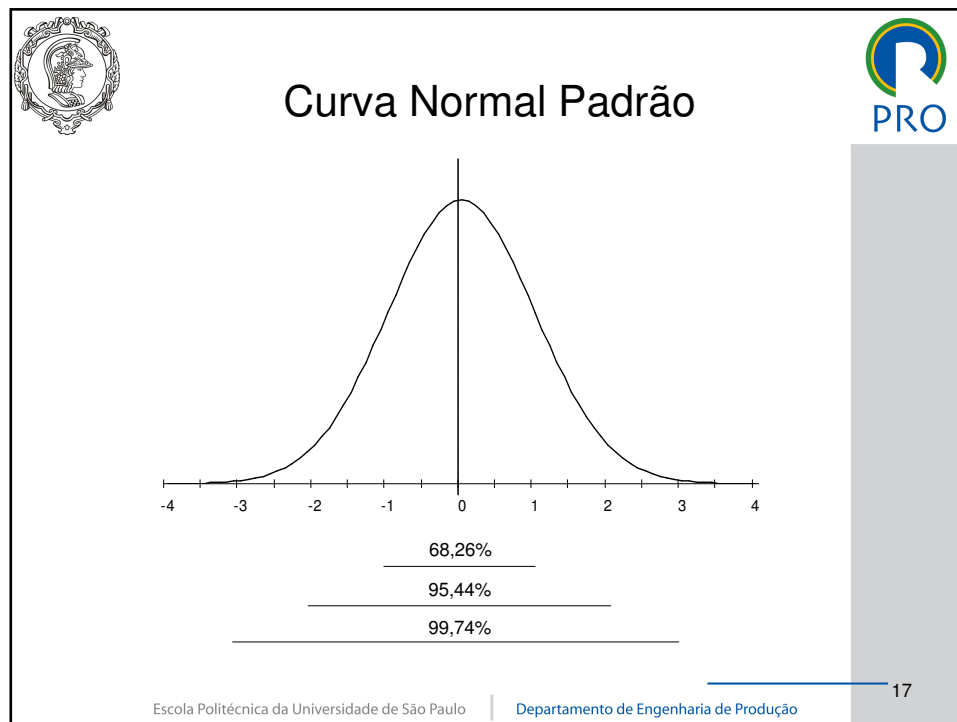




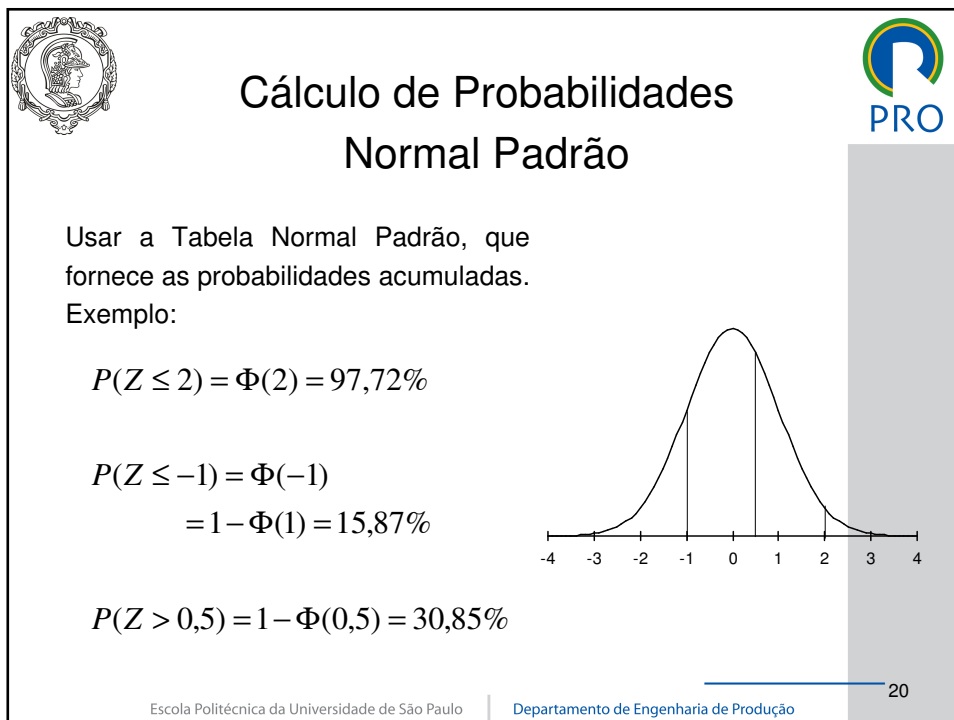
Tabela Normal Padrão

Distribuição acumulada: $\Phi(a)=P(Z \leq a)$



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia de Produção
19



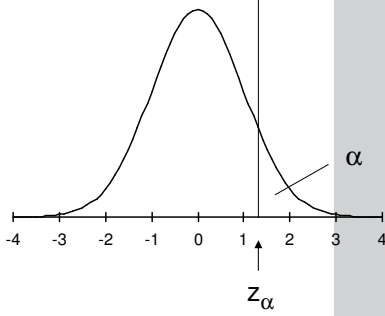


Percentil - Normal Padrão



Função inversa:

α	z_α
10%	1,28
5,0%	1,64
2,5%	1,96
1,0%	2,33
0,5%	2,58
0,1%	3,08



Excel: DIST.NORMP() e INV.NORMP()

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Departamento de Engenharia de Produção

21



Cálculo de Probabilidades - Normal



Se X é uma v.a. normal com média μ e desvio padrão σ , isto é, $X \sim N(\mu, \sigma)$, então:

$$F(a) = P(X \leq a) = P\left(Z \leq \frac{a - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$$

Excel: DIST.NORM() e INV.NORM()

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Departamento de Engenharia de Produção

22



Exemplo



Seja $X \sim N(10;1,5)$. Pede-se: a) $P(X \leq 12)$; b) $P(9 \leq X \leq 13)$.

$$P(X \leq 12) = F(12) = \Phi\left(\frac{12-10}{1,5}\right) = \Phi(1,33) = 90,82\%$$

$$P(9 \leq X \leq 13) = F(13) - F(9) = 72,58\%$$

$$F(13) = \Phi(2) = 97,72\%$$

$$F(9) = \Phi(-0,67) = 1 - \Phi(0,67) = 25,14\%$$



Propriedades da Expectativa e Variância



Seja: $Y = a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n$

Expectativa: $\mu_Y = a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + \dots + a_n\mu_n$

Variância: se $X_1, X_2, \dots, X_n$ forem v.a.i., então

$$\sigma_Y^2 = a_1^2 \cdot \sigma_1^2 + a_2^2 \cdot \sigma_2^2 + \dots + a_n^2 \cdot \sigma_n^2$$



Propriedades da Expectativa e Variância (cont.)



Exemplos:

$$Y = X_1 + 3X_2 \Rightarrow \begin{aligned} \mu_Y &= \mu_1 + 3\mu_2 \\ \sigma_Y^2 &= \sigma_1^2 + 9\sigma_2^2 \end{aligned}$$
$$W = X_1 - X_2 \Rightarrow \begin{aligned} \mu_W &= \mu_1 - \mu_2 \\ \sigma_W^2 &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \end{aligned}$$

Premissa: as variáveis X_1 e X_2 são v.a.i.

25

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção



Combinações Lineares



Sejam $X_1, X_2, \dots, X_n$ v.a.i. com distribuição normal.

Então, qualquer combinação linear

$$Y = a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n$$

também terá distribuição normal.

26

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção



Propriedades da Normal – Soma



A Soma dos valores de uma **amostra aleatória** normal

$$T = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

também apresentará distribuição normal com média e variância dadas por:

$$\mu_T = n \cdot \mu \quad \sigma_T^2 = n \cdot \sigma^2$$

ou seja: $T \sim N(n \cdot \mu; \sqrt{n} \cdot \sigma)$



Exemplo



Suponha que o tempo de atendimento de cada cliente seja uma v.a. normal, com média 10 min e desvio-padrão 2 min. Qual a probabilidade do tempo total de atendimento de 5 clientes superar 1 h ?

$$n = 5 \quad X \sim N(10; 2)$$

$$T \sim N(50; \sqrt{5} \cdot 2)$$

$$P(T > 60) = 1 - \Phi\left(\frac{60 - 50}{\sqrt{5} \cdot 2}\right) = 1 - \Phi(2,24) = 1,25\%$$



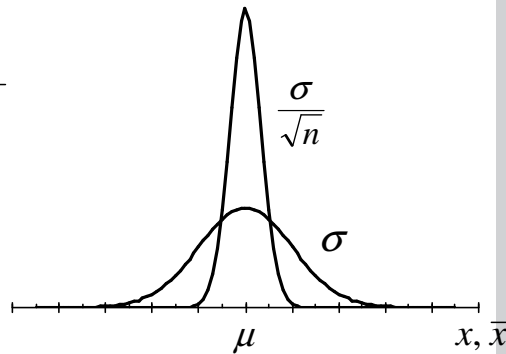
Propriedades da Normal – Média



Média de amostra aleatória normal:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_1 + \dots + X_n}{n}$$

$$\bar{X} \sim N\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Departamento de Engenharia de Produção

29



Exemplo



Suponha que o tempo de atendimento de cada cliente seja uma v.a. normal, com média 10 min e desvio-padrão 2 min. Qual a probabilidade do tempo médio de atendimento de 5 clientes superar 12 min ?

$$n = 5 \quad X \sim N(10; 2)$$

$$\bar{X} \sim N(10; 2/\sqrt{5})$$

$$P(\bar{X} > 12) = 1 - \Phi\left(\frac{12-10}{2/\sqrt{5}}\right) = 1 - \Phi(2,24) = 1,25\%$$

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Departamento de Engenharia de Produção

30



Teorema Central do Limite



A MÉDIA DE UMA AMOSTRA ALEATÓRIA, COM n SUFICIENTEMENTE GRANDE, TERÁ DISTRIBUIÇÃO NORMAL, QUALQUER QUE SEJA A DISTRIBUIÇÃO DA VARIÁVEL EM QUESTÃO.

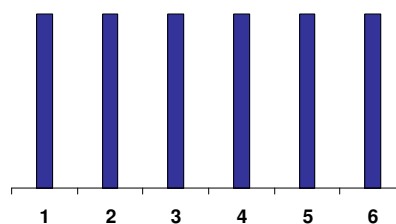
Este teorema justifica o uso da distribuição normal como aproximação para diferentes distribuições de probabilidades, tanto contínuas quanto inteiras.



Exemplo - TCL

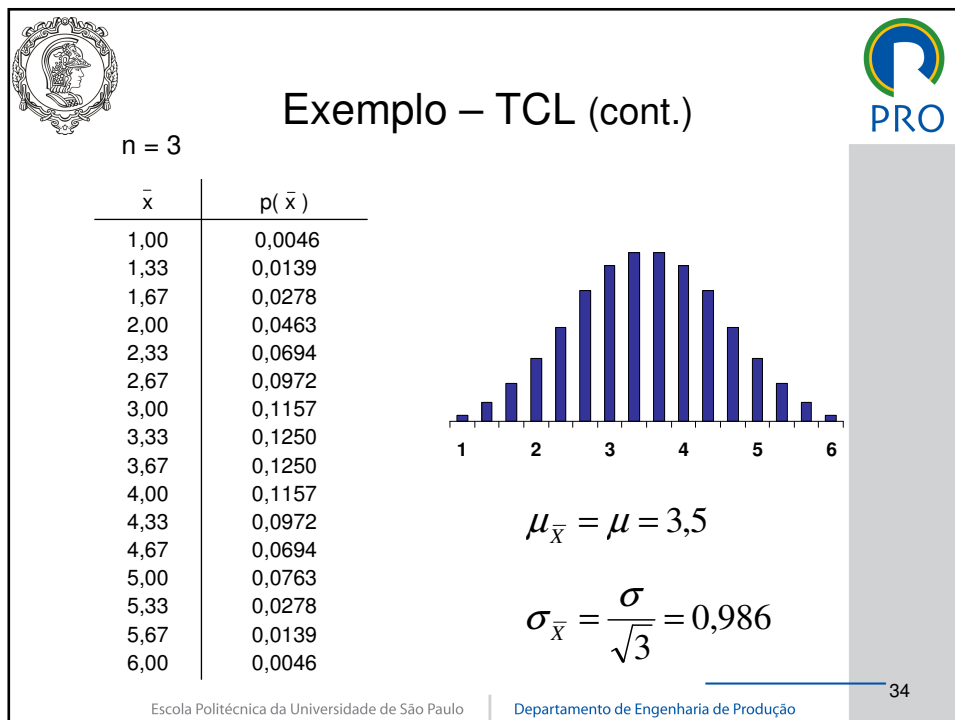
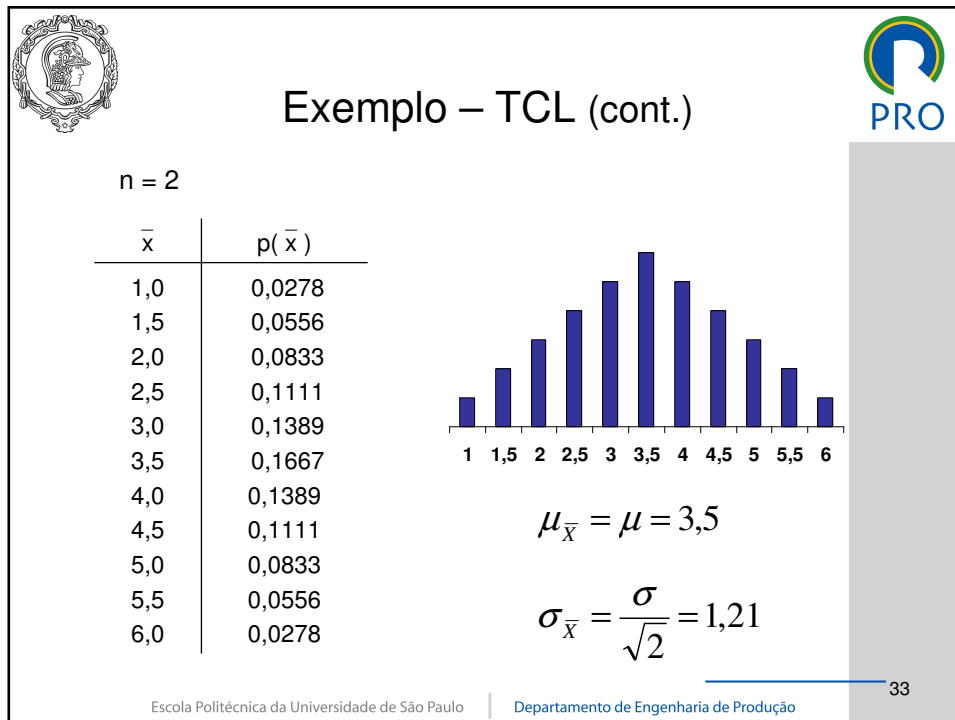


x	p(x)
1	0,1667
2	0,1667
3	0,1667
4	0,1667
5	0,1667
6	0,1667



$$\mu = \sum_x x \cdot p(x) = 3,5$$

$$\sigma^2 = \sum_x (x - 3,5)^2 \cdot p(x) = 2,9167 \quad \sigma = 1,71$$





Aplicação: Especificação Estatística

Freqüentemente, especifica-se o valor de uma variável contínua, característica de um processo, por um intervalo em torno da média da especificação, isto é:

$$\mu_{espec} \pm e_{espec}$$

Pergunta-se, qual deveria ser a média e o desvio padrão do processo para atender bem a especificação do cliente?



Especificação Estatística (cont.)

A resposta da pergunta anterior depende do nível de conformidade que se deseja alcançar. Para um nível de atendimento α , deve-se ter:

$$\mu = \mu_{espec} \quad \sigma = \frac{e_{espec}}{z_{\alpha/2}}$$

Por exemplo:

α	1%	0,5%	0,27%	0,1%	63,4 ppm	2 ppb
$z_{\alpha/2}$	2,58	2,81	3	3,29	4	6

EXERCÍCIOS

- 1) Seja X uma v.a. com a seguinte distribuição de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} cx(x-1) & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Determine : a) c ; b) $F(x)$; c) $P(0,5 \leq X \leq 0,8)$; d) a mediana; e) $E(X)$; f) $DP(X)$.

- 2) Suponha que o tempo de reparo de um equipamento, em minutos, tenha distribuição exponencial com média igual a 20 min. Qual a probabilidade de que um reparo não ultrapasse 10 min? Qual a probabilidade do tempo ser maior que 20, 40, 60 e 90 min? Calcule a média, a mediana e o desvio padrão da distribuição? Dado que o tempo de reparo já é maior que 40, qual a probabilidade de ultrapassar 60 min?

- 3) Seja Z uma variável aleatória normal padrão. Calcule :

- | | |
|---------------------------------|--------------------------------|
| a) $P(Z \leq 1,33) =$ | b) $P(Z \leq 0) =$ |
| c) $P(Z \geq 2,0) =$ | d) $P(Z \leq -1,0) =$ |
| e) $P(-1,0 \leq Z \leq 1,33) =$ | f) $P(-1,0 \leq Z \leq 1,0) =$ |
| g) $P(-2,0 \leq Z \leq 2,0) =$ | h) $P(-3,0 \leq Z \leq 3,0) =$ |

- 4) Considere-se uma variável aleatória normal padrão. Determine:

- | | | |
|------------------------|------------------------|------------------------|
| a) $\Phi^{-1}(0,99) =$ | b) $\Phi^{-1}(0,95) =$ | c) $\Phi^{-1}(0,90) =$ |
| d) $\Phi^{-1}(0,75) =$ | e) $\Phi^{-1}(0,50) =$ | f) $\Phi^{-1}(0,25) =$ |
| g) $\Phi^{-1}(0,10) =$ | h) $\Phi^{-1}(0,05) =$ | i) $\Phi^{-1}(0,01) =$ |

- 5) Suponha que a demanda semanal de um produto tenha distribuição normal com média 300 e desvio padrão 15. Qual a probabilidade de que, em uma semana qualquer, a demanda esteja entre 285 e 320 unidades? Qual a probabilidade de que exceda 330 unidades? Qual a probabilidade de que fique abaixo de 250 unidades? Qual a demanda máxima com 99% de probabilidade?

- 6) Sabe-se que o diâmetro de um eixo tem distribuição normal com média 50,0 mm e desvio padrão 0,4 mm. Pede-se:
- a porcentagem de peças com diâmetro fora da especificação $50,0 \pm 0,5$;
 - qual deveria ser o desvio padrão para que a fração desconforme não ultrapasse 1%?
 - nas condições do item (b), determine a distribuição de probabilidades do número de peças com diâmetro fora da especificação em uma amostra aleatória com 20 peças.

- 7) As estimativas de faturamento de duas unidades de negócios de um grupo são de \$ 4,0 bi na unidade I e de \$ 3,2 bi, na unidade II, para o próximo exercício fiscal. Considerando-se um erro de previsão de \$ 400 mi e \$ 300 mi, respectivamente, qual a probabilidade de que o faturamento global venha superar a meta de \$ 7,5 bi ? Qual a probabilidade de que o faturamento da unidade II seja maior que o da unidade I ?
- 8) Suponha que os pesos de malas despachadas por passageiros no embarque aéreo tenham distribuição normal com média 30 kg e desvio padrão 5 kg. Pede-se:
- a) qual a probabilidade de uma mala escolhida aleatoriamente pesar mais de 35 kg?
 - b) qual a probabilidade de quatro malas pesarem mais de 140 kg?
 - c) qual a probabilidade do peso médio de quatro malas ultrapassar 35 kg?
- 9) Estima-se que vinte e cinco por cento dos postos de abastecimento de uma grande cidade apresentam vazamento nos tanques subterrâneos para armazenagem de combustíveis. Calcule a probabilidade que, em uma amostra de cem postos, encontre-se no máximo vinte estabelecimentos com problemas de vazamento.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

- 1) Uma variável aleatória contínua tem a seguinte distribuição de probabilidades :

$$f(x) = \begin{cases} 2x/3 & 0 \leq x \leq 1 \\ (3-x)/3 & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Determine : a) $F(x)$; b) $P(1/2 \leq X \leq 2)$; c) $E(X)$; d) $DP(X)$.

- 2) Seja X uma v.a. com função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} ce^{-2(x-1)} & x \geq 1 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

Determine : a) c ; b) $F(x)$; c) $P(X \geq 2)$; d) $E(X)$; e) $DP(X)$.

- 3) A vida útil de pneus de uma certa marca tem distribuição normal com média 40.000 Km e desvio padrão 4000 Km. Qual a probabilidade de um pneu qualquer durar pelo menos 45.000 Km? Qual a probabilidade de que tenha vida útil de, no mínimo, 36.000 Km? Qual a probabilidade de durar entre 35.000 e 45.000 Km? Qual a probabilidade de que, entre quatro pneus, todos durem pelo menos 40.000 Km? Idem para 36.000 Km.
- 4) O diâmetro externo de um eixo está especificado em 10,0 polegadas. Se o diâmetro estiver fora da especificação por mais de 0,2, o preço unitário pago será reduzido de \$ 1,0. As peças com diferença superior a 0,25" serão refugadas. Determine a expectativa da receita unitária, considerando-se um preço unitário de \$ 2,5 e que os diâmetros tenham distribuição normal com média 10,0" e desvio padrão 0,10". Refaça os cálculos, admitindo-se que o desvio padrão tenha sido reduzido à metade.
- 5) Para empacotar um determinado produto, utiliza-se uma máquina que produz pacotes com peso líquido seguindo uma distribuição normal. Sabendo-se que o desvio-padrão resultante do processo é 4 g, qual deve ser o peso médio para que apenas 0,5% do pacotes tenham menos que 200 g ?
- 6) (Cont.5) Suponha que a máquina esteja regulada com média de 210 g e desvio padrão 4 g. Qual a probabilidade de que a média de 5 pacotes, escolhidos ao acaso, seja inferior a 205 g ? Idem para 200 g ? Determine os valores máximo e mínimo, com 99% de probabilidade, para a média de 5 pacotes.

- 7) Suponha que o diâmetro interno de um cilindro tenha distribuição normal com média 125,0 mm e desvio padrão 0,4 mm e que o diâmetro externo de um pistão também seja normal com média 124,0 e desvio 0,3. Retirando-se ao acaso um par cilindro e pistão, qual a probabilidade da folga ficar entre 0,5 e 2,0 mm? Qual a probabilidade de que o pistão tenha diâmetro maior que o diâmetro interno do cilindro?
- 8) Uma máquina produz peças cujo comprimento tem distribuição normal com média 215,0 mm e desvio padrão 0,5 mm. Qual a probabilidade de uma peça cair fora da especificação $215,0 \pm 1,0$? Em um lote de 20 peças, qual a probabilidade de termos três ou mais peças fora da especificação anterior ?
- 9) Um processo automático de fabricação produz comprimidos com dosagem seguindo uma distribuição normal com média 150 mg e desvio padrão 2 mg. Se o processo estiver sob controle, qual deve ser a fração de comprimidos produzidos fora da especificação 150 ± 5 mg? Qual a probabilidade da dosagem média de uma amostra de 16 comprimidos cair fora do intervalo (148,5 a 151,5) ?
- 10) Seja X uma variável aleatória binominal com parâmetros $n=20$ e $p=0,5$. Calcule a probabilidade $P(10 \leq X \leq 15)$, utilizando a aproximação pela distribuição normal. Compare os resultados com os valores exatos obtidos pela distribuição binomial. Idem para $n=100$. Interprete os resultados obtidos.
- 11) Suponha que um dado seja lançado 50 vezes. Qual a probabilidade de que a pontuação média nestes lançamentos esteja entre três e quatro? Idem para 100.
- 12) Explique a diferença entre a distribuição binomial e a normal. Cite exemplos de aplicação de cada uma destas distribuições.