Física 1 IF/USP 6 º Exercício para nota - DIURNO (22/11/2010)

NOME:____Turma:____

Um sólido de massa m = 10 kg se move sob a ação de uma força elástica com constante de mola k = 90 N/m. Uma força de atrito viscoso também atua no sólido com coeficiente de atrito viscoso ρ = 100 Ns/m.

As condições iniciais do movimento são tais que o deslocamento da mola é **x(0) = 5 cm** e a velocidade inicial **v(0) = 0 cm/s.**

(a) Escreva a equação diferencial (2ª Lei de Newton) para este sistema. (1,0)

(b) Determine se o amortecimento é subcrítico, crítico ou supercrítico. (2,0)

(c) Para as condições iniciais, determine a elongação da mola em função do tempo, $x(t)$. (4,0)

(d) Para as condições iniciais, determine a velocidade da mola em função do tempo, $v(t)$. (2,0)

(e) Faça um esboço do gráfico de $x(t)$ vs. t, para 0 < t < 5 s. (1,0)

FORMULÁRIO

$x(t) = A\, e^{-(\gamma/2)t} \cos(\omega t + \varphi)$

$x(t) = e^{-(\gamma/2)t} (a e^{\beta t} + b e^{-\beta t})$

$x(t) = (a+bt)\, e^{-(\gamma/2)t}$

a) Sendo $m\ddot{x} = -kx - \rho\dot{x}$

$$10\ddot{x} = -90x - 100\dot{x} \longrightarrow \boxed{\ddot{x} + 10\dot{x} + 9x = 0}$$

b) Sendo $\gamma = \dfrac{\rho}{m} = \dfrac{100}{10} \longrightarrow \boxed{\gamma = 10\,s^{-1}}$ e

$\omega_0^2 = \dfrac{k}{m} = \dfrac{90}{10} \longrightarrow \boxed{\omega_0 = 3\,s^{-1}}$

então $\dfrac{\gamma}{2} = 5\,s^{-1}$, assim $\dfrac{\gamma}{2} > \omega_0$. O amortecimento é <u>supercrítico</u>.

c) $x(t) = e^{-(\gamma/2)t}\left(a e^{\beta t} + b e^{-\beta t}\right)$, onde $\beta = \sqrt{\dfrac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$

$\beta = \sqrt{\dfrac{100}{4} - 9} \longrightarrow \boxed{\beta = 4}$

$x(0) = a + b = 5\text{ cm}$

$$v(t) = -\frac{\gamma}{2} e^{-(\gamma/2)t}\left(a e^{\beta t} + b e^{-\beta t}\right) + e^{-(\gamma/2)t}\left(a\beta e^{\beta t} - b\beta e^{-\beta t}\right)$$

$$= e^{-(\gamma/2)t}\left[-\frac{\gamma}{2}\left(a e^{\beta t} + b e^{-\beta t}\right) + \left(a\beta e^{\beta t} - b\beta e^{-\beta t}\right)\right]$$

$$v(t) = e^{-(\gamma/2)t}\left[\left(-\frac{\gamma}{2}a + a\beta\right)e^{\beta t} - \left(\frac{\gamma}{2}b + b\beta\right)e^{-\beta t}\right]$$

$$v(t) = e^{-(\gamma/2)t}\left[a\left(-\frac{\gamma}{2}+\beta\right)e^{\beta t} - b\left(\frac{\gamma}{2}+\beta\right)e^{-\beta t}\right]$$

$$v(0) = \left[a\left(-\frac{10}{2}+4\right) - b\left(\frac{10}{2}+4\right)\right] = -a - 9b = 0 \rightarrow \boxed{a = -9b}$$

$$-9b + b = 5 \rightarrow \boxed{b = -\frac{5}{8}} \quad \boxed{a = \frac{45}{8}}$$

Então $\boxed{x(t) = e^{-5t}\left(\frac{45}{8}e^{4t} - \frac{5}{8}e^{-4t}\right) \text{ cm}}$

$$\boxed{x(t) = \frac{5}{8}e^{-5t}\left(9e^{4t} - e^{-4t}\right) \text{ cm}}$$

d) $v(t) = e^{-5t}\left[\frac{45}{8}(-5+4)e^{4t} + \frac{5}{8}(5+4)e^{-4t}\right]$

$= e^{-5t}\left[-\frac{45}{8}e^{4t} + \frac{45}{8}e^{-4t}\right] \rightarrow \boxed{v(t) = -\frac{45}{8}e^{-5t}\left(e^{4t} - e^{-4t}\right) \text{ cm/s}}$

e)