

## Segmentação de Imagens

**Motivação**

- Identificação de objetos
- Quantização: contagens, área, perímetro, volume
- Visualização 2D, 3D
- Reconhecimento de padrões
- Classificação

```

    graph LR
      A[Segm.] --> B[Reconh. Padrões]
      B --> C[Classif.]
      C --> D[Normal]
      C --> E[Patolog.]
      E --> F[Congen.]
      E --> G[Adquir.]
      E --> H[...]
    
```

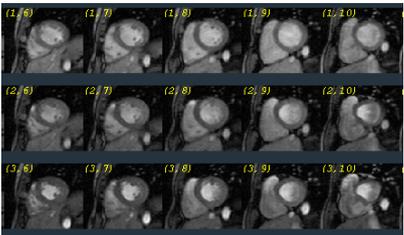
*Segmentação de Imagens* S.Furuié -EPUSP-1

# MOTIVAÇÃO

*Segmentação de Imagens* S.Furuié -EPUSP-2

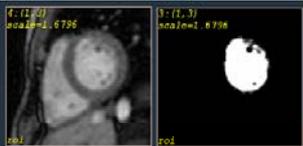
## Motivação

- Processos convencionais (manual e semi-automático) : demorados e cansativos
  - gated MRI : 16 volumes, 12 cortes => 192 img
  - gated SPECT: idem



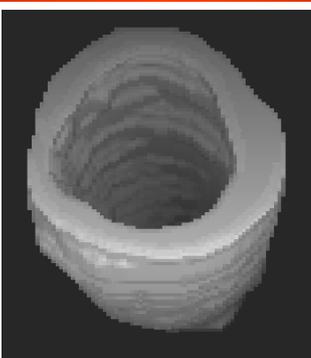
*Segmentação de Imagens* S.Furuié -EPUSP-3

## Resultados em RM

Transv. RM		VE
VD		Mioc.

*Segmentação de Imagens* S.Furuié -EPUSP-4

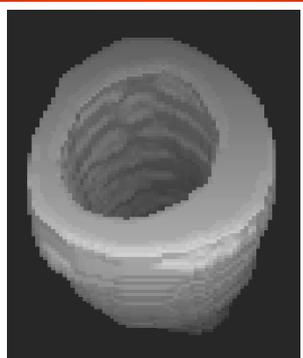
## VE: pre-Ventriculotomia



Diástole

*Segmentação de Imagens* S.Furuié -EPUSP-5

## VE: pre-ventriculotomia



Sístole

*Segmentação de Imagens* S.Furuié -EPUSP-6

# VISÃO GLOBAL

## Visão Global

- ▣ Operadores
- ▣ Representação dos resultados da segmentação
- ▣ Técnicas de segmentação
  - thresholding
  - snakes
  - region-growing
  - split-merge
  - fuzzy connectedness
  - redes neurais
  - métodos estatísticos
- ▣ Interpretação

## Segmentação de Imagens

- ▣ Por descontinuidade
  - operadores (detetores)
    - ponto
    - linha
    - borda (gradiente, laplaciano e LoG)
  - contornos
    - manual
    - semi-automático
    - automático (conexão de bordas, Transf. de Hough)
- ▣ Por similariedade
  - thresholding
  - region-growing
  - split and merge

# FUNDAMENTOS

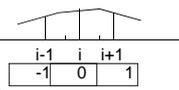
## Gradiente

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} u_x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} u_y$$

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{x=i} = f\left(i + \frac{1}{2}\right) - f\left(i - \frac{1}{2}\right)$$

$$f\left(i + \frac{1}{2}\right) = \frac{f(i) + f(i+1)}{2}$$

$$f\left(i - \frac{1}{2}\right) = \frac{f(i-1) + f(i)}{2}$$

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{x=i} = \frac{f(i+1) - f(i-1)}{2}$$


$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right _{x=i}$	-1	0	1	<b>Sobel</b>	-1	0	1
	-1	0	1		-2	0	2
	-1	0	1		-1	0	1
$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right _{y=i}$	-1	-1	-1		-1	-2	-1
	0	0	0		0	0	0
	1	1	1		1	2	1

## Algoritmo p/ Laplaciano em x?

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{x=i} = f\left(i + \frac{1}{2}\right) - f\left(i - \frac{1}{2}\right)$$

$$f\left(i + \frac{1}{2}\right) = \frac{f(i) + f(i+1)}{2}$$

$$f\left(i - \frac{1}{2}\right) = \frac{f(i-1) + f(i)}{2}$$

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{x=i} = \frac{f(i+1) - f(i-1)}{2}$$

$$\nabla^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}$$

### Sobel, Laplace,...

Sobel  $(f(x, y)) = \sqrt{\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right)^2}$

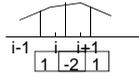
Laplace  $\nabla^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \Big|_i = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2}} - \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{i-\frac{1}{2}}$$

$$= (f(i+1) - f(i)) - (f(i) - f(i-1))$$

$$= f(i-1) - 2f(i) + f(i+1)$$

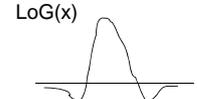
0	1	0
1	-4	1
0	1	0



$H(z) = (z^{-1} - 2 + z)$   
 $H(w) = -2(1 - \cos(wT))$

### Laplaciano da Gaussiana (LoG)

- Edge detector
  - Gauss=>Smooth
  - Laplace=>Zero crossing



$$Gauss(x, y) = \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$g(x, y) = \nabla^2 Gauss(x, y) * f(x, y)$$

## SEGMENTAÇÃO POR INTENSIDADE

### Técnicas: Thresholding

- $T = T[f(x, y), x, y, p(x, y)]$ 
  - de imagem  $f(x, y)$
  - $p(x, y)$ : propriedade local
- Global
- Ótimo:
- local : baseado na região das bordas
- baseado em características: grad. e laplaciano
- multi-banda

$\min_T \text{Erro}(T)$

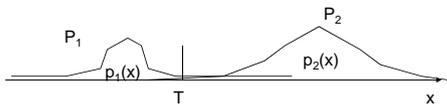
$$\text{Erro}(T) = P_2 \cdot \int_{-\infty}^T p_2(x) dx + P_1 \cdot \int_T^{\infty} p_1(x) dx$$

$$\frac{\partial \text{Erro}(T)}{\partial T} = 0 \Rightarrow P_1 \cdot p_1(T) = P_2 \cdot p_2(T)$$

$p_1(x), p_2(x)$ : se Gaussian

$$T = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} + \frac{\sigma^2}{\mu_1 - \mu_2} \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$$

### Optimal thresholding



$$p(x) = P_1 \cdot p_1(x) + P_2 \cdot p_2(x)$$

$$p_i(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left(-\frac{(x - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right)$$

$$P_1 + P_2 = 1$$

$$\text{Erro} = P_2 \cdot \int_{-\infty}^T p_2(x) \cdot dx + P_1 \cdot \int_T^{\infty} p_1(x) \cdot dx$$

$$\min_T \text{Erro} \Rightarrow \frac{\partial \text{Erro}}{\partial T} = 0$$

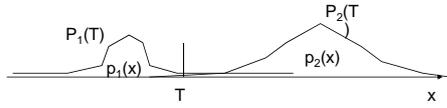
$$\Rightarrow P_1 \cdot p_1(T) = P_2 \cdot p_2(T)$$

$$T = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} + \frac{\sigma^2}{\mu_1 - \mu_2} \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$$

### Técnicas: Thresholding por Otsu

- Global
- Baseado no histograma
- Ótimo para casos discretos (intensidade): maximiza a separabilidade entre classes
- Definição de separabilidade ?

### Otsu



$$S(C_1, C_2) = \frac{\sigma_s^2(C_1, C_2)}{\sigma_0^2}$$

$$\sigma_0^2 = \sum_{i=0}^L (i - m_0)^2 \cdot P(i)$$

$$m_0 = \sum_{i=0}^L i \cdot P(i)$$

$$\sigma_s^2(C_1, C_2) = P_1(m_1 - m_0)^2 + P_2(m_2 - m_0)^2$$

$$m_1 = m_1(T) = \sum_{i=0}^T i \cdot P(i | C_1)$$

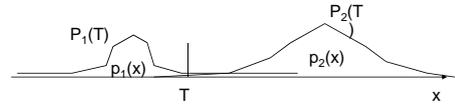
$$m_2 = m_2(T) = \sum_{i=T+1}^L i \cdot P(i | C_2)$$

$$\Rightarrow \max_T \sigma_s^2(C_1, C_2)$$

Segmentação de Imagens

S.Furui - EPUSP-22

### Optimal thresholding: Otsu



$$m_1 = \sum_{i=0}^T i \cdot P(i | C_1) = \sum_{i=0}^T i \cdot \frac{P(C_1 | i) \cdot P(i)}{P(C_1)} = \frac{1}{P_1} \sum_{i=0}^T i \cdot P(i) = \frac{m(T)}{P_1}$$

$$m(T) = \sum_{i=0}^T i \cdot P(i)$$

$$m_2 = \sum_{i=T+1}^L i \cdot P(i | C_2) = \frac{m_0 - m(T)}{P_2}$$

$$\Rightarrow \sigma_s^2(C_1, C_2; T) = \frac{(m_0 P_1(T) - m(T))^2}{P_1(T)(1 - P_1(T))}$$

Segmentação de Imagens

S.Furui - EPUSP-23

### Efeito da filtragem

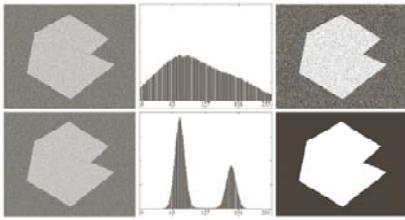


FIGURE 10.40 (a) Noisy image from Fig. 10.36 and (b) its histogram. (c) Result obtained using Otsu's method. (d) Noisy image smoothed using a  $5 \times 5$  averaging mask and (e) its histogram. (f) Result of thresholding using Otsu's method.

Segmentação de Imagens

S.Furui - EPUSP-24

### Efeito da falta de bimodalidade

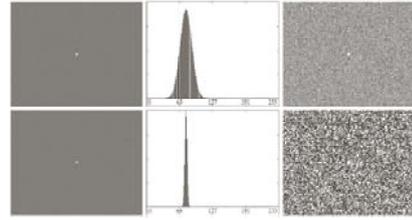


FIGURE 10.41 (a) Noisy image and (b) its histogram. (c) Result obtained using Otsu's method. (d) Noisy image smoothed using a  $5 \times 5$  averaging mask and (e) its histogram. (f) Result of thresholding using Otsu's method. Thresholding failed in both cases.

Segmentação de Imagens

S.Furui - EPUSP-25

### Histograma focado na região da borda (bimodal)

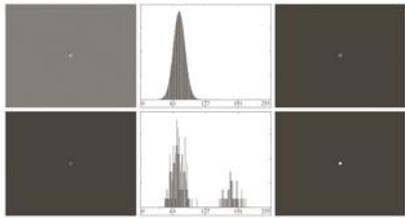


FIGURE 10.42 (a) Noisy image from Fig. 10.31(a) and (b) its histogram. (c) Gradient magnitude image thresholded at the 90.7 percentile. (d) Image formed on the product of (a) and (c). (e) Histogram of the nonzero pixels on the image in (d). (f) Result of segmenting image (a) with the Otsu threshold based on the histogram in (e). The threshold was 134, which is approximately midway between the peaks in this histogram.

Segmentação de Imagens

S.Furui - EPUSP-26

### Histograma focado na região da borda (bimodal)

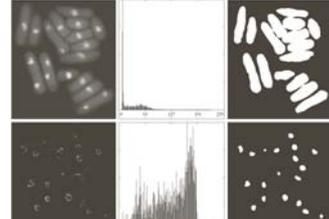


FIGURE 10.43 (a) Image of yeast cells. (b) Histogram of (a). (c) Segmentation of (a) with Otsu's method using the histogram in (b). (d) Thresholded absolute Laplacian. (e) Histogram of the nonzero pixels on the product of (a) and (d). (f) Original image thresholded using Otsu's method based on the histogram in (e). (Original image courtesy of Professor Ronit L. Porringa, University of Southern California.)

Segmentação de Imagens

S.Furui - EPUSP-27

### Mais do que 2 classes: generalização da separabilidade

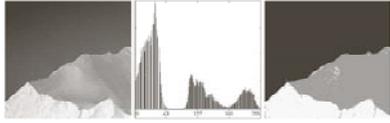


FIGURE 10.45 (a) Image of iceberg. (b) Histogram. (c) Image segmented into three regions using dual Otsu threshold. (Original image courtesy of NOAA.)

### Otsu em subimagens

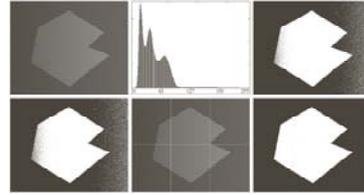


FIGURE 10.46 (a) Noisy shaded image and (b) its histogram. (c) Segmentation of (a) using the iterative global algorithm from Section 10.3.2. (d) Result obtained using Otsu's method. (e) Image subdivided into six subimages. (f) Result of applying Otsu's method to each subimage individually.

### Otsu em subimagens

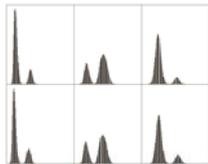
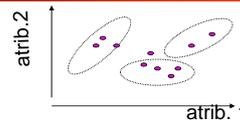


FIGURE 10.47 Histograms of the six subimages in Fig. 10.46(c).

### Isodata (k-means)



- 0) K classes com centro em  $c_j$
- 1) Inicializar  $c_j^{(0)}$
- 2) Para cada  $x_i \Rightarrow$  atribuir  $x_i$  p / classe  $j$  com menor distancia
- 3) Recalcular  $c_j$
- 4) Repetir 2) e 3) ate nao haver mais alter.

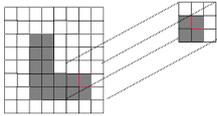
## SEGMENTAÇÃO POR REGIÃO

### Segmentação por região

- ▣ Região: Region-growing
  - conectividade, afinidade, tamanho, forma, possibilidade
  - semente
  - para cada vizinho, agregar o mesmo se similar. Se agregado, considerar os vizinhos deste.
- ▣ Região: Split and Merge
  - quadtree, octree
  - testar homogeneidade de cada quadrante
    - se não homogêneo, subdividir e continuar até último quadrante
  - merge de quadrantes vizinhos com homogeneidades similares.

## Região: Region-growing

- conectividade, afinidade, tamanho, forma, possibilidade
  - semente
  - para cada vizinho não visitado, agregar o mesmo se similar. Se agregado, considerar os vizinhos deste ( usar fila)



- extensão p/ tons de cinza e 3D

Segmentação de Imagens

S.Furuiê -EPUSP-34

## Região: Split and Merge

- quadtree, octree
  - testar homogeneidade de cada quadrante
    - se não homogêneo, subdividir e continuar até último quadrante
  - merge de quadrantes vizinhos com homogeneidades similares.

Segmentação de Imagens

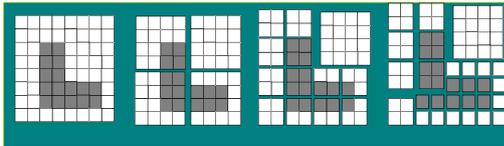
S.Furuiê -EPUSP-35

## Split and Merge

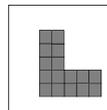
### Split

- Quadtrees:  $2^n$

Palavra-chave: similaridade



- Merge (p. ex. labeling)
- Estender p/ tons de cinza
- Estender p/ 3D



Segmentação de Imagens

S.Furuiê -EPUSP-36

## SEGMENTAÇÃO POR REGIÃO (CONECTIVIDADE FUZZY)

Segmentação de Imagens

S.Furuiê -EPUSP-37

## Segmentação de estruturas 3D dinâmicas

### Motivação

- medida e visualização de estruturas do mundo real
- estruturas dinâmicas
- coração, VE, miocárdio, ...
- parâmetros: FE, volume, área, ...

### Dificuldades

- elevado volume de dados:  
16 vol. X 12 slices X 256 X 256  
=> 192 slices
- estruturas complexas : forma, superposição, diversas intersecções com um plano, não-homogeneidade, especificidade, ...

Segmentação de Imagens

S.Furuiê -EPUSP-38

## PROBLEMA e PROPOSTA

### PROBLEMA

- Segmentação de estruturas 3D, 4D
- Estruturas complexas

### PROPOSTA

- conectividade fuzzy considerando múltiplas imagens de um objeto

### RAZÕES INTUITIVAS

- estruturas de interesse tem voxels conectados (fuzzy) pelo menos em alguma dimensão
- conectividade baseado em afinidade entre voxels
- fácil expansão p/ 3D, 4D

Segmentação de Imagens

S.Furuiê -EPUSP-39

## Fuzzy Connectedness entre 2 vox.

- ☞ Considera adjacência e afinidade entre dois voxels
- ☞ Dados 2 voxels "i" e "j" com valores (vetorial)  $v(i)$ ,  $v(j)$ 
  - $fc(i,j)=\max\{f(i,j)\}$
  - $f(i,j)=g(\text{adj}(i,j), v(i), v(j), i, j)$
  - adj : adjacência (fuzzy)
  - $f(i,j)=\text{adj}(i,j) \cdot \text{affin}(v(i), v(j), i, j)$
  - affin: afinidade (fuzzy)

Segmentação de Imagens

S.Furuiê -EPUSP-40

## Fuzzyness

- ☞ fuzzy sets, membership
  - Domínio X
  - Fuzzy Set= $\{ (x, f(x)) \mid x \in X \}$
  - $f : X \Rightarrow [0,1]$  (membership)
- ☞ fuzzy relation
  - $i \in X, j \in X$
  - relation= $\{(i,j), r(i,j)\}$
  - $r : X \times X \Rightarrow [0,1]$

Segmentação de Imagens

S.Furuiê -EPUSP-41

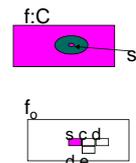
- ☞ fuzzy relation
  - connectedness
  - adjacency
  - affinity
- ☞ Proposta
  - $\text{adj}(i,j)=1$  (se 1-adjacent)  
=0
  - $\text{affin}(i,j)=\exp(-0.5d^{**2})$   
 $d^{**2}$  : dist. estatística
  - programação dinâmica  
queue

Segmentação de Imagens

S.Furuiê -EPUSP-42

## Conectividade Fuzzy

- ☞ Algorithm: Fuzzy Object Extraction
  - Input: imagem (C,f) e seed **s**
  - Output: imagem ( $C_o, f_o$ )
  - Auxiliares: queue Q
    0. Set  $f_o(i)=0$ ,  $i \neq s$  e  $f_o(s)=1$
    1. Push all spels **c** of  $C_o \mid \text{affin}(s,c)>0$  to Q
    2. While Q is not empty do
      - 2.1. Remove a spel **c** from Q
      - 2.2. find  $f_{\max}=\max_d [\min(f_o(d), \text{affin}(c,d))]$
      - 2.3. if  $f_{\max}> f_o(c)$  then
        - set  $f_o(c) = f_{\max}$
        - push all spels **e**  $\mid \text{affin}(c,e)>0$  to Q
        - endif
      - 2.4. endwhile

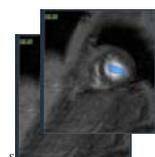


Segmentação de Imagens

S.Furuiê -EPUSP-43

## Hipóteses

- ☞ Possibilidade de treinar o classificador através de uma amostra do objeto com características aproximadamente homogêneas.
- ☞ Os parâmetros estimados, através de um corte (treinamento), são válidos para todo o objeto;

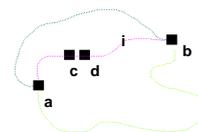


Segmentação de Imagens

S.Furuiê -EPUSP-52

## Metodologia

- ☞ Cálculo do *vínculo* de cada voxel a cada objeto de interesse
  - Vínculo entre dois voxels depende da afinidade e da conectividade espacial em todos os caminhos possíveis



$$V(a,b) = \max_i \{ v(a,b \mid i) \}$$

$$v(a,b \mid i) = \min \{ \text{afin}(c,d) \}$$

Segmentação de Imagens

S.Furuiê -EPUSP-53

## Metodologia

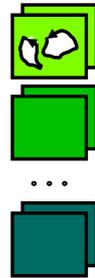
- Afinidade é baseado no vetor de atributos e adjacência  
 $\text{afin}(c,d) = h[ \text{adj}(c,d), f(c), f(d), c, d ]$   
 $f(x)$ : vetor de atributos sobre o voxel  $x$
- $\text{afin}(c,d) = \text{adj}(c,d) \cdot h[ f(c), f(d) ]$
- $h(\cdot)$  = grau de similaridade dos atributos ao objeto
- programação dinâmica

Segmentação de Imagens

S.Furuiê -EPUSP-54

## associação 'fuzzy'

função de associação : verossimilhança



$$h_j: R^M \rightarrow [0,1]$$

$$h_j(x) = \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot d_j^2(x)\right)$$

$$d_j^2(x) = (x - \bar{x}_j)^T \cdot S_j^{-1} \cdot (x - \bar{x}_j)$$

Segmentação de Imagens

S.Furuiê -EPUSP-55

## Algoritmo

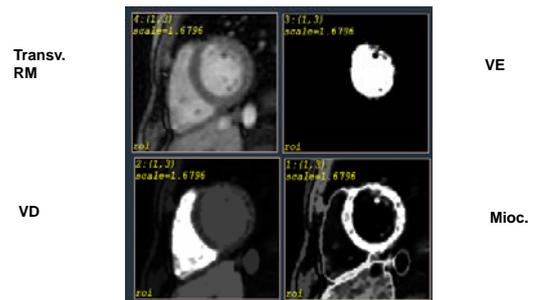
O algoritmo, para um dado objeto de interesse, consiste portanto em:

- Estimar os parâmetros estatísticos (média e covariância) do cluster correspondente ao objeto através dos voxels de uma região fornecida pelo usuário;
- Calcular a matriz de covariância inversa;
- Obter o vínculo de cada voxel a cada objeto
  - Para cada voxel, calcular a associação ao objeto
  - Calcular afinidade
  - Obter o vínculo (Programação dinâmica)

Segmentação de Imagens

S.Furuiê -EPUSP-56

## Resultados em RM

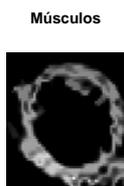


Segmentação de Imagens

S.Furuiê -EPUSP-57

## Competição

Imagem com a associação aos objetos VE e Mioc.

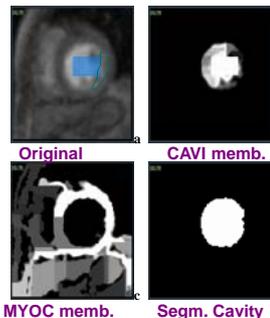


if (  $f_{VE}(x) > f_{MIOC}(x)$  )  
 then  $f_{VE}(x)=1$   
 else  $f_{VE}(x)=0$

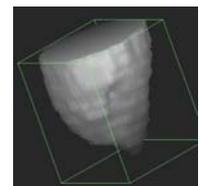
Segmentação de Imagens

S.Furuiê -EPUSP-58

## Cavity Segmentation: results



Proc. time (1 vol.)=21 s  
 Ultra Sparc 1/140



Segmentação de Imagens

S.Furuiê -EPUSP-59

## Vantagens/Desvantagens

- + treinamento baseado na imagem
  - Independência da escala, equipamento,...
- + método inerentemente 3D, 4D
- + incorpora conectividade espacial e afinidade considerando múltiplos atributos
- lento
- assume distribuição normal multivariada para os atributos

Segmentação de Imagens

S.Furuiê -EPUSP-65

## SEGMENTAÇÃO POR CONTORNOS: SNAKES

Segmentação de Imagens

S.Furuiê -EPUSP-68

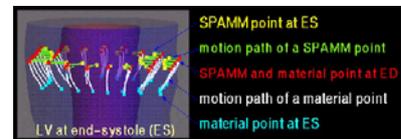
## Segmentação de estruturas médicas baseado em contornos ativos e elementos finitos

Segmentação de Imagens

S.Furuiê -EPUSP-69

## Tema: Modelos deformáveis

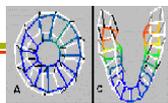
- Importância
  - motivação
  - aplicações
- Revisão de métodos 2D/3D
  - fundamentos/metodologia
  - vantagens/desvantagens
- Conclusões



Segmentação de Imagens

S.Furuiê -EPUSP-70

## Motivação



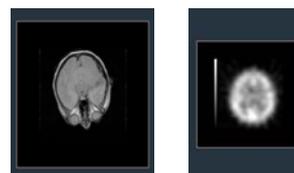
- Avaliação funcional dos músculos cardíacos
  - Global
    - variação do volume/área/energia cinética
  - Regional
    - pela movimentação regional do endocárdio
    - pelo encurtamento da parede do miocárdio
      - espessura do miocárdio
  - Local
    - pela trajetória de pontos do músculo (tracking)
    - pela velocidade dos pontos do músculo

Segmentação de Imagens

S.Furuiê -EPUSP-71

## Aplicações

- Quantificação da avaliação cardíaca
- Visualização da deformação (fisiologia) local
- Alinhamento e fusão de imagens
- Interpolação



Segmentação de Imagens

S.Furuiê -EPUSP-72

## Segmentação de estr. deform.

- Baseados na intensidade do pixel/voxel
  - optical flow, region-growing, conectividade,...
  - ad hoc
- Baseados em contornos/superfícies
  - Snakes
  - Balloon
  - Topological snakes
- Baseados em marcas fiduciais (int. e ext.)
  - MR tagging

Segmentação de Imagens

S.Furuiê -EPUSP-73

## Snakes

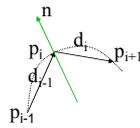
- Objetivo: segmentação (obtenção de contornos e superfícies)
- Dado: imagem (intensidades) e solução inicial
  - obter uma função de energia (interna + externa) em função parametrizada
  - minimizar em relação ao contorno
    - analiticamente
    - numericamente: steepest descent, CG, ...

Segmentação de Imagens

S.Furuiê -EPUSP-74

## Snakes: equilíbrio de forças

- 1) P/ cada vértice do contorno inicial, obter:
  - forças internas (curvatura, ...)
  - forças externas (gradiente ..)
- 2) Determinação iterativa da velocidade e posição



$$\begin{aligned} \bar{a}_i^{(k+1)} &= \frac{1}{m_i} \cdot \bar{f}_i^{(k+1)} \\ \bar{v}_i^{(k+1)} &= \bar{v}_i^{(k)} + \bar{a}_i^{(k+1)} \cdot \Delta t \\ \bar{p}_i^{(k+1)} &= \bar{p}_i^{(k)} + \bar{v}_i^{(k+1)} \cdot \Delta t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{curv} &= \frac{\bar{d}_i - \bar{d}_{i-1}}{\|\bar{d}_i - \bar{d}_{i-1}\|} \\ f_{\text{int}} &= (\text{curv} \otimes \text{filtro})_{\text{radial}} \\ f_{\text{ext}} &= (-\nabla I)_{\text{radial}} \end{aligned}$$

Segmentação de Imagens

S.Furuiê -EPUSP-75

## Snakes: fundamento

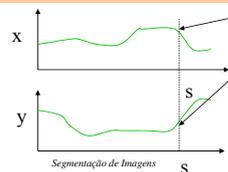
$c(s)$ : config

$$E(c) = E_I(c) + E_E(c)$$

$$E(c) = \int_c [w_1 \left| \frac{\partial c}{\partial s} \right|^2 + w_2 \left| \frac{\partial^2 c}{\partial s^2} \right|^2] ds + \int_c w_3 \cdot P(c) \cdot ds$$

$$\min_c E(c)$$

$$c(s) = (x(s), y(s))$$



Segmentação de Imagens

S.Furuiê -EPUSP-76

$$\min_c E(c)$$

$$E(c) = \int_c F(s; c, c', c'') \cdot ds$$

$$c(s), c', c''$$

$$F(s; c(s), c'(s), c''(s))$$

$$F(s; c + \epsilon v(s), c' + \epsilon v', c'' + \epsilon v'') = F(s; c, c', c'') + \epsilon v \cdot \frac{\partial F}{\partial c} + \epsilon v' \cdot \frac{\partial F}{\partial c'} + \epsilon v'' \cdot \frac{\partial F}{\partial c''} + \dots$$

$$\min_c E \Rightarrow \frac{\partial E}{\partial \epsilon} = 0 \Rightarrow \text{Euler-Lagrang}$$

$$\frac{\partial F}{\partial c} - \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial F}{\partial c'} \right) + \frac{d^2}{ds^2} \left( \frac{\partial F}{\partial c''} \right) = 0$$

Segmentação de Imagens

S.Furuiê -EPUSP-77

## Definição adequada da Energia

- Elasticidade (suavidade do contorno)
- Rigidez (curvaturas)
- Informações de borda

$c(s)$ : config

$$E(c) = E_I(c) + E_E(c)$$

$$E(c) = \int_c [w_1 \left| \frac{\partial c}{\partial s} \right|^2 + w_2 \left| \frac{\partial^2 c}{\partial s^2} \right|^2] ds + \int_c w_3 \cdot P(c) \cdot ds$$

$$P(c(s)) = -\|\nabla(G_\rho * \text{Im})\|$$

Segmentação de Imagens

S.Furuiê -EPUSP-78

### Solução da minimização

Equilíbrio

$$E(c) = \int_c [w_1 |c'(s)|^2 + w_2 |c''(s)|^2] ds + \int_c w_3 \cdot P(c) \cdot ds$$

Euler - Lagrange =>

$$-\frac{d}{ds} (w_1 \cdot \frac{dc}{ds}) + \frac{d^2}{ds^2} (w_2 \cdot \frac{d^2c}{ds^2}) + \nabla P(c) = 0$$

Dinâmica

$$\frac{dc}{dt} - \frac{d}{ds} (w_1 \cdot \frac{dc}{ds}) + \frac{d^2}{ds^2} (w_2 \cdot \frac{d^2c}{ds^2}) + \nabla P(c) = 0$$

Segmentação de Imagens

S.Furuiê -EPUSP- 79

### Implementação: difer.finitas

$$-w_1 \cdot c'' + w_2 \cdot c'''' = -\nabla P(c)$$

$$c(i) = \begin{bmatrix} x(i) \\ y(i) \end{bmatrix}$$

$$x'(i) = \frac{x(i+1) - x(i)}{h}$$

$$x''(i) = \frac{x(i-1) - 2x(i) + x(i+1)}{h^2}$$

$$x''''(i) = (x''(i))''$$

...

$$-w_1 \cdot \frac{x(i-1) - 2x(i) + x(i+1)}{h^2} + w_2 \cdot [a_4 \cdot x(i-2) + \dots + a_5 \cdot x(i+2)] = -\nabla P(i)$$

Para cada ponto i do contorno em equilíbrio

Segmentação de Imagens

S.Furuiê -EPUSP- 80

### Diferenças finitas

$$0 + 0 + \dots + b_1 \cdot x(i-2) + b_2 \cdot x(i-1) + \dots + b_5 \cdot x(i+2) = -\nabla P(i)$$

$$\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & 0 \\ 0 & b_1 & \dots & \\ 0 & & b_2 & \\ 0 & & b_1 & b_2 \\ 0 & & & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(1) \\ x(2) \\ \dots \\ x(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla P(1) \\ -\nabla P(2) \\ \dots \\ -\nabla P(n) \end{bmatrix}$$

$$A \cdot \vec{X} = \vec{f}(\vec{X})$$

Sistema de equações com dependência implícita

• Métodos numéricos iterativos

Segmentação de Imagens

S.Furuiê -EPUSP- 81

### Modo dinâmico

$$\frac{dc}{dt} - \frac{d}{ds} (w_1 \cdot \frac{dc}{ds}) + \frac{d^2}{ds^2} (w_2 \cdot \frac{d^2c}{ds^2}) + \nabla P(c) = 0$$

$$\frac{dX}{dt} + A \cdot \vec{X} = \vec{f}(\vec{X})$$

$$\frac{X^t - X^{t-1}}{\Delta t} + A \cdot X^{t-1} = f(X^{t-1})$$

$$X^t = (I - \Delta t \cdot A) \cdot X^{t-1} + \Delta t \cdot f(X^{t-1})$$

Solução iterativa até atingir o equilíbrio

Segmentação de Imagens

S.Furuiê -EPUSP- 82

### Snakes: Vantagens/ desvantagens

- + Emula modelo físico. Imagens são apenas representações de modelos físicos.
- Processos reais são complexos p/ modelar
- Constantes desconhecidas
- Pesos relativos ?
- Apenas segmentação e alinhamento. Tracking exige modelagem mais precisa.

Segmentação de Imagens

S.Furuiê -EPUSP- 83

## SEGMENTAÇÃO POR CONTORNOS: LEVEL SET

Segmentação de Imagens

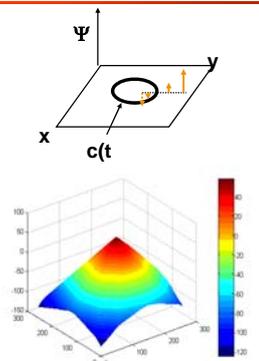
S.Furuiê -EPUSP- 90

#### 4 LEVEL SET FUNCTIONS

$$\Psi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\Psi(c(t), t) = 0$$

Signed distance transform



Segmentação de Imagens

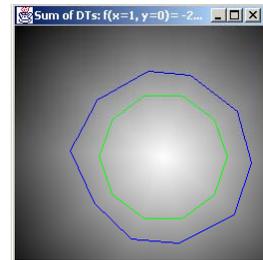
S.Furuiê -EPUSP- 92

#### 6 Cost function: similarity

##### Similarity

- pointwise curvatures of level set  $\Psi_K$
- Gaussian curvature

$$\Psi_K(r) = \Psi_S(r) + \Psi_D(r)$$



Level set  $\Psi_K$  used for curvature estimation.

Segmentação de Imagens

S.Furuiê -EPUSP- 93

#### Motivação

- Metodologia para segmentação de imagens
  - n-dimensional
  - contornos complexos
- Descrição dos objetos identificados
- Análise e visualização



S.Furuiê -EPUSP- 94

#### Snakes

- Não possibilita intersecção de contornos
- 2D
- Dependente da modelagem das forças/velocidades
- Dependente de pesos dos termos da função

Segmentação de Imagens

S.Furuiê -EPUSP- 95

#### Descrição

- Baseado em modelos físicos de propagação de interfaces e modelos deformáveis
  - fluido
  - chamas
  - crescimento de cristais
- Solução de PDE do tipo Hamilton-Jacobi

##### PARA MAIS INFORMAÇÕES:

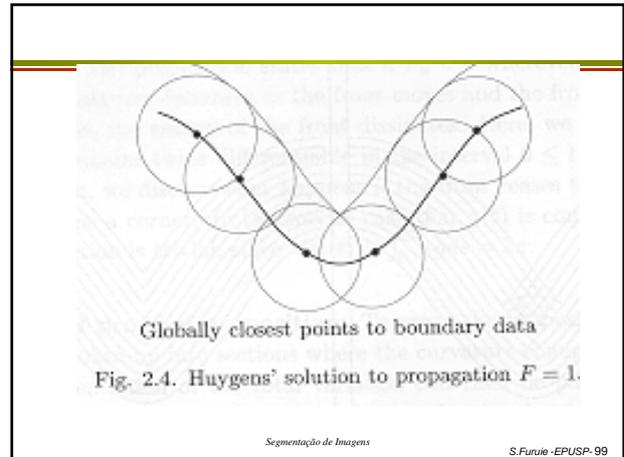
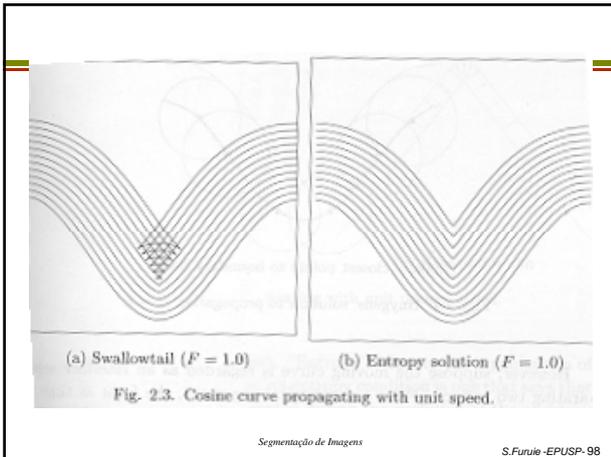
Shape modeling with front propagation: a level set approach  
R Malladi, JA Sethian, BC Venturi. IEEE PAMI 17(2):158-175, feb1995

S.Furuiê -EPUSP- 96

#### Vantagens

- Sem suposições a priori de topologias
- Suporta formas complexas e nDimensionais
- Pontos fracos
  - modelagem da velocidade de propagação
  - condições de parada

S.Furuiê -EPUSP- 97



### Metodologia

- ▣ Dado um contorno
- ▣ Gerar uma hipersuperfície
- ▣ No qual o contorno é solução

$$\gamma(t) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^N$$

$$\Psi(\bar{x}, t) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\gamma(t) = (\bar{x} \mid \Psi(\bar{x}, t) = 0)$$

S.Furuié -EPUSP-100

### Exemplo de hipersuperfície

Segmentação de Imagens      S.Furuié -EPUSP-101

### Metodologia: level set

$$\gamma(t) = (\bar{x} \mid \Psi(\bar{x}, t) = 0)$$

$$\Psi(\bar{x}, t) = 0$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \dots = 0$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \bar{\nabla} \Psi \cdot \frac{d\bar{x}}{dt} = 0$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + |\bar{\nabla} \Psi| \left( \bar{n} \cdot \frac{d\bar{x}}{dt} \right) = 0$$

- ▣ Diferenciando...
- ▣ Notando que gradiente é normal ao contorno
- ▣ PDE do tipo Hamilton-Jacobi
- ▣ Condição inicial

S.Furuié -EPUSP-102

### Modelagem da velocidade

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + |\bar{\nabla} \Psi| \left( \bar{n} \cdot \frac{d\bar{x}}{dt} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + |\bar{\nabla} \Psi| F = 0$$

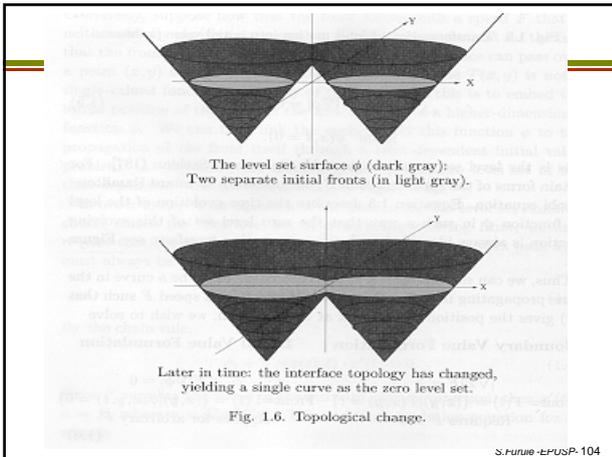
$$\bar{n} = \frac{\bar{\nabla} \Psi}{|\bar{\nabla} \Psi|}$$

$$K = \nabla \cdot \bar{n}$$

$$F = g \cdot (F_0 + F(K))$$

$$g = \frac{1}{1 + |\nabla G_{\sigma} * I(x, y)|}$$

Segmentação de Imagens      S.Furuié -EPUSP-103



### Discretização

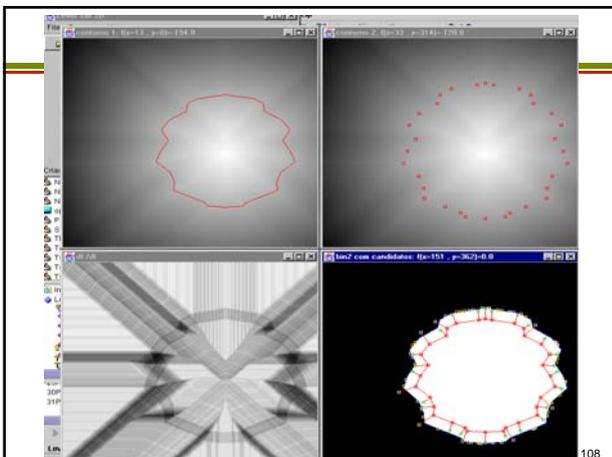
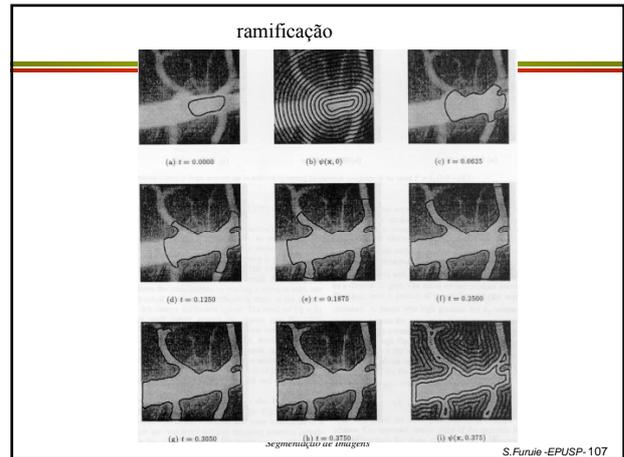
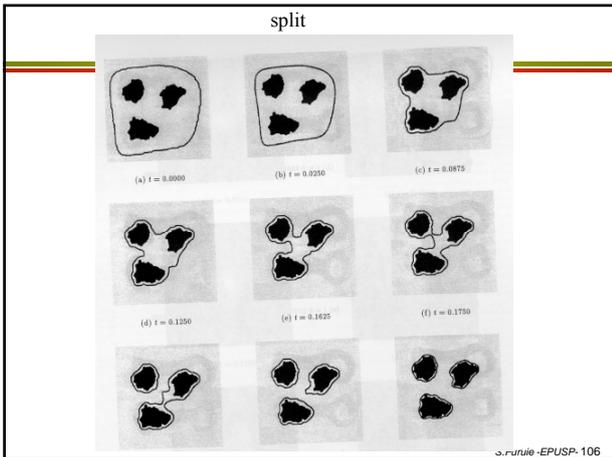
$$\Psi_{i,j}^{m+1} = \Psi_{i,j}^m - \Delta T \cdot |\bar{\nabla} \Psi_{i,j}^m| \cdot F_{i,j}$$

$$(x(s), y(s))$$

$$\bar{n} = (y_s, -x_s) / \sqrt{(x_s^2 + y_s^2)}$$

$$K = \frac{y_{ss} \cdot x_s - x_{ss} \cdot y_s}{\sqrt{(x_s^2 + y_s^2)^3}}$$

Segmentação de Imagens S.Furuié -EPUSP-105



### Outras Aplicações

- Restauração de imagens
- Evolução de contornos
- Propagação de combustão, fluidos, sismologia, crescimento de cristais, ...
- Difusão, deposição de materiais, ...

S.Furuié -EPUSP-109