

PTC2892: Processamento de Imagens Médicas

PTC2892 Princípios da Formação e Processamento de Imagens Médicas

Ultra-som

Sérgio S Furuie

PTC/LEB - S.Furuie

Plano da aula de hoje

- Princípios físicos
- Formação de imagens de Ultra-som
- As aulas estão no site:
 - <http://moodle.stoa.usp.br>

PTC/LEB - S.Furuie

PTC2892: Processamento de Imagens Médicas

Reverendo aula anterior ...

- Imagem radiológica = mapa de intensidade da radiação transmitida
- Ionizante
- Raio-X
 - Simples, barato
 - Elevada disponibilidade
 - Alta resolução espacial
 - Formação rápida das imagens
- CT
 - Tomográficas
 - Alta qualidade => imagens anatômicas
 - - elevada dose de radiação

PTC/LEB - S.Furuie

PTC2892: Processamento de Imagens Médicas

COMO SE FORMAM AS IMAGENS DE ULTRASSOM?

PTC/LEB - S.Furuie

4

PTC2892: Processamento de Imagens Médicas

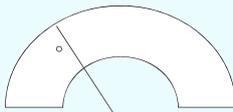
O que sabemos sobre ultrassom?

- Tipo de energia?
- Tipo de interação com o corpo humano?
- Ionizante?
- Invasivo?
- Projeção? Ou Tomográfico?
- Vantagens/Desvantagens/Limitações?
- Alguma semelhança com radar?

PTC/LEB - S.Furuie

5

Radar em aeroportos, sonar em submarinos..



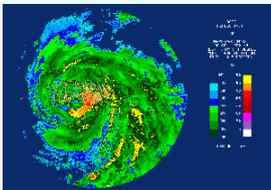
presença de objetos e morfologia

PTC/LEB - S.Furuie

6

PTC2892: Processamento de Imagens Médicas

Radar meteorológico



- É tomográfico?
- morfologia e velocidade

PTC/LEB - S.Furule 7

PTC2892: Processamento de Imagens Médicas

Radar no trânsito




velocidade, movimento => como?

PTC/LEB - S.Furule 8

PTC2892: Processamento de Imagens Médicas

Corte tomográfico por reflexão

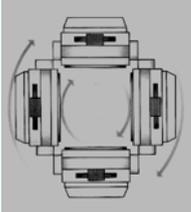
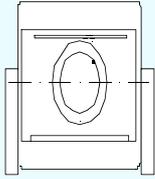


PTC/LEB - S.Furule 9

PTC2892: Processamento de Imagens Médicas

Ultra-som versus CT

- Reconstrução tomográfica a partir das projeções
 - CT, Spiral CT, fastCT
 - SPECT
 - PET

PTC/LEB - S.Furule 10

PTC2892: Processamento de Imagens Médicas

Ultrassom: abordagem

- Como funciona?
 - Princípios físicos
 - Sensores/transdutores
- Limitações técnicas
- Vantagens/desvantagens
- Aplicações clínicas

PTC/LEB - S.Furule 11

PTC2892: Processamento de Imagens Médicas

ULTRA-SOM: PRINCÍPIOS FÍSICOS

PTC/LEB - S.Furule

PTC2892: Processamento de Imagens Médicas

Som

- **Som** = ondas mecânicas longitudinais de compressão e rarefação do meio, com frequências entre 20 Hz e 20 kHz, capazes de sensibilizar o sistema auditivo humano.
 - Humanos - 20 Hz ~ 20 kHz
 - Cães - 15 Hz ~ 50 kHz
 - Golfinhos - 150 Hz ~ 150 kHz
 - Morcegos - 1 kHz ~ 120 kHz
- **Infra-som** = ondas mecânicas com frequências abaixo de 20 Hz.
- **Ultra-som** = ondas mecânicas com frequências acima de 20 kHz.

13

PTC2892: Processamento de Imagens Médicas

Princípio físico: energia acústica

- Reflexão
- Refração/transmissão
- $v = \lambda \cdot f$ (velocidade=comprimento x freq.)
- $v = \sim 1500$ m/s (média no corpo) [5.400 km/h]
- Percorre 50 cm (ida e volta) em 0.6 ms
- Se varrer 100 linhas => 60 ms => 20 imagens/s

14

PTC2892: Processamento de Imagens Médicas

Ondas de compressão e rarefação formando ondas sonoras

15

PTC2892: Processamento de Imagens Médicas

Equações de onda

$$y(x,t) = A \sin [2\pi (x/\lambda - t/T)] = A \sin (kx - \omega t)$$

$$P(x,t) = P_0 \sin [2\pi (x/\lambda - t/T)] = P_0 \sin (kx - \omega t)$$

onde :

- $k = 2\pi/\lambda =$ número de onda
- $\omega = 2\pi/T = 2\pi f =$ frequência angular
- $A =$ amplitude de deslocamento
- $P_0 =$ amplitude de pressão = $\rho v \omega A$

16

PTC2892: Processamento de Imagens Médicas

Parâmetros: caracterizam a onda

λ = comprimento de onda
distância entre dois máximos ou mínimos consecutivos de amplitude de oscilação;

T = período
intervalo de tempo necessário para uma onda percorrer uma distância igual a um comprimento de onda;

f = frequência
número de vezes que a onda se repete por unidade de tempo e depende somente da fonte sonora = $1/T$.

$v = f \lambda$

v = velocidade de propagação:
função das características do meio através do qual o som se propaga, portanto, independe da frequência da onda.

17

PTC2892: Processamento de Imagens Médicas

Onda sonora e curvas de variação do deslocamento e da pressão

18

PTC2892: Processamento de Imagens Médicas

Princípios físicos

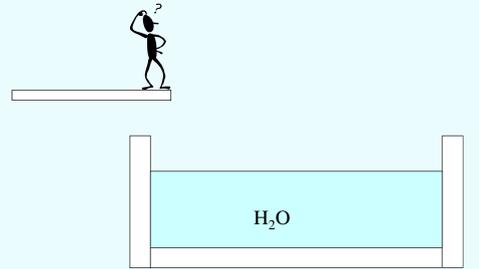
- Energia sonora:
 - Parte prossegue => penetra na matéria
 - Parte retorna (refletida) =>detetada pelo sensor
 - Parte é convertida em calor, ...
- Impedância acústica

$v = \lambda \cdot f$ (velocidade=comprimento x freq.)
 $Z = \rho \cdot v$ (Impedância=densidade x veloc.)

PTC/LEB - S.Furue 19

PTC2892: Processamento de Imagens Médicas

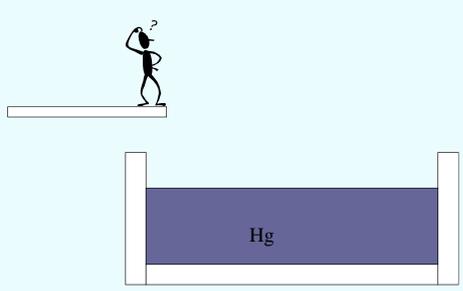
Mergulhando em impedância diferente



PTC/LEB - S.Furue 20

PTC2892: Processamento de Imagens Médicas

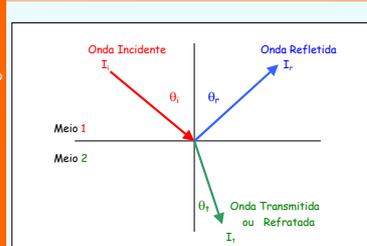
Mergulhando em alta impedância



PTC/LEB - S.Furue 21

PTC2892: Processamento de Imagens Médicas

Reflexão, refração



Eq. Fresnel

$$R + T = 1$$

$$R = \frac{I_r}{I_i} = \left(\frac{Z_2 \cos \theta_i - Z_1 \cos \theta_t}{Z_2 \cos \theta_i + Z_1 \cos \theta_t} \right)^2$$

$$T = \frac{I_t}{I_i} = \left(\frac{4Z_1 Z_2 \cos^2 \theta_i}{(Z_2 \cos \theta_i + Z_1 \cos \theta_t)^2} \right)$$

Lei de Snell

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{v_1}{v_2}$$

Figura 5 - Reflexão e refração (ou transmissão) de ondas na interface entre os meio 1 e 2

PTC/LEB - S.Furue 22

PTC2892: Processamento de Imagens Médicas

Incidência normal

Impedância acústica (.001g/m2/s) a 1 MHz:

- ar => 0,0004
- água => 1,54
- sangue => 1,61
- fígado => 1,65
- osso => 6,00
- rim => 1,62
- gordura => 1,38

$$\theta_i = \theta_t = 0^0$$

$$R = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \right)^2$$

$$T = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_2 + Z_1)^2}$$

Calcule taxa de reflexão e transmissão para as interfaces:
 1) AR ⇔ ÁGUA
 2) ÁGUA ⇔ OSSO

PTC/LEB - S.Furue 23

PTC2892: Processamento de Imagens Médicas

Energia refletida e transmitida

- Ar => água
 R=0,9989
 T=0,001
- Água => osso
 R=0,35
 T=0,65

PTC/LEB - S.Furue 24

PTC2892: Processamento de Imagens Médicas

Princípios físicos: energia desperdiçada

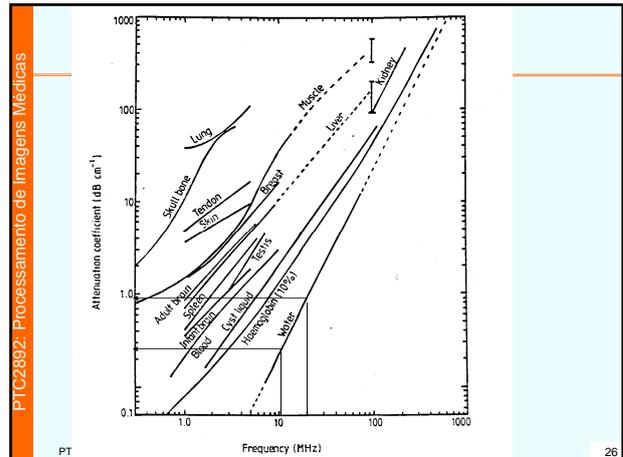
Atenuação:

- absorção (calor)
- espalhamento

frequência $\uparrow \Rightarrow \mu \uparrow$

$$I = I_0 \cdot e^{-\mu \cdot x}$$

PTC/LEB - S.Furue 25



PTC2892: Processamento de Imagens Médicas

Aumento de 2 x em frequencia ?

- No caso da água, a atenuação aumentou 3 x

$$I = I_0 \cdot e^{-\mu \cdot x}$$

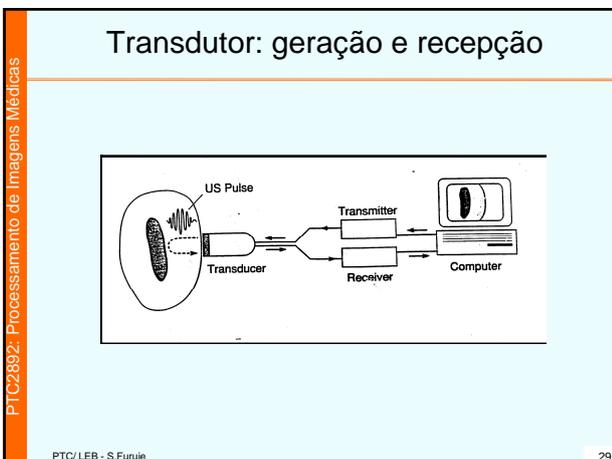
PTC/LEB - S.Furue 27

PTC2892: Processamento de Imagens Médicas

Transdutor: Efeito piezoelétrico

Piezoelétricidade:
Tensão alternada produz oscilações nas dimensões do cristal, devido ao re-alinhamento das moléculas polarizadas

PTC/LEB - S.Furue 28



PTC2892: Processamento de Imagens Médicas

Eco acústico: impedância

Atenuação:

- absorção (calor)
- espalhamento

$$I = I_0 \cdot e^{-\mu \cdot x}$$

$\mu \sim \alpha$ frequencia

O que está incorreto no v(t)?

PTC/LEB - S.Furue 30

PTC2892: Processamento de Imagens Médicas

Princípios físicos: consolidação

- efeito piezo-elétrico: mecânica <=> elétr.
- espalhamento dentro das estruturas
- resolução espacial $\sim 1 \lambda = 1.5 \text{ mm}$ (@1MHz)
- $v = \sim 1500 \text{ m/s}$ (média no corpo)
- 20 - 50MHz p/ intra-arterial
- 100-200MHz p/ microscopia celular
- $v = \lambda \cdot f$
- $Z = \rho \cdot v$ (ρ : densidade)

PTC/LEB - S.Furue 31

PTC2892: Processamento de Imagens Médicas

FORMANDO IMAGENS

PTC/LEB - S.Furue 32

PTC2892: Processamento de Imagens Médicas

modo A (Amplitude)

$2d = c \cdot t$

Atenuação:

- absorção (calor)
- espalhamento

$$I = I_0 \cdot e^{-\mu \cdot x}$$

PTC/LEB - S.Furue 33

PTC2892: Processamento de Imagens Médicas

Modo B (Brilho)

- modo A em tons de cinza com varredura

PTC/LEB - S.Furue 34

PTC2892: Processamento de Imagens Médicas

Modo B: diagrama funcional

- controle automático ganho (tempo)
- baixo ruído eletrôn.
- faixa dinâmica elevada
- janela de tempo (profund)
- conversão A/D: 20MHz
- 512 x 512 x 8bits
- 512 x 512 x 24bits (Doppler)
- posição de leitura
- imagem média, simples ou de máximos

PTC/LEB - S.Furue 35

PTC2892: Processamento de Imagens Médicas

Efeito Doppler

Fluxo e velocidade $\Delta f = 2 \frac{f_0}{c} \cdot \cos(\alpha) \cdot v$

PTC/LEB - S.Furue 36

PTC2892: Processamento de Imagens Médicas

Velocidade absoluta ?

- Como obter o ângulo de incidência ?

PTC/LEB - S.Furule 37

PTC2892: Processamento de Imagens Médicas

Modo duplex

PTC/LEB - S.Furule 38

PTC2892: Processamento de Imagens Médicas

Imagem em modo-B

Volume selecionado para análise Doppler (cursors)

Traso

Monitor

Traço espectral

PTC/LEB - S.Furule 39

PTC2892: Processamento de Imagens Médicas

+ 76.9

- 76.9 cm/s

Freq 2.0 MHz
WF High
Dop 63% Map 2
PRF 31250Hz

PTC/LEB - S.Furule 40

PTC2892: Processamento de Imagens Médicas

Ultra-som: degradação

$T(t) \rightarrow \boxed{} \rightarrow S(t)$

- Caract. do transdutor $B(t)$
- Atenuação no caminho $A(t)$
- Espalhamento $E(t)$
- Ruído : speckle

$$S(t) = T(t) \otimes B(t) \otimes A(t) \otimes E(t)$$

$$\frac{S(f)}{T(f)} = B(f) \cdot A(f) \cdot E(f)$$

PTC/LEB - S.Furule 41

PTC2892: Processamento de Imagens Médicas

Ruído speckle

- Ruído devido a interferência de ondas (efeito de superposição de ondas, efeito destrutivo)
- Ruído correlacionado com o sinal, aproximadamente multiplicativo
- Aproximadamente distribuição de Rayleigh (partículas da mesma ordem que o comprimento de onda)

$$g(x) \approx f(x) + \sqrt{f(x)} \cdot N(0,1)$$

se homogêneo, $f(x) = cte$

$$E[g] = f$$

$$\text{var}[g] = f$$

PTC/LEB - S.Furule 42

PTC2892: Processamento de Imagens Médicas

Filtros adaptativos: ruído aditivo indep.

- Wiener adaptativo (Lee)
 - Preserva bordas
 - Atenua ruído de regiões homogêneas
- Sejam:
 - $g(x,y)$: imagem dada
 - $f(x,y)$: imagem filtrada (estimada)

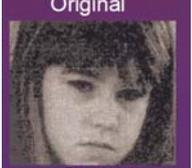
$$f(x, y) = k \cdot g(x, y) + (1-k) \cdot \bar{g}(x, y)$$

$$k = \frac{\sigma_{\text{signal}}^2}{\sigma_{\text{local}}^2} = \frac{\sigma_g^2 - \sigma_{\text{ruído}}^2}{\sigma_g^2} = 1 - \frac{\sigma_{\text{ruído}}^2}{\sigma_g^2}$$

$k \in [0,1]$
 se borda $\Rightarrow \sigma_{\text{local}}^2$ elevado $\Rightarrow k \approx 1 \Rightarrow f(x, y) = g(x, y)$
 se homogêneo $\Rightarrow k \approx 0 \Rightarrow f(x, y) = \bar{g}(x, y)$



Original



Filtrada

Filtragem de Imagens

PTC/LEB - S.Furule

PTC2892: Processamento de Imagens Médicas

Filtro adaptativo por difusão

- Difusão (ex. no ImageJ)
 - Isotrópica, linear (difusão térmica)
 - Anisotrópica não-linear (Perona & Malik)
 - Anisotrópica direcional

Detalhes na aula de MN

PTC/LEB - S.Furule

PTC2892: Processamento de Imagens Médicas

Filtro por difusão anisotrópica

$$\frac{\partial I(x,y,t)}{\partial t} = \text{div}[c(|\nabla I|) \cdot \nabla I]$$

$$c(s) = \frac{1}{1 + (\frac{s}{K})^2}$$

Na qual K é uma referência para o valor do módulo de gradiente. Vamos detalhar uma implementação numérica por diferenças finitas de cada parte da equação 17:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{I(x,y,t+1) - I(x,y,t)}{\Delta t}$$

$$\nabla I(x,y,t) = \frac{\partial I}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial I}{\partial y} \vec{u}_y$$

$$\frac{\partial I(x,y,t)}{\partial x} = \frac{I(x+1,y,t) - I(x-1,y,t)}{2}$$

$$\frac{\partial I(x,y,t)}{\partial y} = \frac{I(x,y+1,t) - I(x,y-1,t)}{2}$$

na qual \vec{u}_x e \vec{u}_y são os vetores unitários dos eixos x e y respectivamente.

PTC/LEB - S.Furule

PTC2892: Processamento de Imagens Médicas

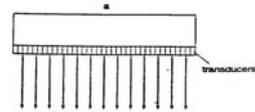
TRANSDUTORES: MAIS DETALHES

46

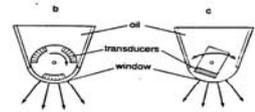
PTC/LEB - S.Furule

PTC2892: Processamento de Imagens Médicas

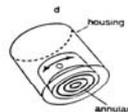
a Linear array transducer



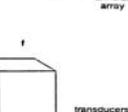
b Mechanical transducers



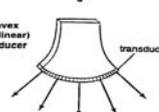
c Annular array



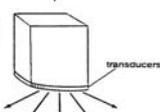
d housing



e Convex (curvilinear) transducer



f Phased array sector transducer



PT

PTC2892: Processamento de Imagens Médicas

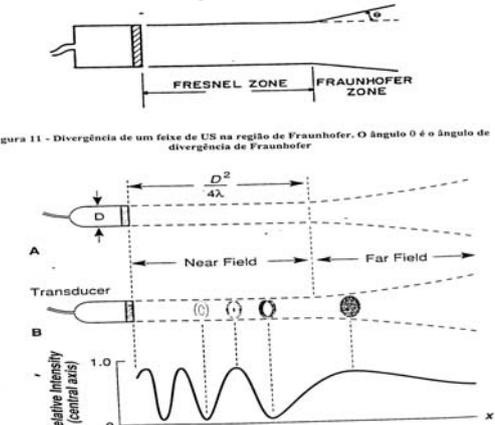


Figura 11 - Divergência de um feixe de US na região de Fraunhofer. O ângulo θ é o ângulo de divergência de Fraunhofer

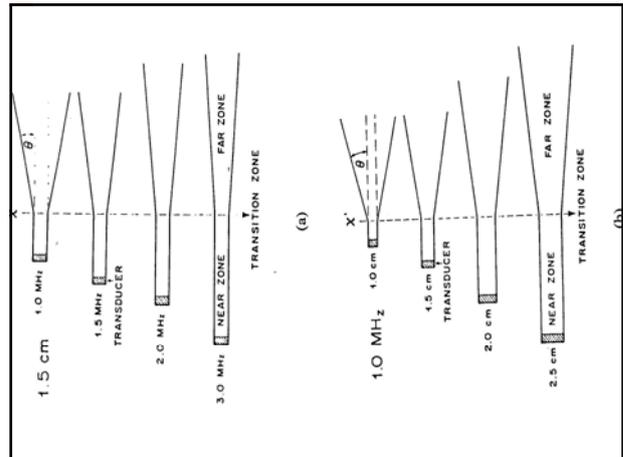
PT

PTC2892: Processamento de Imagens Médicas

zona de Fresnel

- Para que um objeto seja "visível" pelo transdutor, ele precisa estar localizado na zona de Fresnel ou zona próxima.
 - deve-se diminuir a espessura do cristal para aumentar a sua "profundidade de campo", ou, alternativamente,
 - aumentar o diâmetro D do cristal.

PTC/LEB - S.Furue 49



PTC2892: Processamento de Imagens Médicas

Ultra-som 3D: varr. Mec. tilt

PTC/LEB - S.Furue 51

PTC2892: Processamento de Imagens Médicas

Scan rotacional

PTC 52

PTC2892: Processamento de Imagens Médicas

ULTRA-SOM: APLICAÇÕES

PTC/LEB - S.Furue 53

PTC2892: Processamento de Imagens Médicas

Ultra-som: aplicações

- Estudo de estruturas dinâmicas em uma determinada posição.
 - válvulas cardíacas no modo M
- Cortes tomográficos 2D
 - cardíaca
 - fetal
 - abdominal, ...

PTC/LEB - S.Furue 54

PTC2892: Processamento de Imagens Médicas

Ultra-som: aplicações

- Mapeamento colorido de fluxo (duplex)
 - codificação do fluxo (doppler) em cores
 - sobreposição em imagens 2D
 - curva temporal do fluxo
- Fluxo turbulento, refluxo, perfil de velocidade
- Contraste p/ US: micro-bolhas
- IVUS - Intra Vascular Ultra Sound
- Ecocardiografia 2D e 3D

55

PTC2892: Processamento de Imagens Médicas

IVUS

56

PTC2892: Processamento de Imagens Médicas

Ecocardiografia 3D com microbolhas

57

PTC2892: Processamento de Imagens Médicas

The 3D image of the fetal face has been rendered using a transparency-rendering algorithm with the ray-casting approach. In this image, the amniotic fluid has been made transparent, and tissues have been made transparent or opaque depending on the voxel intensity (SPIE Press, Medical Imaging).

58

PTC2892: Processamento de Imagens Médicas

Ultra-som: resumindo

- + Custo/benefício muito bom
- + Energia utilizada não é ionizante
- + Exames não são invasivos
- + Inerentemente tomográfico: dinâmica
- + Exames realizados pelos próprios médicos especialistas.
 - Ruído do tipo speckle (interferência de ondas)
 - Informações não são metabólicas, ou fisiológicas

59

PTC2892: Processamento de Imagens Médicas

MODALIDADE	FORMAS DE ENERGIA	PARÂMETROS FÍSICOS	INFORMAÇÕES
Consulta: Visual, auditivo, tato, movimento...	Luz Som Mecânica, ...		História de saúde Sintomas
Radiologia: Convencional Digital Tomográfica	Ondas e.m.	I_0, I, μ, ρ	Anatomia Dinâmica Dimensões Volumes
Ultra-sonografia: Modo - A Modo - S Modo - TM Doppler 3 - D	Ondas mecânicas	l, z v_r, v, f_0	Anatomia Dimensões Massa Movimento Função Velocidade Fluxo, ...
Medicina Nuclear: Convencional SPECT PET	Ondas e.m.	l, μ	Função Metabolismo Dimensões Volumes Anatomia
Ressonância Magnética Nuclear: Tomográficas Funcionais	Ondas e.m.	Campos magnéticos Momentos magnéticos, T_1, T_2, ρ	Anatomia Alterações na estrutura dos tecidos Dinâmica Função
Microscopia: Óptica Eletrônica	Luz visível Elétrons Luz síncrotron	l Coef. transmissão elet. Coef. reflexão elet.	Histológicas Estruturas celulares Superfície

60

PTC2892: Processamento de Imagens Médicas

Filtro adaptativo para atenuar speckle

- ImageJ

PTC/LEB - S.Furule 61

PTC2892: Processamento de Imagens Médicas

Filtros adaptativos: ruído aditivo indep.

- Wiener adaptativo (Lee)
 - Preserva bordas
 - Atenua ruído de regiões homogêneas

$$f(x, y) = k \cdot g(x, y) + (1-k) \cdot \bar{g}(x, y)$$

$$k = \frac{\sigma_{\text{signal}}^2}{\sigma_{\text{local}}^2} = \frac{\sigma_g^2 - \sigma_{\text{ruído}}^2}{\sigma_g^2} = 1 - \frac{\sigma_{\text{ruído}}^2}{\sigma_g^2}$$

$k \in [0,1]$
 se borda => σ_{local}^2 elevado => $k \approx 1 \Rightarrow f(x, y) = g(x, y)$
 se homogêneo => $k \approx 0 \Rightarrow f(x, y) = \bar{g}(x, y)$



PTC/LEB - S.Furule Filtragem de Imagens (Yu & Acton, 2002)

PTC2892: Processamento de Imagens Médicas

Ruído speckle

- Ruído devido a interferência de ondas (efeito de superposição de ondas, efeito destrutivo)
- Ruído correlacionado com o sinal, aproximadamente multiplicativo
- Aproximadamente distribuição de Rayleigh (partículas da mesma ordem que o comprimento de onda)

$$g(x) \approx f(x) + \sqrt{f(x)} \cdot N(0,1)$$

se homogêneo, $f(x) = cte$

$$E[g] = f$$

$$\text{var}[g] = f$$

PTC/LEB - S.Furule

PTC2892: Processamento de Imagens Médicas

Filtro de Lee p/ speckle

Abordagem 1

- Supondo índice de speckle C constante (Loizou)
 - Variância do speckle: linear com intensidade do sinal
 - S/N melhora com sqrt(S): ~ Poisson
- C: estimado em região homogênea da imagem

$$C = \frac{\sigma_g^2}{\bar{g}}$$
 (região homogênea)

$$k = 1 - \frac{\sigma_{\text{ruído}}^2}{\sigma_g^2}$$

$$\sigma_{\text{ruído}}^2 = C \cdot \bar{g}$$

$$k \in [0,1]$$

$$f(x, y) = k_{x,y} \cdot g(x, y) + (1 - k_{x,y}) \cdot \bar{g}(x, y)$$

$$k_{x,y} = 1 - \frac{C \cdot \bar{g}(x, y)}{\sigma_{g(x,y)}^2}$$

$$k_{x,y} \in [0,1]$$

PTC/LEB - S.Furule 64

PTC2892: Processamento de Imagens Médicas

Filtro de Lee p/ speckle

Abordagem 2

- Supondo variância do speckle proporcional ao quadrado do sinal (Yu)
 - D.padrão do speckle: linear com intensidade do sinal
 - S/N não melhora com intensidade do sinal
- α : estimado em região homogênea da imagem

$$\alpha = \frac{\sigma_g^2}{\bar{g}^2}$$
 (região homogênea)

$$k = 1 - \frac{\sigma_{\text{ruído}}^2}{\sigma_g^2}$$

$$\sigma_{\text{ruído}}^2 = \alpha \cdot \bar{g}^2$$

$$k \in [0,1]$$

$$f(x, y) = k_{x,y} \cdot g(x, y) + (1 - k_{x,y}) \cdot \bar{g}(x, y)$$

$$k_{x,y} = 1 - \frac{\alpha \cdot \bar{g}^2(x, y)}{\sigma_{g(x,y)}^2}$$

$$k_{x,y} \in [0,1]$$

PTC/LEB - S.Furule 65

PTC2892: Processamento de Imagens Médicas

Filtro adaptativo por difusão

- Difusão (ex. no ImageJ)
 - Isotrópica, linear (difusão térmica)
 - Anisotrópica não-linear (Perona & Malik)
 - Anisotrópica direcional

Detalhes na aula de MN

PTC/LEB - S.Furule

Filtro por difusão anisotrópica

$$\frac{\partial I(x,y,t)}{\partial t} = \text{div}[c(|\nabla I|) \cdot \nabla I]$$

$$c(s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{K}\right)^2}$$

Na qual K é uma referência para o valor do módulo de gradiente. Vamos detalhar uma implementação numérica por diferenças finitas de cada parte da equação 17:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{I(x,y,t+1) - I(x,y,t)}{\Delta t}$$

$$\nabla I(x,y,t) = \frac{\partial I}{\partial x} \cdot \vec{u}_x + \frac{\partial I}{\partial y} \cdot \vec{u}_y$$

$$\frac{\partial I(x,y,t)}{\partial x} = \frac{I(x+1,y,t) - I(x-1,y,t)}{2}$$

$$\frac{\partial I(x,y,t)}{\partial y} = \frac{I(x,y+1,t) - I(x,y-1,t)}{2}$$

na qual \vec{u}_x e \vec{u}_y são os vetores unitários dos eixos x e y respectivamente.

PTC/LEB - S.Furue

$$|\nabla I(x,y,t)| = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial y}\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(I(x+1,y,t) - I(x-1,y,t))^2 + (I(x,y+1,t) - I(x,y-1,t))^2}$$

$$c_d(x,y,t) = c(|\nabla I|) = \frac{1}{1 + \left(\frac{|\nabla I|}{K}\right)^2} = \frac{1}{1 + \frac{(I(x+1,y,t) - I(x-1,y,t))^2 + (I(x,y+1,t) - I(x,y-1,t))^2}{(2K)^2}}$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \text{div}[c(|\nabla I|) \cdot \nabla I] =$$

$$= \text{div}[a(x,y,t) \cdot \vec{u}_x + b(x,y,t) \cdot \vec{u}_y] = \frac{\partial a(x,y,t)}{\partial x} + \frac{\partial b(x,y,t)}{\partial y} =$$

$$= \frac{1}{2} [a(x+1,y,t) - a(x-1,y,t) + b(x,y+1,t) - b(x,y-1,t)]$$

Na qual,

$$a(x,y,t) = c_d(x,y,t) \cdot \frac{\partial I(x,y,t)}{\partial x} = c_d(x,y,t) \cdot \frac{1}{2} [I(x+1,y,t) - I(x-1,y,t)], \text{ donde:}$$

$$a(x+1,y,t) = \frac{1}{2} c_d(x+1,y,t) \cdot [I(x+2,y,t) - I(x+1,y,t)]$$

PTC/LEB - S.Furue

$$a(x-1,y,t) = \frac{1}{2} c_d(x-1,y,t) \cdot [I(x,y,t) - I(x-2,y,t)]$$

$$b(x,y,t) = c_d(x,y,t) \cdot \frac{\partial I(x,y,t)}{\partial y} = c_d(x,y,t) \cdot \frac{1}{2} [I(x,y+1,t) - I(x,y-1,t)]$$

$$b(x,y+1,t) = \frac{1}{2} c_d(x,y+1,t) \cdot [I(x,y+2,t) - I(x,y,t)]$$

$$b(x,y-1,t) = \frac{1}{2} c_d(x,y-1,t) \cdot [I(x,y,t) - I(x,y-2,t)]$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 4 \frac{\partial I}{\partial t} &= 4 \frac{I(x,y,t+1) - I(x,y,t)}{\Delta t} \\ &= c_d(x+1,y,t) \cdot [I(x+2,y,t) - I(x,y,t)] \\ &\quad - c_d(x-1,y,t) \cdot [I(x,y,t) - I(x-2,y,t)] \\ &\quad + c_d(x,y+1,t) \cdot [I(x,y+2,t) - I(x,y,t)] \\ &\quad - c_d(x,y-1,t) \cdot [I(x,y,t) - I(x,y-2,t)] \end{aligned}$$

PTC/LEB - S.Furue

E o algoritmo com relaxação seria:

$$\begin{aligned} I(x,y,t+1) &= I(x,y,t) \\ &\quad + \frac{\lambda}{4} \Delta t \cdot \{c_d(x+1,y,t) \cdot [I(x+2,y,t) - I(x,y,t)] \\ &\quad + c_d(x-1,y,t) \cdot [I(x-2,y,t) - I(x,y,t)] \\ &\quad + c_d(x,y+1,t) \cdot [I(x,y+2,t) - I(x,y,t)] \\ &\quad + c_d(x,y-1,t) \cdot [I(x,y-2,t) - I(x,y,t)]\} \end{aligned}$$

Na qual:

$$c_d(x,y,t) = \frac{1}{1 + \left[(I(x+1,y,t) - I(x-1,y,t))^2 + (I(x,y+1,t) - I(x,y-1,t))^2 \right] / (2K^2)}$$

e $I(x,y,0) = I(x,y)$ (imagem inicial)

PTC/LEB - S.Furue