Física I p/ IO – FEP111 (4300111)

2º Semestre de 2010

Instituto de Física
Universidade de São Paulo

Professor: **Antonio Domingues dos Santos**

E-mail: adsantos@if.usp.br

Fone: 3091.6886

14 e 19 de outubro

Colisões Unidimensionais

Considere um sistema com dois corpos que se movem sobre uma linha reta. Como as forças de interação entre os corpos são internas, a Quantidade de Movimento do sistema se conserva.

Seja um corpo de massa m_1 com velocidade v_{1i}, que se aproxima de outro com massa m_2 e velocidade v_{2i}, com $v_{2i} < v_{1i}$. A conservação da Quantidade de Movimento nos fornece:

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

Para determinar v_{1f} e v_{2f}, necessitamos outra equação.

1° caso: Colisões perfeitamente inelásticas

Neste caso, as velocidades depois da colisão serão iguais.

$$v_{1f} = v_{2f} = v_{cm}$$

$$(m_1 + m_2) v_{cm} = m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}$$

$$v_{cm} = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}$$

Relação entre Energia Cinética e Momento

Considere um corpo de massa m que se move com velocidade v.

A sua Quantidade de Movimento é

$$p = mv$$

Enquanto, a sua Energia Cinética é

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$K = \frac{m^2v^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}$$

Se um corpo colide inelasticamente com um segundo corpo em repouso, temos :

Energia Cinética inicial: $K_i = \frac{P_{sis}^2}{2m_1}$ **, com** $p_{1i} = m_1 v_{1i} = P_{sis}$

Considerando a conservação do momento, a Energia Cinética final é:

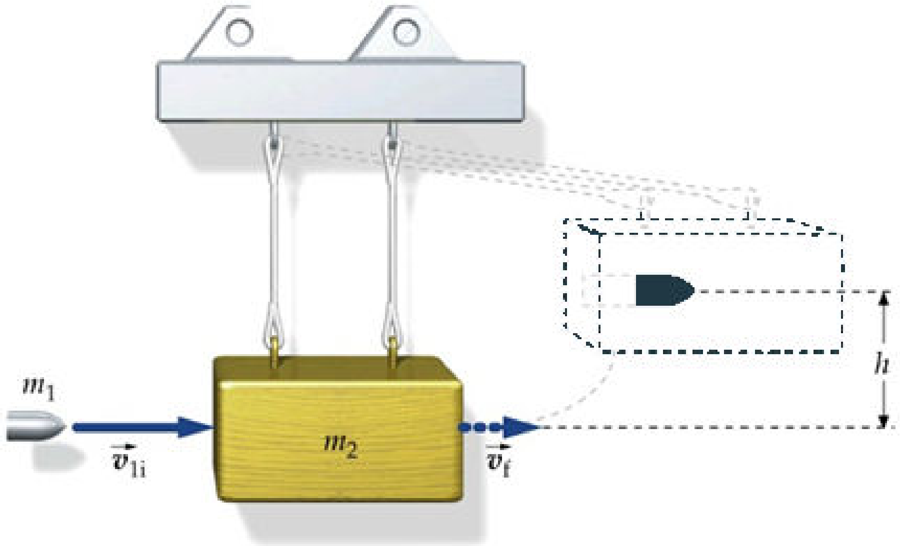
$$K_f = \frac{P_{sis}^2}{2(m_1 + m_2)}$$

Portanto, houve redução da Energia Cinética

Exemplo

Pêndulo Balístico

Um projétil é atirado em um bloco de madeira dependurado. O bloco com o projétil , oscila subindo. Considerando a altura máxima atingida, determine a velocidade do projétil.



Usando a conservação do momento durante a colisão, temos:

$$m_1 v_{1i} = (m_1 + m_2) v_f$$

$$v_{1i} = \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} v_f$$

$$v_f = \sqrt{2gh}$$

Usando a conservação da Energia Mecânica após a colisão, temos:

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_f^2 = (m_1 + m_2) gh$$

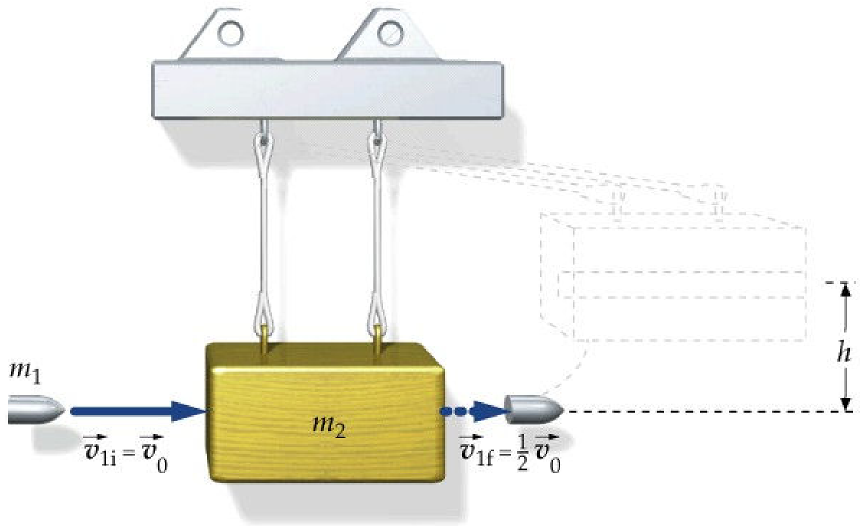
Portanto:

$$v_{1i} = \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} \sqrt{2gh}$$

Exemplo

Pêndulo Balístico

Como no problema anterior, porém supondo que o projétil atravessou a madeira, perdendo metade de sua velocidade inical. Determine a altura h, alcançada pelo bloco.



Usando a conservação do momento durante a colisão, temos:

$$m_1 v_{1i} = m_2 v_2 + m_1 \frac{v_{1i}}{2}$$

Usando a conservação da Energia Mecânica após a colisão, temos:

$$\frac{1}{2} m_2 v_2^2 = m_2 g h$$

$$v_2 = \frac{m_1}{m_2} \frac{v_{1i}}{2}$$

$$h = \frac{v_2^2}{2g}$$

Portanto:

$$h = \frac{m_1^2 v_{1i}^2}{8 m_2^2 g}$$

2° caso: Colisões Elásticas

Em colisões elásticas, além da Quantidade de Movimento, também a Energia Cinética do sistema, se conserva.

Seja um corpo de massa m_1 com velocidade v_{1i}, que se aproxima de outro com massa m_2 e velocidade v_{2i}, com $v_{2i} < v_{1i}$.

A conservação da Quantidade de Movimento nos fornece:

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

Da conservação da Energia Cinética, temos:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

$$\boxed{v_{1i} - v_{2i} = v_{2f} - v_{1f}}$$

Em colisões elásticas, a rapidez de separação é igual à rapidez de aproximação.

Exemplo

Um bloco de 4,0 kg, move-se para a direita a 6,0 m/s e sofre uma colisão elástica frontal com um bloco de 2,0 kg que se move para a direita a 3,0 m/s. Encontre as velocidades finais dos blocos.

A conservação da Quantidade de Movimento nos fornece:

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

$$(4{,}0)(6{,}0) + (2{,}0)(3{,}0) = (4{,}0) v_{1f} + (2{,}0) v_{2f}$$

E, temos também:

$$\boxed{v_{1i} - v_{2i} = v_{2f} - v_{1f}}$$

$$(6{,}0) - (3{,}0) = v_{2f} - v_{1f}$$

$$2v_{1f} + v_{2f} = 15 m/s$$

$$v_{2f} - v_{1f} = 3 m/s$$

$$v_{1f} = 4{,}0 m/s$$

$$v_{2f} = 7{,}0 m/s$$

Colisões Elásticas

Em colisões elásticas, além da Quantidade de Movimento, também a Energia Cinética do sistema, se conserva.

Na colisão entre dois corpos, estando 1 em repouso,

a conservação da Quantidade de Movimento nos fornece:

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

E, temos também:

$$v_{1i} = v_{2f} - v_{1f}$$

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

Verificar o que acontece se $m_1 = m_2$, $m_1 >> m_2$ e $m_1 << m_2$.

Colisões Bi e Tridimensionais

Deve-se trabalhar vetorialmente e a conservação da Quantidade de Movimento se aplica a cada uma das componentes (x, y e z).

Colisão inelástica

$$m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} = (m_1 + m_2)\vec{v}_f$$

onde:

$$\vec{v}_f = \vec{v}_{cm}$$

Exemplo

Um corpo de massa m_1, com rapidez de 20 m/s colide com um segundo corpo de massa $m_2=2m_1$. O segundo corpo está inicialmente em repouso. Depois da colisão o primeiro corpo está se movendo a 15 m/s a um ângulo de 25° com a orientação da sua velocidade inicial. Qual é a orientação de afastamento do segundo corpo? Qual é a velocidade de escape do segundo corpo? A energia cinética se conservou?

$$m_1\vec{v}_{1i} = +m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f}$$

Para as componentes temos:

$$\begin{cases} m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f}\cos\theta_1 + m_2 v_{2f}\cos\theta_2 \\ 0 = m_1 v_{1f} sen\,\theta_1 + m_2 v_{2f} sen\,\theta_2 \end{cases}$$

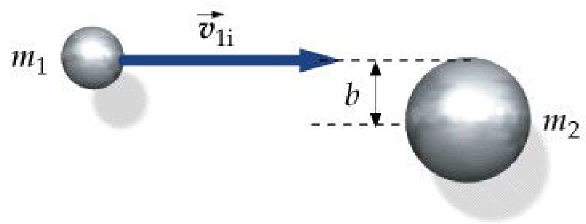
e $\quad m_2 = 2m_1$

Colisões Bi e Tridimensionais

Deve-se trabalhar vetorialmente e a conservação da Quantidade de Movimento se aplica a cada uma das componentes (x, y e z).

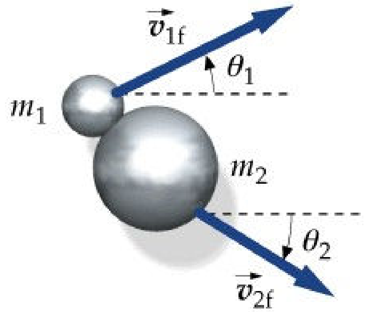
Colisão elástica (este é o caso mais complicado!)

$$m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} = m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f}$$



Para as componentes temos:

$$\begin{cases} m_1 v_{1ix} + m_2 v_{2ix} = m_1 v_{1fx} + m_2 v_{2fx} \\ m_1 v_{1iy} + m_2 v_{2iy} = m_1 v_{1fy} + m_2 v_{2fy} \end{cases}$$



e temos também a conservação da Energia Cinética

$$\frac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2f}^2$$

Em geral, fica faltando uma equação para se resolver o sistema. Alguma condição específica deve ser fornecida, como por exemplo o parâmetro de impacto b.

Massa Continuamente Variável

$$\vec{F}_{res} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

definição de Newton para a sua segunda lei.

$$\vec{F}_{res} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}\vec{v}$$

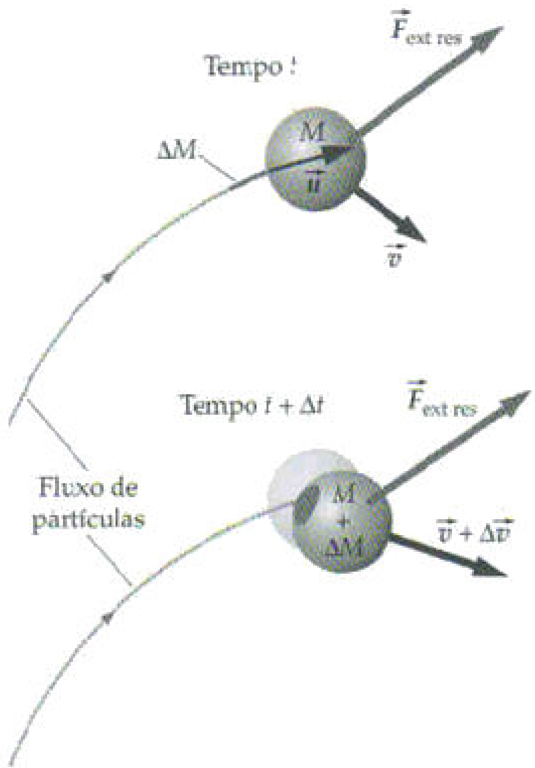
$$\vec{F}_{res} - \frac{dm}{dt}\vec{v} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

Empuxo

A taxa de variação da massa, multiplicada pela velocidade da massa variante, tem dimensão de Força e recebe o nome de Empuxo.

Massa Continuamente Variável

Considere um corpo de massa M se movendo com velocidade v e sendo bombardeado por um fluxo contínuo de matéria, com velocidade u.



Aplicando-se o teorema do Impulso ao sistema, temos:

$$\vec{F}_{res}\Delta t = \Delta\vec{P} = \vec{P}_f - \vec{P}_i =$$

$$= [(M+\Delta M)(\vec{v}+\Delta\vec{v}) + \Delta M\,\Delta\vec{v}] - [M\vec{v} + \Delta M\vec{u}]$$

Rearranjando os termos, temos:

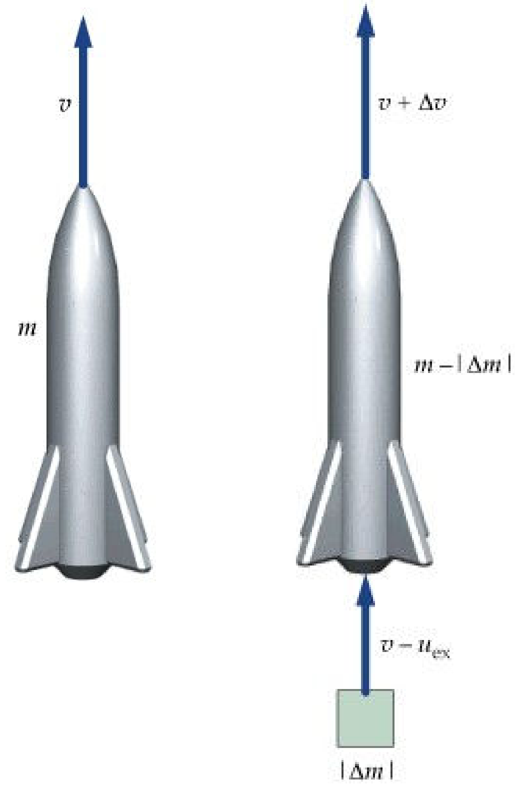
$$\vec{F}_{res}\Delta t = M\Delta\vec{v} + \Delta M(\vec{v}-\vec{u}) + \Delta M\Delta\vec{v}$$

e, dividindo por Δt e aplicando o limite $\Delta t \rightarrow 0$, temos:

$$\vec{F}_{res} = M\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dM}{dt}(\vec{v}-\vec{u}) + \cancelto{0}{\frac{dM}{dt}\Delta\vec{v}} \quad \Longrightarrow \quad \vec{v}-\vec{u} = \vec{v}_{rel}$$

Exemplo

Considere um foguete com a massa (M) variando continuamente, à medida que ele queima o combustível. Suponha que o foguete esteja subindo na vertical com velocidade v e que a taxa de queima de combustível seja R



$$M = M_0 - Rt \qquad R = \frac{dM}{dt}$$

Considere que os gases escapem com velocidade u_e em relação ao foguete e que a única força externa seja a gravitacional. Considere como sistema o conjunto foguete + combustível restante.

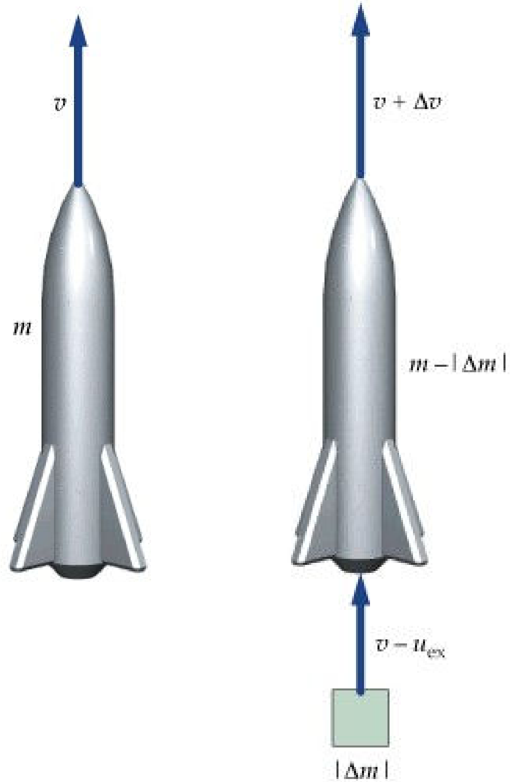
$$M\vec{g} - R\vec{u}_e = M\frac{d\vec{v}}{dt} \Longrightarrow -Mg + Ru_e = M\frac{dv_y}{dt}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{Ru_e}{M_0 - Rt} - g$$

Exemplo

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{Ru_e}{M_0 - Rt} - g$$

Integrando, temos:



$$v_y = \int_0^t \left(\frac{Ru_e}{M_0 - Rt} - g\right) dt$$

$$\int_0^t \frac{Ru_e}{M_0 - Rt} dt = u_e \int_0^t \frac{1}{M_0 / R - t} dt$$

$$\int_0^t \frac{1}{b - t} dt = -\ln \frac{b - t}{b}$$

$$v_y = u_e \ln\left(\frac{M_0}{M_0 - Rt}\right) - gt$$