

# Física I p/ IO – FEP111 (4300111)

2º Semestre de 2010

Instituto de Física  
Universidade de São Paulo

Professor: **Antonio Domingues dos Santos**

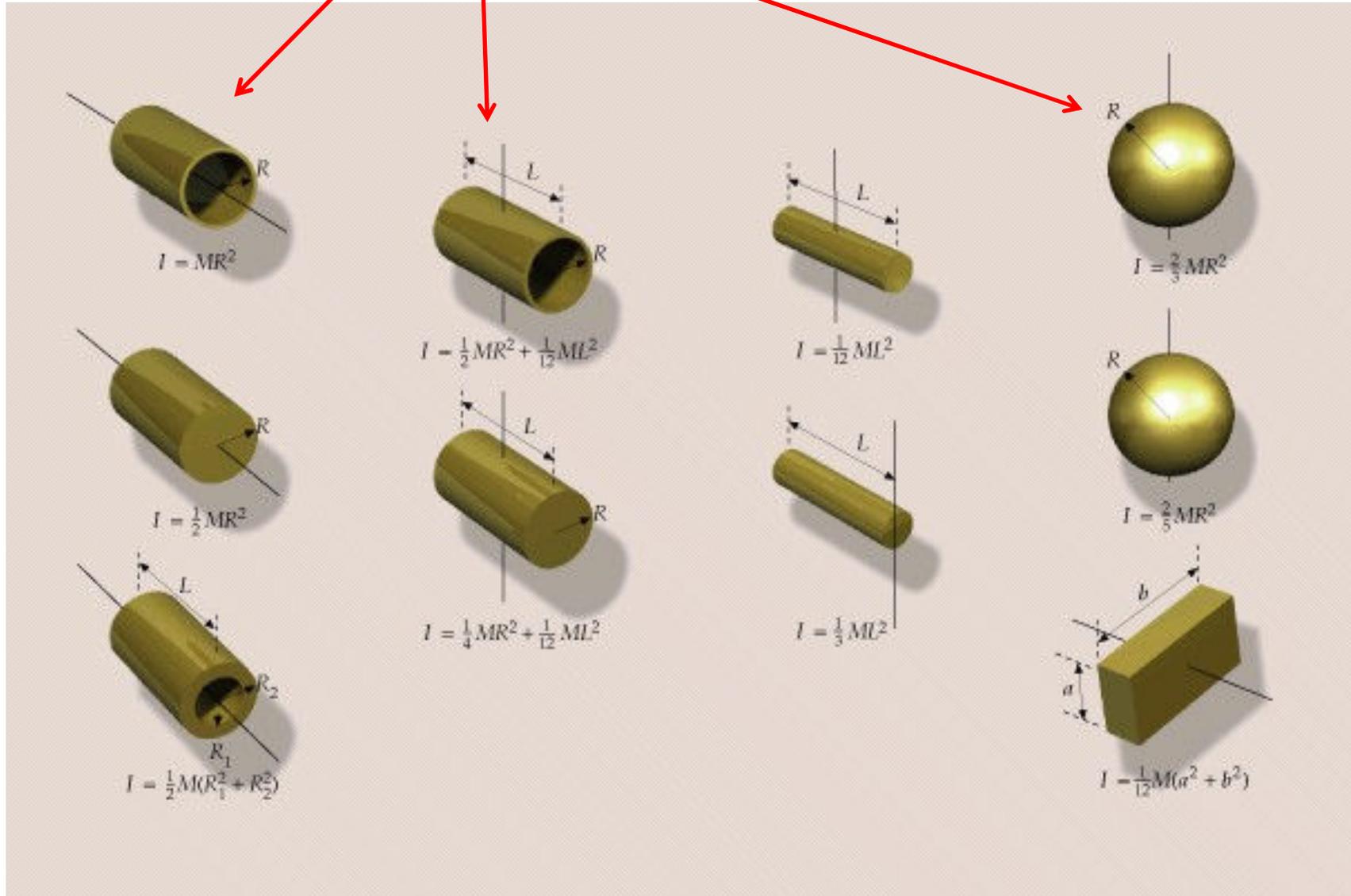
**E-mail:** [adsantos@if.usp.br](mailto:adsantos@if.usp.br)

**Fone:** 3091.6886

11, 16 e 18 de novembro

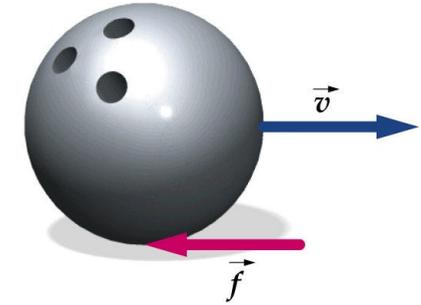
$$I = \int r^2 dm$$

**cascas**



## Rolamento sem deslizar

Quando temos atrito estático, se considera que não há perda de energia no sistema, ou seja, que o sistema é conservativo. Isto é aproximadamente correto.



**Exemplo:** Uma bola de boliche, com 11 cm de raio e 7,2 kg, rola sem deslizar a 2,0 m/s . Ela continua a rolar sem deslizar, ao subir uma rampa até a altura  $h$ , quando atinge o repouso. Determine  $h$ .

Vamos considerar o sistema bola-pista-Terra. Não existem forças externas e nem forças internas dissipativas, então a Energia Mecânica se conserva.

$$W_{ext} = \Delta E_{mec} + W_{nc} \quad 0 = \Delta E_{mec} + 0$$

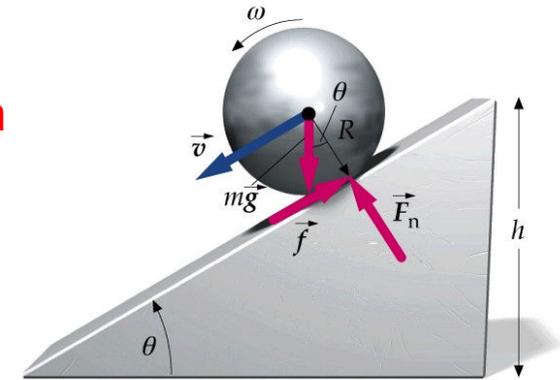
$$U_f + K_f = U_i + K_i \quad 0 + mgh = 0 + \frac{1}{2}mv_{cm_i}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega_i^2$$

Com  $I = \frac{2}{5}mR^2$

$$h = \frac{7v_{cm_i}^2}{10g} = 29cm$$

## Rolamento sem deslizar

Uma bola maciça, de raio  $R$  e massa  $m$ , desce rolando um plano inclinado com ângulo  $\theta$ , sem deslizar. Determine a força de atrito e a aceleração do centro de massa.



Vamos aplicar a Segunda Lei de Newton à bola (rotação e translação). (o peso e a normal na polia, não geram torque)

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{ext} = I_{cm} \alpha = F_e R \\ F_{ext} = m a_{cm} \end{array} \right.$$

Com  $a_{cm} = R\alpha$

$$mg \sin \theta - F_e = m a_{cm}$$

$$a_{cm} = \frac{g \sin \theta}{1 + \frac{I_{cm}}{mR^2}}$$

$$mg \sin \theta - \frac{I_{cm} a_{cm}}{R^2} = m a_{cm}$$

$$F_e = \frac{mg \sin \theta}{1 + \frac{mR^2}{I_{cm}}}$$

Com

$$I_{cm} = \frac{2}{5} mR^2$$

## Rolamento com deslizamento

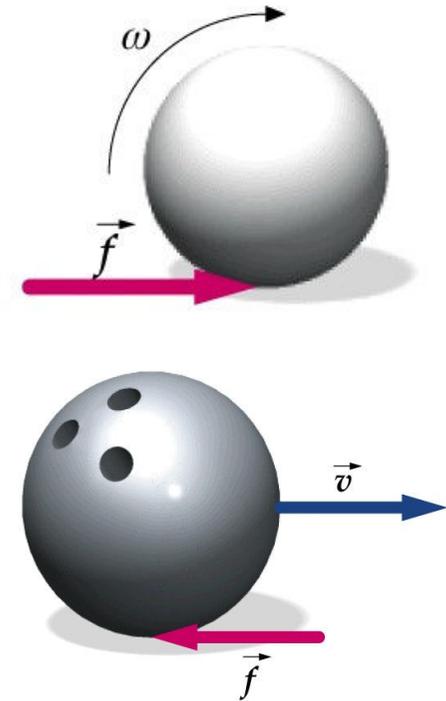
Quando temos atrito dinâmico, se considera que haja perda de energia no sistema, ou seja, que o sistema não é conservativo. Parte da energia é convertida em calor.

O sentido da força de atrito é definido pela relação entre a velocidade angular e a velocidade do centro de massa.

**Exemplo:** Uma bola de boliche, de massa  $m$  e raio  $R$ , é lançada sem rolamento, com velocidade de  $5,0$  m/s. O coeficiente de atrito cinético é  $0,08$ . Determine (a) o tempo que a bola leva derrapando. (b) o tempo deste trajeto.

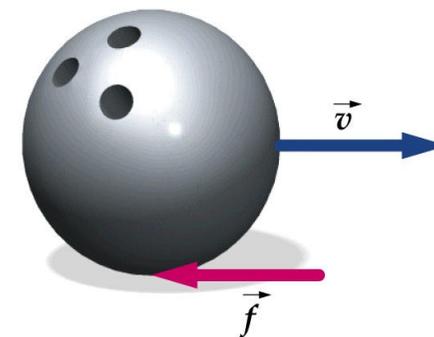
Vamos aplicar a Segunda Lei de Newton à bola (rotação e translação).

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{ext} = I_{cm} \alpha = F_e R \\ F_{ext} = m a_{cm} \end{array} \right. \quad \text{Com } a_{cm} = R \alpha$$



## Rolamento com deslizamento

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{ext} = I_{cm} \alpha = F_c R \\ F_{ext} = m a_{cm} \end{array} \right. \quad \text{Com } a_{cm} = R \alpha$$



$$-F_c = m a_{cm} = -\mu_c m g$$

$$a_{cm} = -\mu_c g$$

$$v_{cm} = v_0 - \mu_c g t$$

$$\alpha = \frac{F_c R}{I_{cm}} = \frac{\mu_c m g R}{\frac{2}{5} m R^2} = \frac{5 \mu_c g}{2 R}$$

$$\omega = \omega_0 + \frac{5 \mu_c g}{2 R} t$$

Mas, quando não deslizar

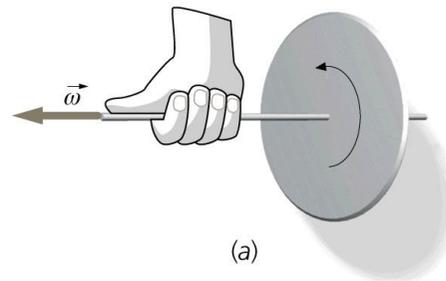
$$v_{cm} = R \omega$$

$$v_0 - \mu_c g t = \frac{5 \mu_c g}{2 R} t$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t = \frac{2 v_0}{7 \mu_c g} \\ \Delta x = v_0 t + \frac{1}{2} a_{cm} t^2 = \frac{12 v_0^2}{49 \mu_c g} \end{array} \right.$$

## A natureza vetorial da rotação

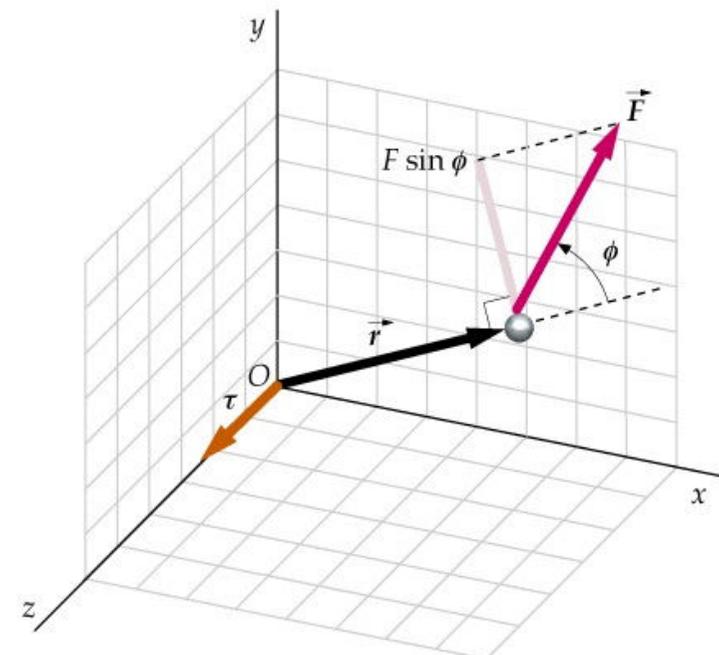
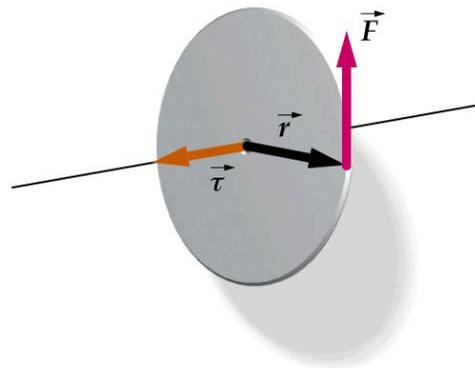
Agora, vamos considerar os casos em que o eixo de rotação pode alterar a sua direção. Isto explicita a natureza vetorial da rotação. Definimos a direção do vetor velocidade angular como perpendicular ao plano de rotação e o sentido dado pela regra da mão direita.



## A natureza vetorial da Torque

A definição mais completa do torque é dada em termos do produto vetorial

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$



## Quantidade de Movimento Angular

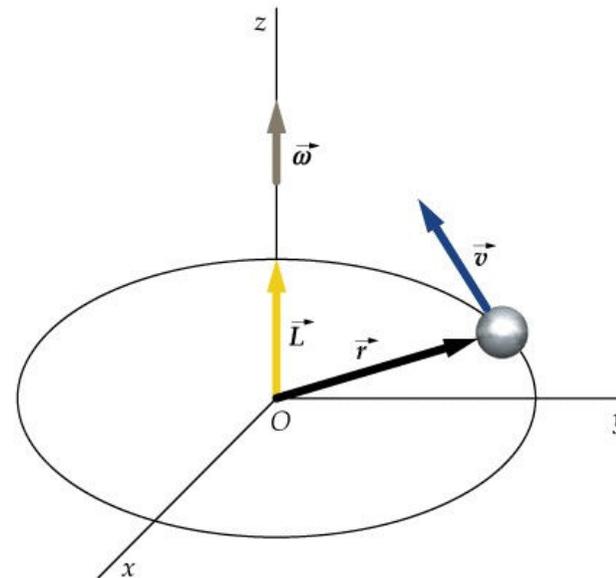
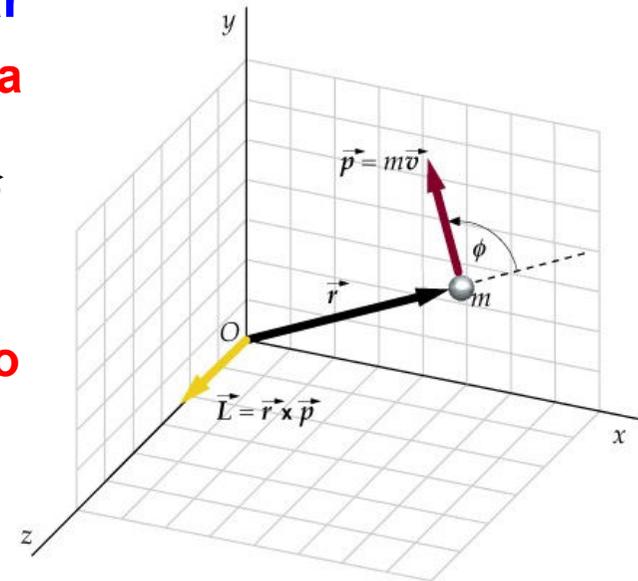
A figura ao lado, mostra uma partícula de massa  $m$ , na posição  $\vec{r}$ , se movendo com uma velocidade  $\vec{v}$ . Ela possui uma quantidade de movimento linear  $\vec{p} = m\vec{v}$

Definimos a Quantidade de Movimento Angular (ou Momento Angular) em relação à origem, como sendo

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Ou ainda, por analogia à quantidade de movimento linear podemos também escrever

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad \rightarrow \quad \vec{L} = I\vec{\omega}$$

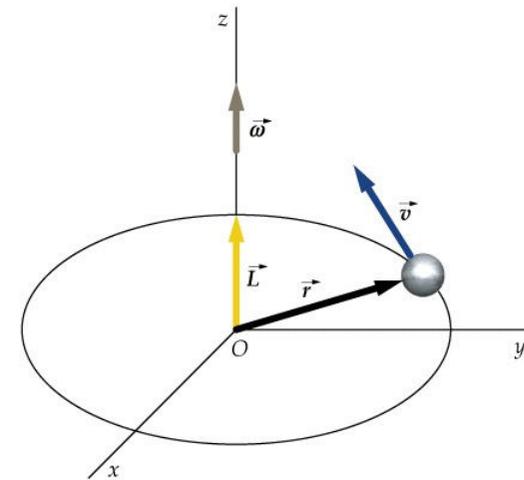


$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

**Ou ainda, por analogia à quantidade de movimento linear podemos também escrever**

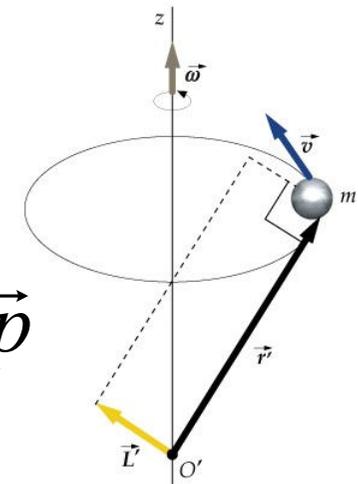
$$\vec{p} = m \vec{v}$$

$$\vec{L} = I \vec{\omega}$$



**Porém, se mudarmos a origem do sistema de coordenadas, em relação ao plano da órbita, obtemos um novo valor de L que não é paralelo a ω.**

**Isto indica que a última definição não é universal.**

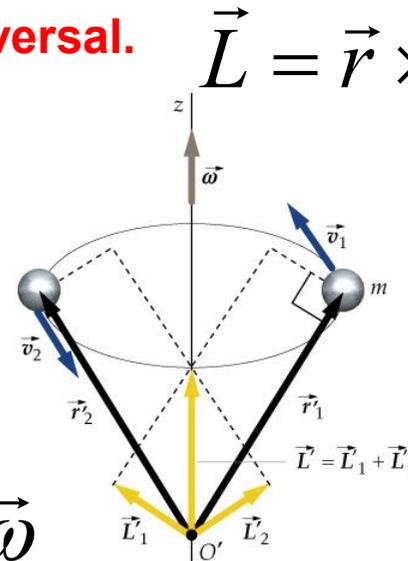


$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

**No entanto, se tivéssemos duas massas simétricas em relação ao eixo z, L seria paralelo a ω.**

**Isto mostra que a última definição é válida apenas quando temos simetria em relação ao eixo de rotação.**

$$\vec{L} = I \vec{\omega}$$



## Mais analogias

A segunda lei de Newton para a translação pode ser escrita como:

$$\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}_{sis}}{dt}$$

A segunda lei de Newton para a rotação pode ser escrita em termos do torque e momento angular como:

$$\vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}_{sis}}{dt}$$

Impulso angular – Quantidade de movimento angular

$$\Delta\vec{L}_{sis} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{\tau}_{ext} dt$$

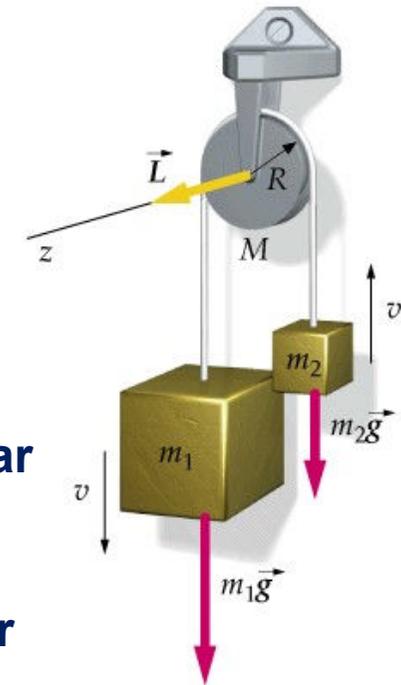
Que é o análogo de

$$\Delta\vec{P}_{sis} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{ext} dt$$

Uma polia sem atrito nos mancais, tem dois blocos, de massas  $m_1 > m_2$ , ligadas por um fio de massa desprezível. A polia é disco de massa  $M$  e raio  $R$ . Determine a aceleração dos blocos.

Vamos fixar o sistema de coordenadas no eixo da polia, com o eixo  $z$  paralelo ao eixo da polia.

Vamos considerar o sistema como constituído das massas, polia e fio.



$$\vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Como os vetores torque, velocidade angular e quantidade de movimento angular são paralelos ao eixo  $z$ , podemos tratar este problema, como unidimensional e trabalhar escalarmente.

$$\tau_{ext} = \tau_n + \tau_g + \tau_1 + \tau_2$$

$$\tau_{ext} = m_1 g R - m_2 g R$$

$$L_z = L_p + L_1 + L_2$$

$$L_z = I\omega + m_1 v R + m_2 v R$$

$$\tau_{ext} = \frac{dL}{dt} = I\alpha + (m_1 + m_2)aR$$

$$a = R\alpha$$

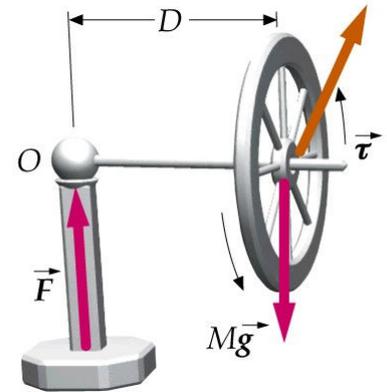
$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + M/2} g$$

A “roda de bicicleta” vista na aula consiste em um corpo em rotação, com o seu eixo livre para alterar a sua direção.

A quantidade de movimento angular da roda é:

$$\vec{L} = I_{cm} \vec{\omega}$$



Aplicando-se a segunda lei de Newton para a rotação, temos:

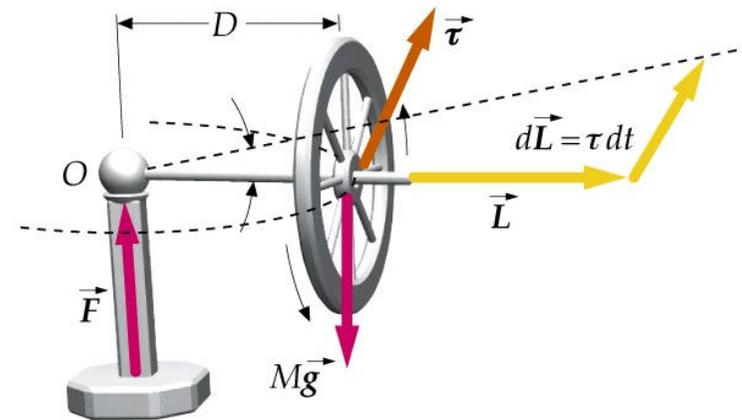
$$\vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \vec{\tau}_{ext} = \vec{r}_{cm} \times M\vec{g}$$

$$d\vec{L} = \vec{\tau}_{ext} dt$$

$$dL = L d\phi$$

A velocidade de precessão da roda em torno do eixo vertical é dada por:

$$\omega_p = \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{L} \frac{dL}{dt} = \frac{\tau_{ext}}{L} = \frac{MgD}{I_{cm} \omega}$$



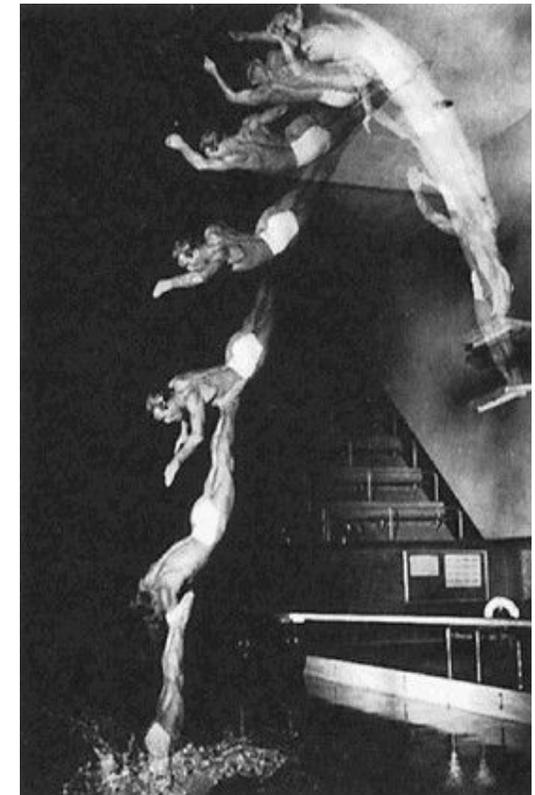
**Quando o torque externo resultante sobre um sistema é nulo, temos:**

$$\vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{L}_{sis} = cte$$

**Temos a Conservação da Quantidade de Movimento Angular do sistema.**

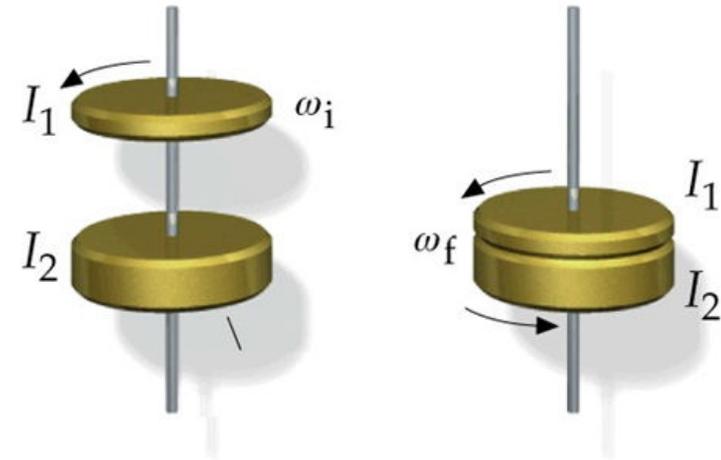


**O peso não gera torque em relação ao eixo que passa pelo centro de massa.**



O disco 1 gira livremente com velocidade angular  $\omega_i$ . Seu momento de inércia é  $I_1$ . Ele cai sobre o disco 2, com momento de inércia  $I_2$ , que está em repouso. Devido ao atrito cinético, os dois discos tendem a ter a mesma velocidade. Determine  $\omega_f$ .

Temos a Conservação da Quantidade de Movimento Angular do sistema.



$$\vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \longrightarrow \quad L_i = L_f = cte$$

$$I_1 \omega_i = (I_1 + I_2) \omega_f$$

$$\omega_f = \frac{I_1}{I_1 + I_2} \omega_i = \frac{1}{1 + I_2/I_1} \omega_i$$

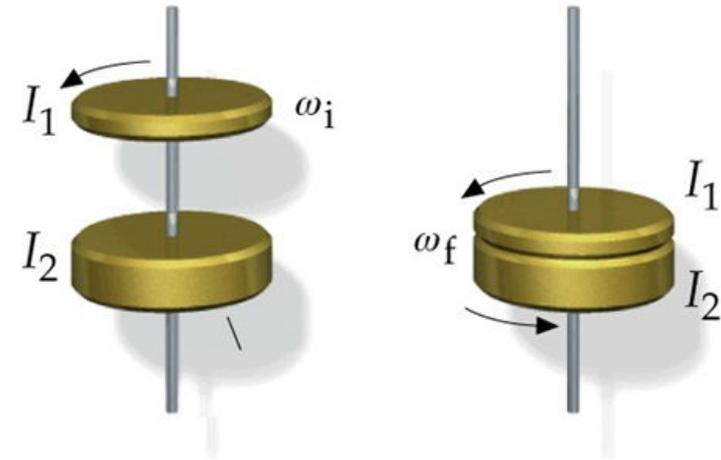
Podemos escrever a Energia Cinética de Rotação como:

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{(I \omega)^2}{2I} = \frac{L^2}{2I}$$

Vamos verificar a conservação da energia cinética

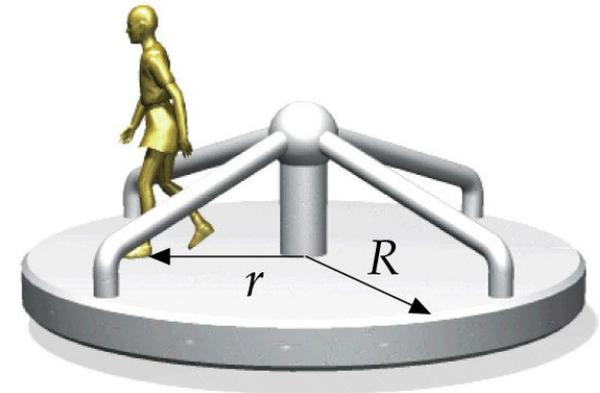
$$K_i = \frac{L_i^2}{2I_1} \quad K_f = \frac{L_f^2}{2(I_1 + I_2)}$$

$$\longrightarrow \frac{K_f}{K_i} = \frac{I_1}{I_1 + I_2}$$



Portanto, a Energia Cinética não se conservou.

Um parque possui um pequeno carrossel, cuja plataforma tem 3,0 m de diâmetro e  $130 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$  de momento de inércia. Cinco colegas se colocam próximo à borda, com o carrossel girando a 20 rpm. Considere que quatro dos colegas se movam rapidamente para o centro do carrossel ( $r = 30 \text{ cm}$ ). Se a aceleração centrípeta necessária para atirar o quinto colega para fora do carrossel é de  $4g$ , determine se este foi arremessado. (a massa de cada colega é 60 kg)



Como o torque externo em relação ao eixo do carrossel é nulo, há conservação da quantidade de movimento angular

$$L_f = L_i \quad \longrightarrow \quad I_f \omega_f = I_i \omega_i$$

$$I_i = 5mR^2 + I_{carr}$$

$$I_i = 805 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I_f = mR^2 + 4mr^2 + I_{carr}$$

$$I_f = 287 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$\omega_f = 56,2 \text{ rpm} = 5,88 \text{ rad} / \text{s}$$

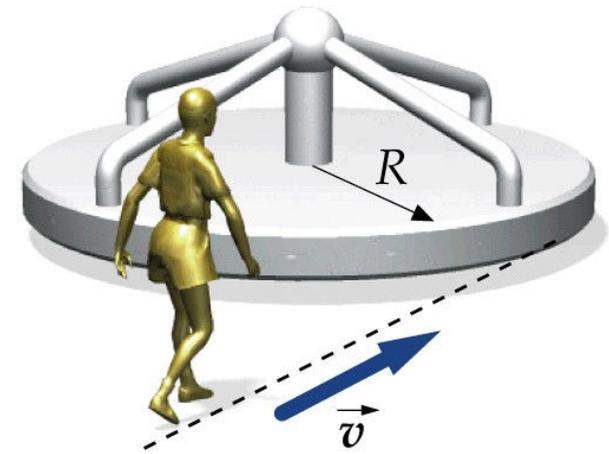
$$a_c = \omega^2 R = 51,9 \text{ m} / \text{s}^2 > 5g$$

**Arremessado !**

Como é a força de atrito entre os pés dos 4 colegas e o carrossel, enquanto se movem?

Uma criança de 25 kg, corre a 2,5 m/s, tangente à borda de um carrossel de raio 2,0 m. O carrossel inicialmente em repouso, tem momento de inércia de 500 kg.m<sup>2</sup>. A criança pula sobre o carrossel. Determine a velocidade angular final do conjunto.

Como o torque externo em relação ao eixo do carrossel é nulo, há conservação da quantidade de movimento angular

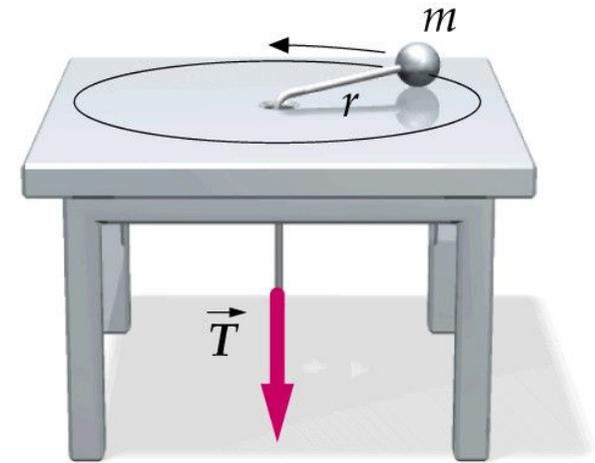


$$L_f = L_i \quad \longrightarrow \quad I_f \omega_f = \left| \vec{r}_c \times m \vec{v}_i \right| = R m v_i$$

$$I_f = mR^2 + I_{carr}$$

$$\omega_f = \frac{R m v_i}{mR^2 + I_{carr}} = 0,21 \text{ rad} / \text{s}$$

Uma partícula de massa  $m$  se move sem atrito com velocidade  $v_0$  em um círculo de raio  $r_0$ . A partícula está presa a um fio que passa por um furo na mesa. O fio é puxado até que o raio do movimento passe a ser  $r_f$ . (a) Determine a velocidade final. (b) Determine a tensão no fio. (c) Determine o trabalho realizado pela tensão sobre a partícula.



Como a tensão é radial, não realiza torque sobre a partícula, então há conservação da quantidade de movimento angular da partícula.

$$L_f = L_i \longrightarrow \left| \vec{r}_f \times m \vec{v}_f \right| = \left| \vec{r}_0 \times m \vec{v}_0 \right| \longrightarrow v_f = \frac{r_0 v_0}{r_f}$$

$$T = m \frac{v^2}{r}$$

$$L = mrv$$

$$T = \frac{L^2}{mr^3}$$

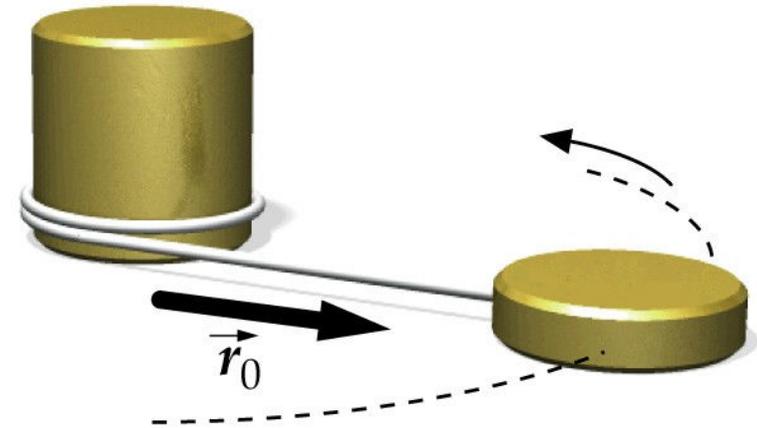
$$dW = \vec{T} \cdot d\vec{l} = -Tdr$$

$$W = - \int_{r_0}^{r_f} Tdr = - \int_{r_0}^{r_f} \frac{L^2}{mr^3} dr$$

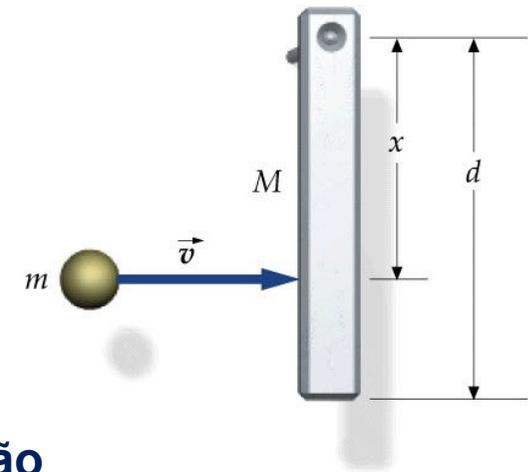
$$W = \frac{L^2}{2m} \left( \frac{1}{r_f^2} - \frac{1}{r_0^2} \right)$$

**Considere a situação ao lado. Ela é semelhante à do problema anterior? A quantidade de movimento se conserva? Como varia  $\omega$  em função do raio?**

**Como a tensão não é radial, existe um torque sobre a partícula, então não há conservação da quantidade de movimento angular da partícula.**



Uma barra fina de massa  $M$  e comprimento  $d$  está pendurada em um pivô. Um pedaço de massa de modelar de massa  $m$  e velocidade  $v$ , atinge a barra a uma distância  $x$  do pivô e se prende a ela. Determine a razão entre as energias cinéticas antes e depois da colisão.



A colisão é inelástica, não há conservação da energia mecânica do sistema.

Durante a colisão há uma grande força no pivô, portanto não há conservação da quantidade de movimento linear.

A força no pivô é radial, não existe torque e temos conservação da quantidade de movimento angular.

$$L_f = L_i \quad \longrightarrow \quad L_f = |\vec{r} \times m \vec{v}| = mvx$$

$$K_i = \frac{1}{2} mv^2$$

$$K_f = \frac{1}{2} I_f \omega_f^2 = \frac{L_f^2}{2 I_f}$$

$$I_f = mx^2 + \frac{1}{3} Md^2$$

$$\frac{K_f}{K_i} = \frac{\frac{3}{2} \frac{(mrv)^2}{(3mx^2 + Md^2)}}{\frac{1}{2} mv^2}$$

$$\frac{K_f}{K_i} = \frac{1}{1 + \frac{Md^2}{3mx^2}}$$

**Uma pessoa está sobre uma cadeira giratória, com a roda de bicicleta com seu eixo na vertical. Se ela gira a roda, o que acontece com a cadeira?**

**A mesma condição anterior, porém com o eixo da roda na horizontal.**

**Como fazer para colocar o eixo na vertical?**

**O que acontece com a cadeira?**