



PRO2271 ESTATÍSTICA

6. Testes de Hipóteses

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção



Introdução

Testes de Hipóteses

- Inferência Estatística que consiste em **aceitar** ou **rejeitar** uma hipótese a respeito de uma população ou processo.
- Por exemplo, teste sobre a média de uma distribuição normal.

Estatística de Teste e Intervalo de Aceitação

- A decisão de aceitar ou rejeitar é tomada avaliando-se o valor de uma **estatística teste**. Se o valor cair dentro do intervalo de aceitação, aceita-se a hipótese, caso contrário, rejeita-se.
- O **intervalo de aceitação** é o conjunto de valores que, com probabilidade $1-\alpha$, irá conter o valor da estatística de teste se a hipótese formulada fosse verdadeira.

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

2



Teste de Hipóteses para Média



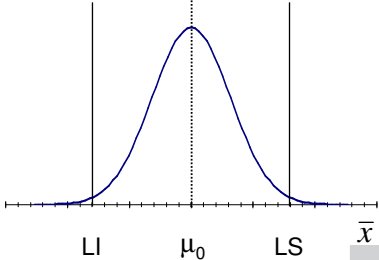
Hipóteses

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

Estatística de Teste: $\bar{x}$

Intervalos de Aceitação:

$$LI = \mu_0 - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad LS = \mu_0 + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Departamento de Engenharia de Produção

3



Teste Z para Média (σ conhecido)



Hipóteses

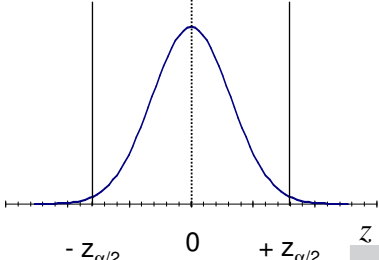
$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

Estatística de Teste:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

Aceitar H_0 se: $-z_{\alpha/2} \leq z \leq +z_{\alpha/2}$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Departamento de Engenharia de Produção

4



Exemplo 1



Dados: $n = 16$ $\bar{x} = 40,8$ $\sigma = 0,5$

Teste: $H_0: \mu = 40$

$H_1: \mu \neq 40$ $\alpha = 5\%$

$$z = \frac{40,8 - 40,0}{0,5 / \sqrt{16}} = 6,4 \quad z_{2,5\%} = 1,96$$

como $z > z_{2,5\%}$, rejeita-se H_0 , ou seja, a média é maior que 40!

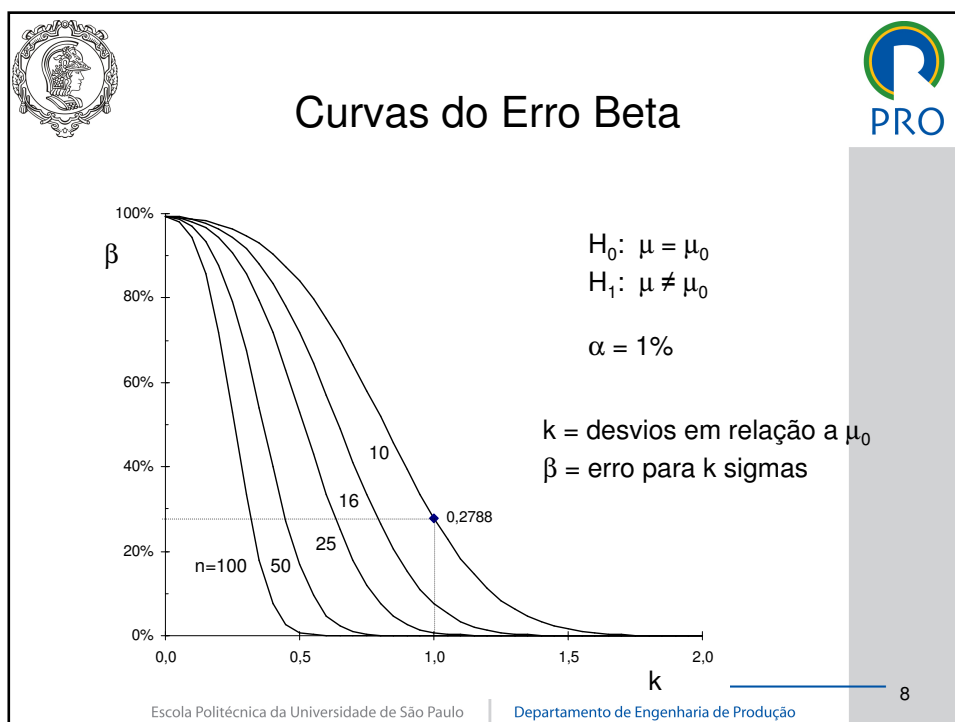
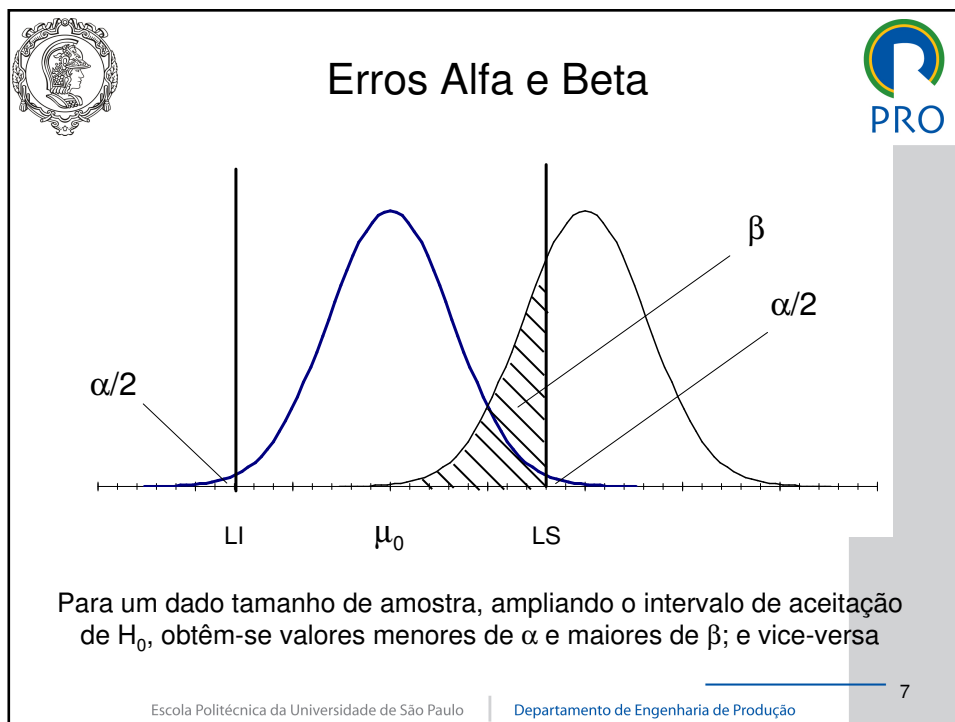


Riscos de Erro em T.H.



Em testes de hipóteses, qualquer que seja a decisão, aceitar ou rejeitar H_0 , há sempre um risco de erro.

	Aceita-se H_0	Rejeita-se H_0
H_0 é Verdadeira	Decisão Correta	Erro I α
H_0 é Falsa	Erro II β	Decisão Correta





Testes Z para Média



Estatística de teste: $z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$

Hipóteses	Rejeitar H_0 se
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$	$ z > z_{\alpha/2}$
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	$z > z_{\alpha}$
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$z < -z_{\alpha}$



Testes Z para Média (cont.)



Hipóteses	Erro $\beta(\mu)$
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$	$\Phi\left(z_{\alpha/2} + \frac{\mu_0 - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}\right) - \Phi\left(-z_{\alpha/2} + \frac{\mu_0 - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}\right)$
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	$\Phi\left(z_{\alpha} + \frac{\mu_0 - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}\right)$
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$1 - \Phi\left(-z_{\alpha} + \frac{\mu_0 - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}\right)$

Tamanho da Amostra: $n = \left[\frac{\sigma(z_{\alpha/2} + z_{\beta})}{\mu_0 - \mu_1} \right]^2$

Aproximação
para amostras
grandes ($n > 30$)



Testes T para Média (σ estimado)



Estatística de teste: $t_{n-1} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$

Hipóteses	Rejeitar H_0 se
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$	$ t_{n-1} > t_{n-1, \alpha/2}$
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	$t_{n-1} > t_{n-1, \alpha}$
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$t_{n-1} < -t_{n-1, \alpha}$



Exemplo 2



Dados: $n = 16$ $\bar{x} = 40,8$ $s = 0,6$

Teste: $H_0: \mu = 40$

$H_1: \mu \neq 40$ $\alpha = 5\%$

$$t_{15} = \frac{40,8 - 40,0}{0,6 / \sqrt{16}} = 5,3 \quad t_{15; 2,5\%} = 2,131$$

como $t > t_{2,5\%}$, rejeita-se H_0 , ou seja, a média é maior que 40!



Testes χ^2 para Variância



Estatística de teste: $\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$

Hipóteses	Rejeitar H_0 se
$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$	$\chi_{n-1}^2 > \chi_{n-1, \alpha}^2$
$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$	$\chi_{n-1}^2 < \chi_{n-1, 1-\alpha}^2$
$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\chi_{n-1}^2 > \chi_{n-1, \alpha/2}^2$ ou $\chi_{n-1}^2 < \chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2$



Exemplo 3



Dados: $n = 16$ $\bar{x} = 40,8$ $s = 0,6$

Teste: $H_0: \sigma = 0,5$

$H_1: \sigma > 0,5$ $\alpha = 5\%$

$$\chi_{15}^2 = \frac{15 \cdot (0,6)^2}{(0,5)^2} = 21,6 \quad \chi_{15; 5\%}^2 = 24,996$$

como $\chi^2 < \chi_{5\%}^2$, aceita-se H_0 , ou seja, não se pode afirmar que o desvio padrão é maior que 0,5!



Testes Z para Porcentagens (var. qualitativas)



Estatística de teste:
$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

Hipóteses	Rejeitar H_0 se
$H_0: p = p_0$ $H_1: p > p_0$	$z > +z_\alpha$
$H_0: p = p_0$ $H_1: p < p_0$	$z < -z_\alpha$
$H_0: p = p_0$ $H_1: p \neq p_0$	$ z > z_{\alpha/2}$

Condição: $np_0 \geq 5$ e $np_0(1-p_0) \geq 5$.

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Departamento de Engenharia de Produção

15



Exemplo 4



Dados: $n = 100$ $\hat{p} = 40\%$

Teste: $H_0: p = 0,5$

$H_1: p \neq 0,5$ $\alpha = 5\%$

$$z = \frac{0,40 - 0,50}{\sqrt{\frac{0,5 \cdot 0,5}{100}}} = -2,0 \quad z_{2,5\%} = 1,96$$

como $z < -z_{2,5\%}$, rejeita-se H_0 , ou seja, a porcentagem é menor que 50%!

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Departamento de Engenharia de Produção

16



Testes Z para Duas Porcentagens



Estatística de teste:
$$z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}_c(1 - \hat{p}_c)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

Hipóteses	Rejeitar H_0 se
$H_0: p_1 = p_2$ $H_1: p_1 \neq p_2$	$ z > z_{\alpha/2}$
$H_0: p_1 = p_2$ $H_1: p_1 > p_2$	$z > +z_{\alpha}$
$H_0: p_1 = p_2$ $H_1: p_1 < p_2$	$z < -z_{\alpha}$

$$\hat{p}_c = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}$$

porcentagem conjunta



Teste χ^2 para variáveis qualitativas



Teste de Independência

H_0 : variáveis independentes

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^c \frac{(o_{ij} - \hat{e}_{ij})^2}{\hat{e}_{ij}}$$

o_{ij} : valores observados
 e_{ij} : valores esperados

se $\chi^2 > \chi^2_{(l-1)(c-1), \alpha} \Rightarrow \text{Rejeitar } H_0$

– Condição: $\hat{e}_{ij} \geq 5$



Teste χ^2 (cont.)



Tabela de contingências:

- contagens de resultados em duas classificações
- variável linha e variável coluna

i \ j	1	2	...	c	Total
1	o_{11} e_{11}	o_{12} e_{12}	...	o_{1c} e_{1c}	u_1
2	o_{21} e_{21}	o_{22} e_{22}	...	o_{2c} e_{2c}	u_2
...					
l	o_{l1} e_{l1}	o_{l2} e_{l2}	...	o_{lc} e_{lc}	u_l
Total	v_1	v_2	...	v_c	n

o_{ij} = valores observados

$\hat{e}_{ij}$ = valores esperados

$$\hat{e}_{ij} = \frac{u_i \cdot v_j}{n}$$



Exemplo 5



Uma pesquisa perguntou para homens e mulheres se são a favor ou contra a proibição da venda de armas e munições no país. A partir dos resultados abaixo, pode-se afirmar que a opinião é independente do gênero?

	Favor	Contra	Total
Feminino	35	5	40
Masculino	44	16	60
Total	79	21	100

Favor: 87,5% das mulheres e 73,3% dos homens.



Exemplo – Saída Minitab



Tabulated statistics: Gênero; Opinião

Using frequencies in **Frequência**

Rows: **Gênero** Columns: **Opinião**

	Contra	Favor	All
Femino	5 8,4	35 31,6	40
Masculino	16 12,6	44 47,4	60
All	21	79	100

Cell Contents: Count
Expected count

Pearson Chi-Square = 2,903; DF = 1; P-Value = 0,088

$H_0: p_{11} = p_{12}$

$$\chi^2 = \frac{(5-8,4)^2}{8,4} + \frac{(35-31,6)^2}{31,6} + \frac{(16-12,6)^2}{12,6} + \frac{(44-47,4)^2}{47,4} = 2,903$$

 $\chi^2_{1;5\%} = 3,841$
 como $\chi^2 < \chi^2_{1;5\%} \Rightarrow$ Aceitar H_0
 (independência)

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Departamento de Engenharia de Produção

21



Teste T para Duas Médias: Amostras Independentes e Variâncias Conhecidas



Hipóteses

$H_0: \mu_1 = \mu_2$

$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

Estatística de teste:
$$z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

Rejeitar H_0 se: $|z| > z_{\alpha/2}$

Propriedades:

$E[\bar{X}_1 - \bar{X}_2] = \mu_1 - \mu_2$

$V[\bar{X}_1 - \bar{X}_2] = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Departamento de Engenharia de Produção

22



Teste T para Duas Médias:

Amostras Indep., Variâncias Iguais e Desconhecidas



Hipóteses: $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

Estatística de teste: $t_{n_1+n_2-2} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s_c \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$

– onde:

$$s_c^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$$

Rejeitar H_0 se: $|t_{n_1+n_2-2}| > t_{n_1+n_2-2, \alpha/2}$

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Departamento de Engenharia de Produção

23



Teste T para Duas Médias:

Dados Emparelhados



Aplicação em casos em que um mesmo item pode ser submetido a dois tratamentos. O teste é feito com base nas diferenças dos resultados de um mesmo item.

Hipóteses: $H_0 : \mu_D = 0$

$H_1 : \mu_D \neq 0$

Estatística de teste: $t_{n-1} = \frac{\bar{d}}{s_D / \sqrt{n}}$

Rejeitar H_0 se: $|t_{n-1}| > t_{n-1, \alpha/2}$

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Departamento de Engenharia de Produção

24



Teste para Duas Variâncias



Hipóteses: $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$
 $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$

Estatística de teste: $F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$

Rejeitar H_0 se: $F > F_{n_1-1, n_2-1, \alpha}$

Tabela F - distribuição de Fisher & Snedecor



Considerações Finais



Foram apresentados alguns testes paramétricos, muitos outros estão na bibliografia da área.

Não foram discutidos testes não paramétricos como, por exemplo, os testes de aderência, apresentados no livro-texto.

Em muitas situações, utilizam-se teste estatísticos específicos, de qualquer forma, os teste apresentados aqui são a base para compreensão da maioria dos testes existentes.

O próximo tópico, Análise de Variância, consiste em um teste estatístico para verificar quais fatores afetam a média de uma variável.