

Física I p/ IO – FEP111 (4300111)

2º Semestre de 2010

Instituto de Física
Universidade de São Paulo

Professor: **Antonio Domingues dos Santos**

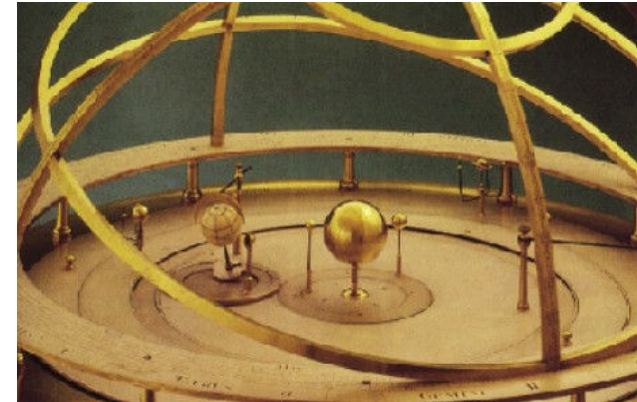
E-mail: adsantos@if.usp.br

Fone: 3091.6886

23, 25 e 30 de novembro

A humanidade sempre observou o céu e o utilizou como referência de orientação espacial. Porém, no ocidente, foi a partir do final da Idade Média que surgiram astrônomos que estudaram o céu de forma sistemática, a partir de observações minuciosas.

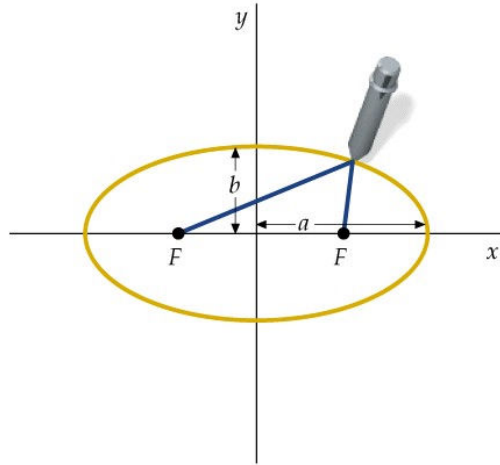
Nicolau Copérnico (heliocentrismo x geocentrismo) e as questões filosóficas e religiosas. Giordano Bruno, Galileu Galilei e a Inquisição.



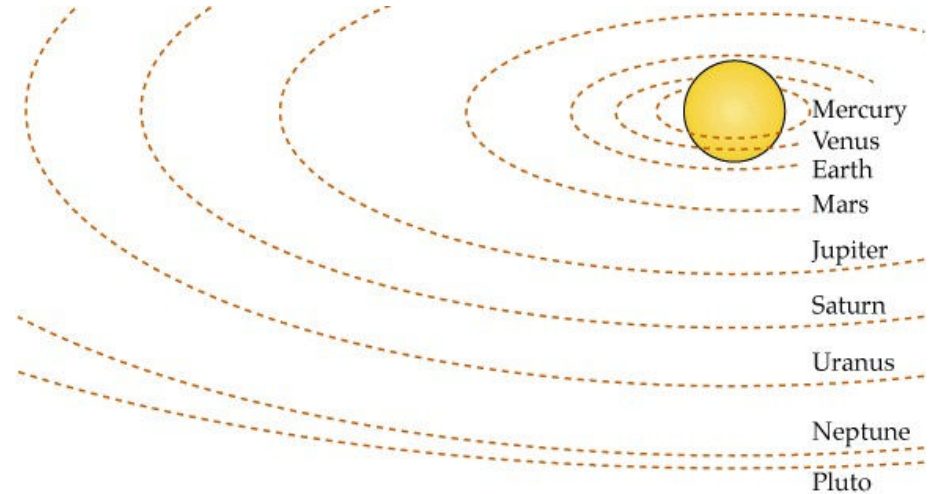
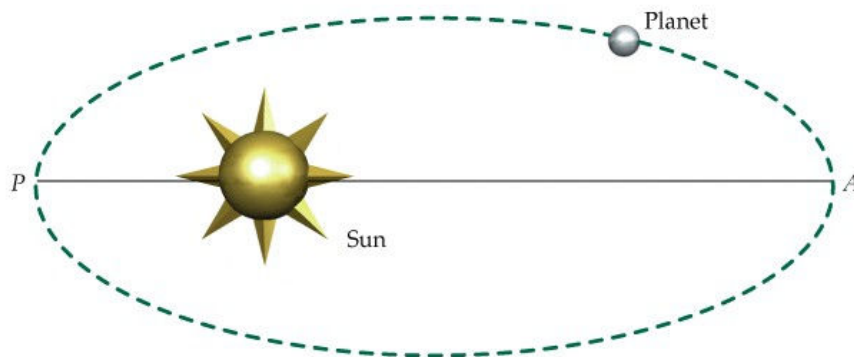
Ticho Brahe e Johannes Kepler, no século XVI, se constituem nos primeiros grandes exemplos de astrônomos observacionais.

Ticho Brahe fez grande quantidade de medições astronômicas e Kepler (discípulo) sistematizou os conhecimentos acumulados.

Todos os planetas se movem em órbitas elípticas com o Sol em um de seus focos.



Uma elipse é o lugar geométrico dos pontos para os quais a soma das distâncias a dois pontos fixos, é constante. Os pontos fixos são chamados de focos.



No sistema solar, o Sol está em um dos focos.

Para a Terra, a órbita é praticamente circular

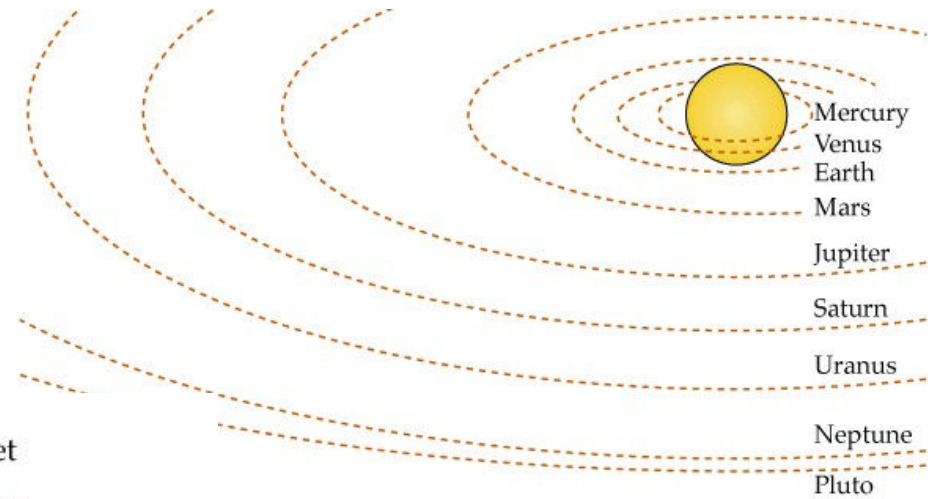
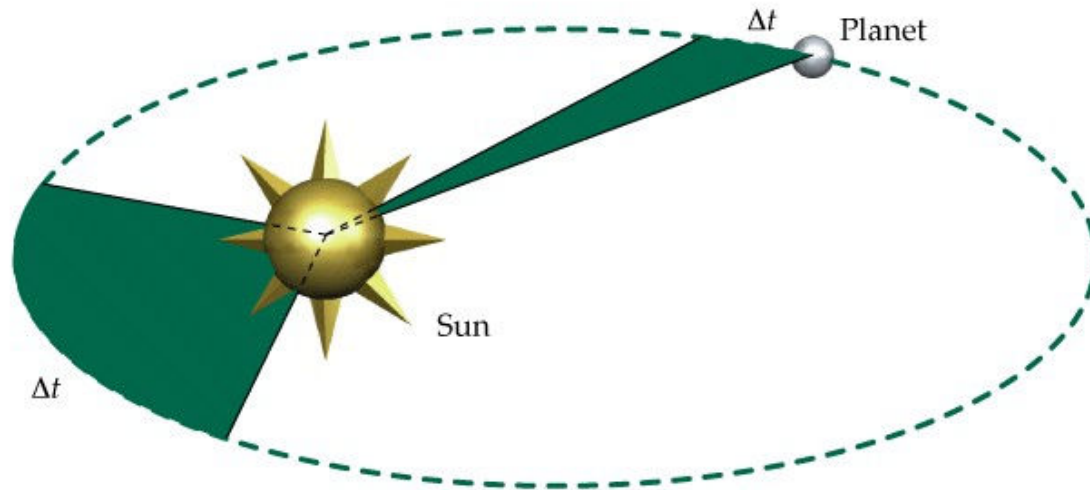
Periélio: $1,48 \times 10^{11} \text{ m}$

Afélio: $1,52 \times 10^{11} \text{ m}$

Unidade Astronômica (UA)

$$1UA = 1,50 \times 10^{11} \text{ m}$$

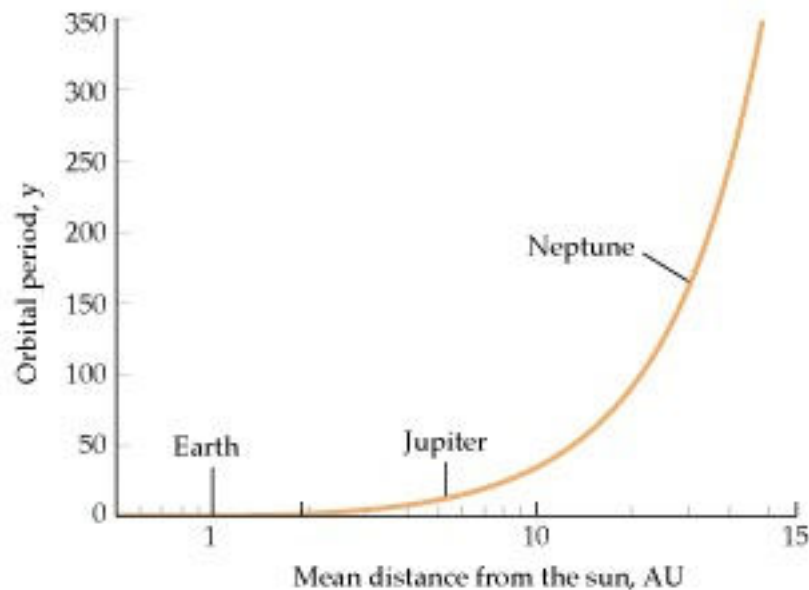
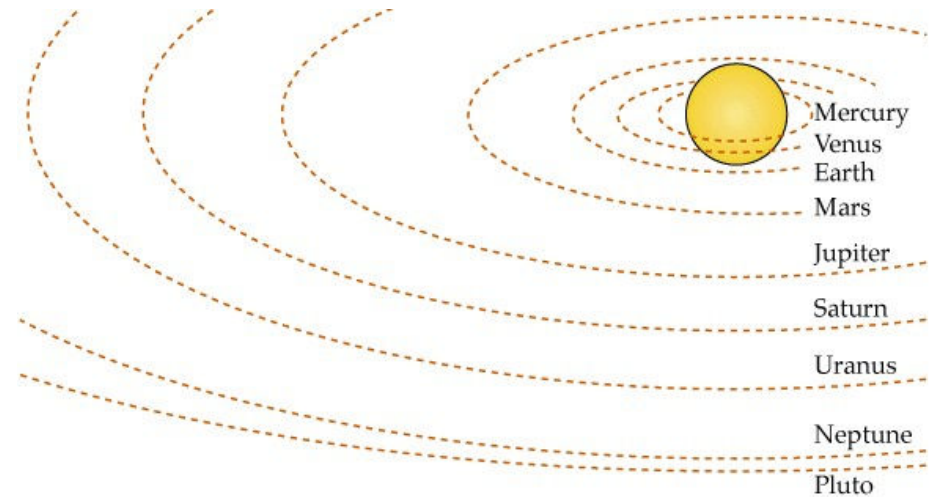
Uma linha ligando qualquer planeta ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais.



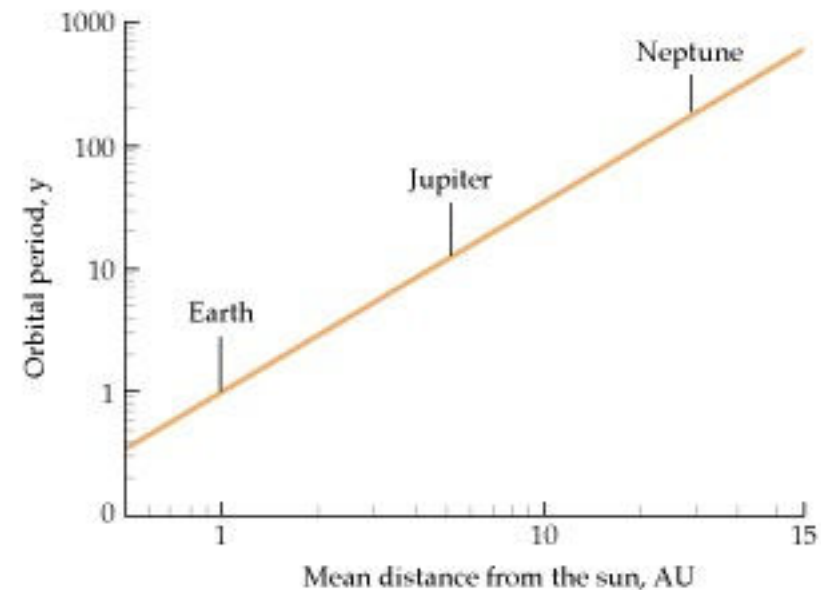
Esta lei é uma consequência da conservação da quantidade de movimento angular.

O quadrado do período de qualquer planeta é proporcional ao cubo do semi-eixo maior de sua órbita.

$$T^2 = Cr^3$$

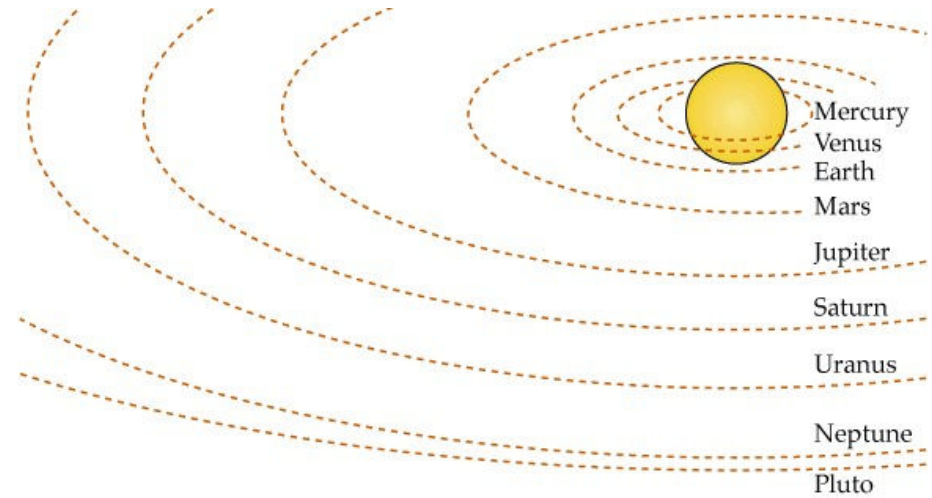
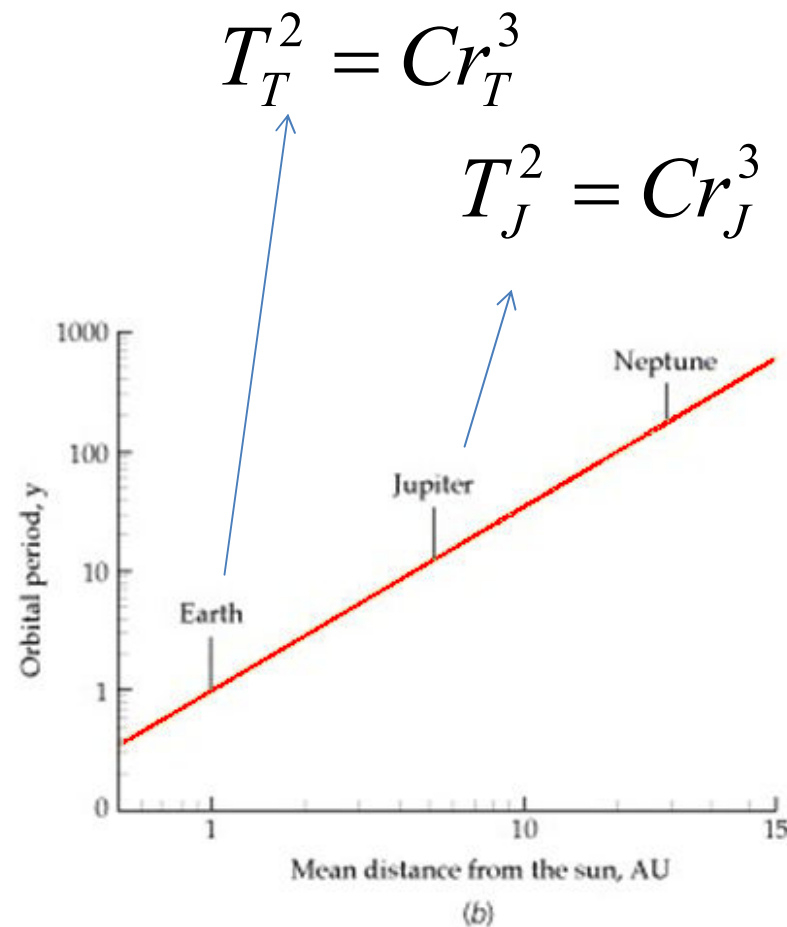


(a)



(b)

Sabendo-se que o raio orbital médio de Júpiter é de 5,2 UA, determine o período de sua órbita.



$$T_T^2 = Cr_T^3$$

$$C = 1 \text{ ano}^2 / \text{UA}^3$$

$$\frac{T_J^2}{T_T^2} = \frac{r_J^3}{r_T^3}$$

$$T_J = 11,9 \text{ anos}$$

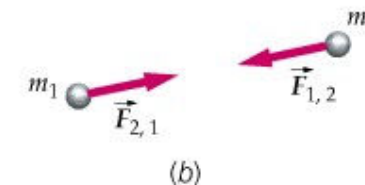
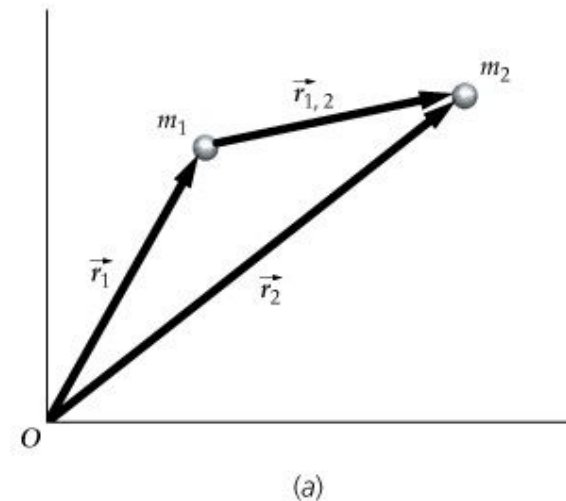
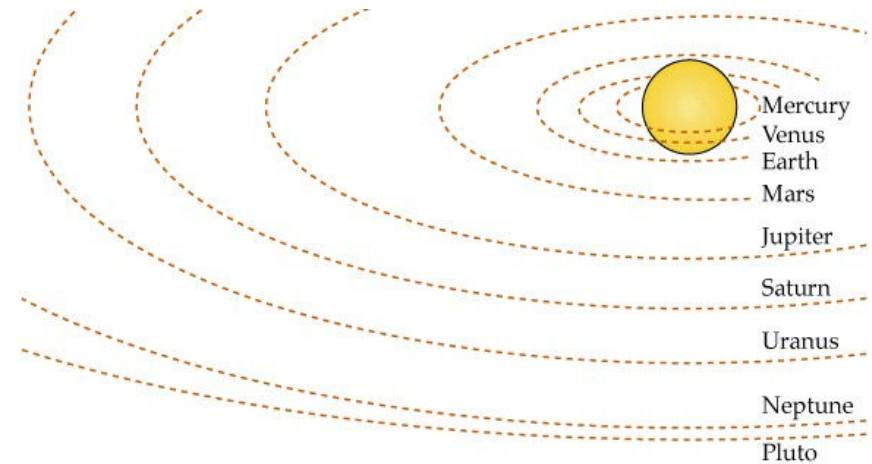
As Leis de Kepler são resultados empíricos.

Newton demonstrou que órbitas elípticas podem ser explicadas por forças atrativas que variam com o inverso do quadrado da distância.

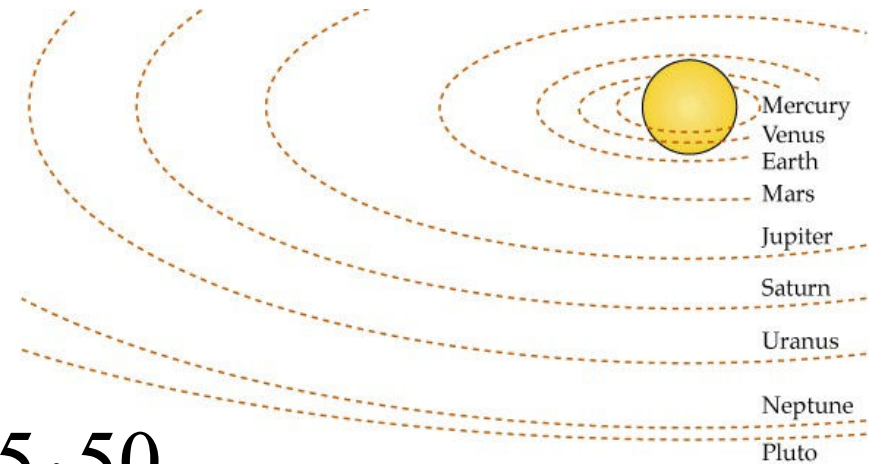
Ele também postulou que as leis obtidas na Terra eram universais.

$$\vec{F}_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

Onde $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{kg}^2$ é a Constante de Gravitação Universal.



Qual é força gravitacional que uma pessoa de 65 kg exerce sobre outra de 50 kg?



$$F_g = \frac{Gm_1m_2}{r_{12}^2} = \frac{6,67 \times 10^{-11} \cdot 65 \cdot 50}{0,5^2}$$

$$F_g = 8,67 \times 10^{-7} \text{ N}$$

Esta força é em geral desprezível, exceto se envolve massas astronômicas.

$$P_{mulher} \approx 500 \text{ N}$$

Comparação entre a aceleração de uma partícula na superfície da Terra e a aceleração da Lua em seu movimento orbital.

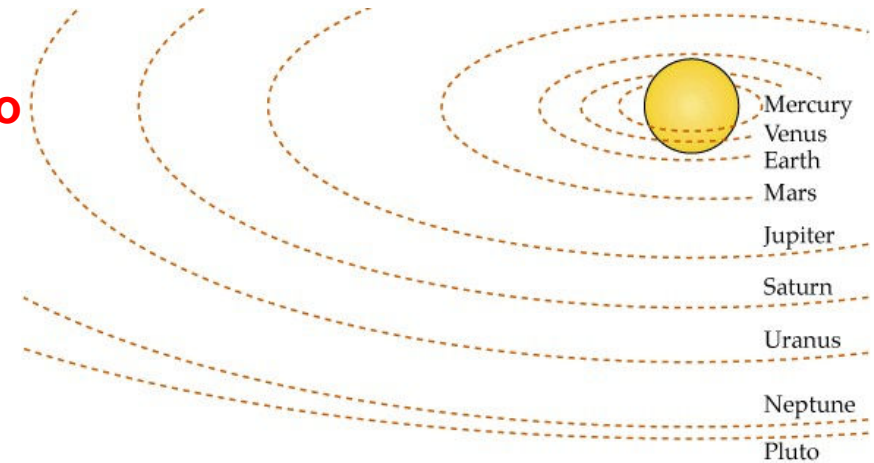
$$F_g = \frac{GM_T m}{r^2} = ma$$

$$a = \frac{GM_T}{R_T^2} = g \quad a_L = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = 2,71 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

Como a distância Terra-Lua é cerca de 60 vezes o raio da Terra,

$$a_L = \frac{GM_T}{3600 R_T^2} = \frac{g}{3600} = 2,78 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

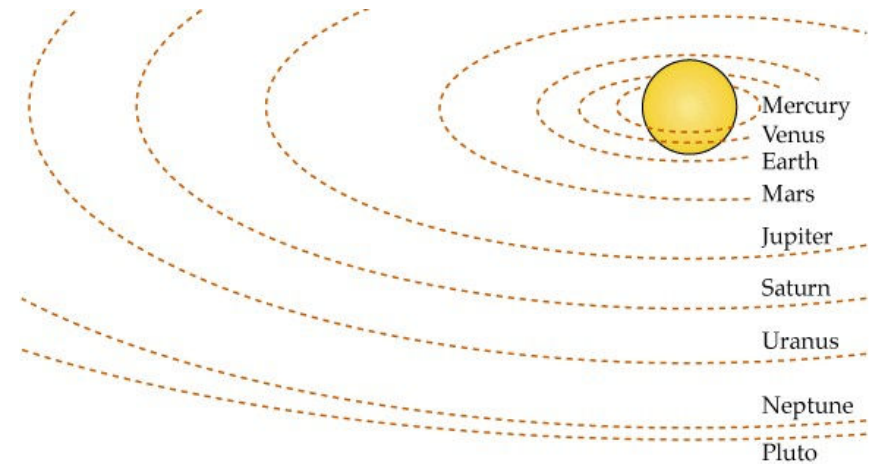
Newton fez uma boa estimativa do valor de G



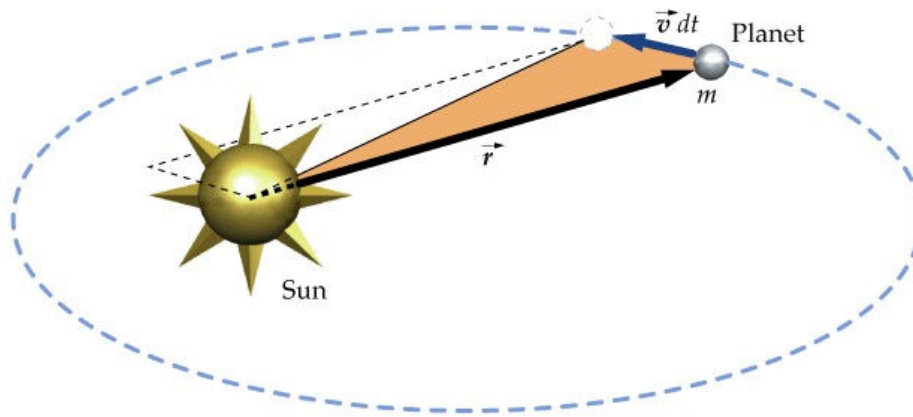
Henry Cavendish mediu G pela primeira vez em 1798 e obteve 1% de precisão.

A precisão atual é de 1 parte em 10.000.

**Dentre todas as constantes universais,
 G é a menos precisa!**



Newton mostrou que quando temos forças centrais, como é o caso do sistema solar, as trajetórias possíveis para os corpos são: elípticas, parabólicas e hiperbólicas.



$$F_g = \frac{GM_T m}{r^2} = ma$$

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

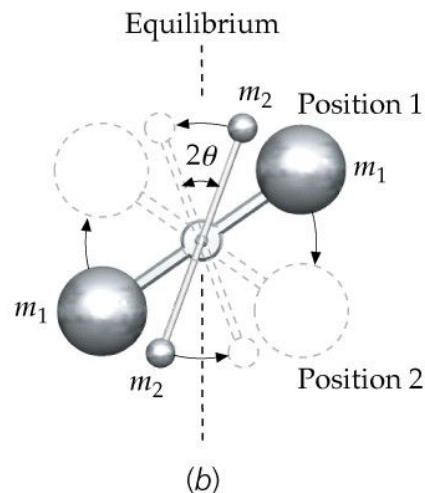
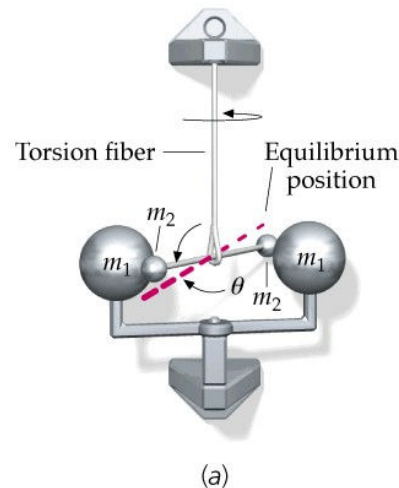
$$dA = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v} dt| = \frac{1}{2m} |\vec{r} \times m\vec{v}| dt$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$$

$$\frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{GM_S}{r^2}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_S} r^3$$

O experimento de Cavendish permitiu a verificação da expressão da força gravitacional e a determinação de G .



$$F_g = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

Para um corpo em queda livre, temos:

$$F_g = \frac{GM_T m_g}{r^2}$$

$$a = \frac{F_g}{m_i} = \frac{GM_T}{r^2} \frac{m_g}{m_i}$$

Galileu verificou que todos os corpos caem com a mesma aceleração g . Portanto,

$$\frac{m_g}{m_i} = 1$$

Massa inercial

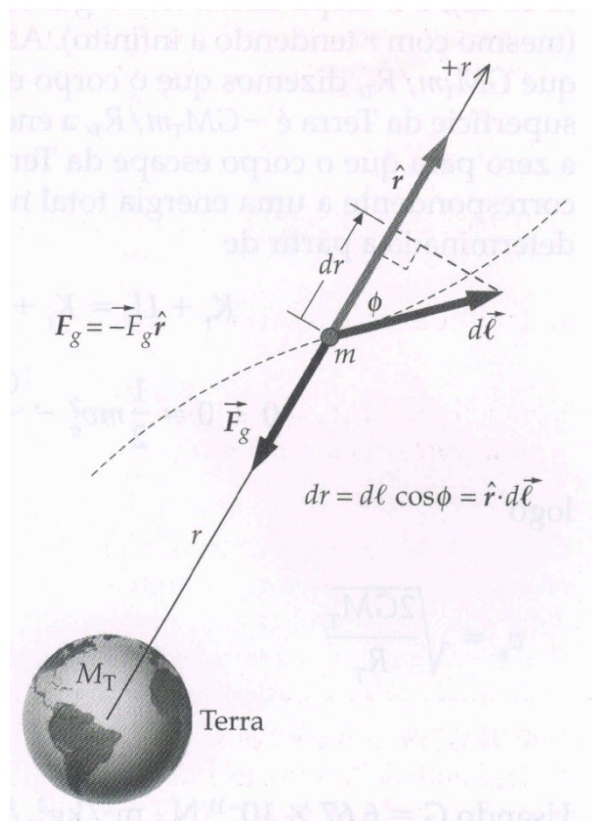
Quando um corpo está submetido a uma força, aparece uma aceleração. A constante de proporcionalidade descreve a inércia deste corpo.

$$F = ma$$

Próximo à superfície da Terra, a força gravitacional da Terra sobre um corpo de massa m é igual a $P=mg$ e a energia potencial gravitacional é $U=mgh$, onde $h=r-R_T$ e r é a distância entre os centros de massa.

Longe da superfície da Terra a força gravitacional depende da distância e portanto, a energia potencial gravitacional necessita ser redefinida.

$$F_g = \frac{GM_T m}{r^2}$$



$$dU = -\vec{F}_g \cdot d\vec{l}$$

$$\vec{F}_g = -\frac{GM_T m}{r^2} \hat{r} = F_g \hat{r}$$

$$dU = F_g \hat{r} \cdot d\vec{l} = F_g dr = \frac{GM_T m}{r^2} dr$$

Longe da superfície da Terra a força gravitacional depende da distância e portanto, a energia potencial gravitacional necessita ser redefinida.

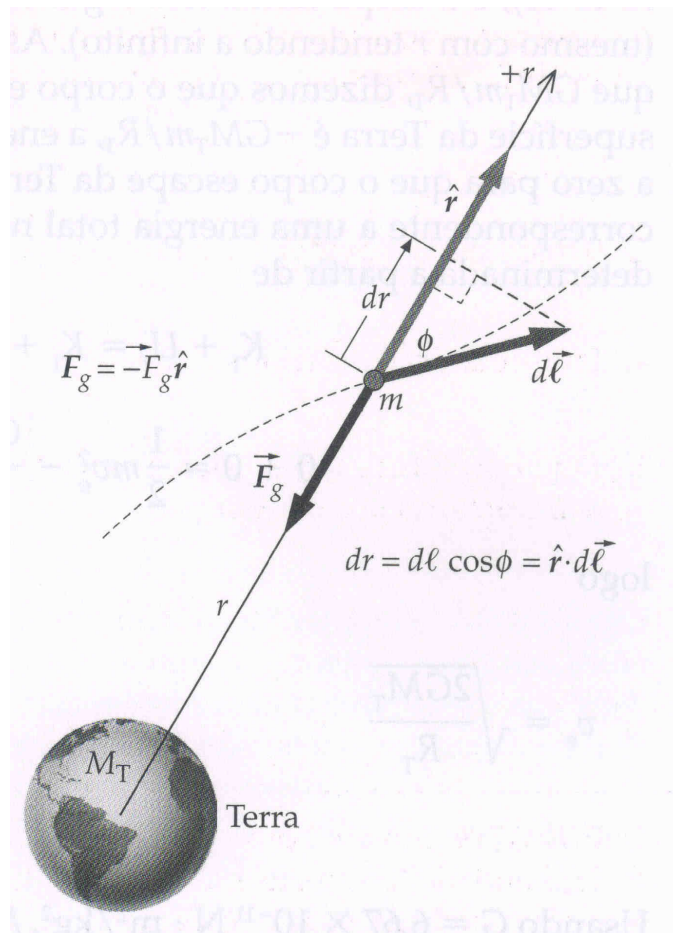
$$F_g = \frac{GM_T m}{r^2}$$

$$dU = F_g \hat{r} \cdot d\vec{\ell} = F_g dr = \frac{GM_T m}{r^2} dr$$

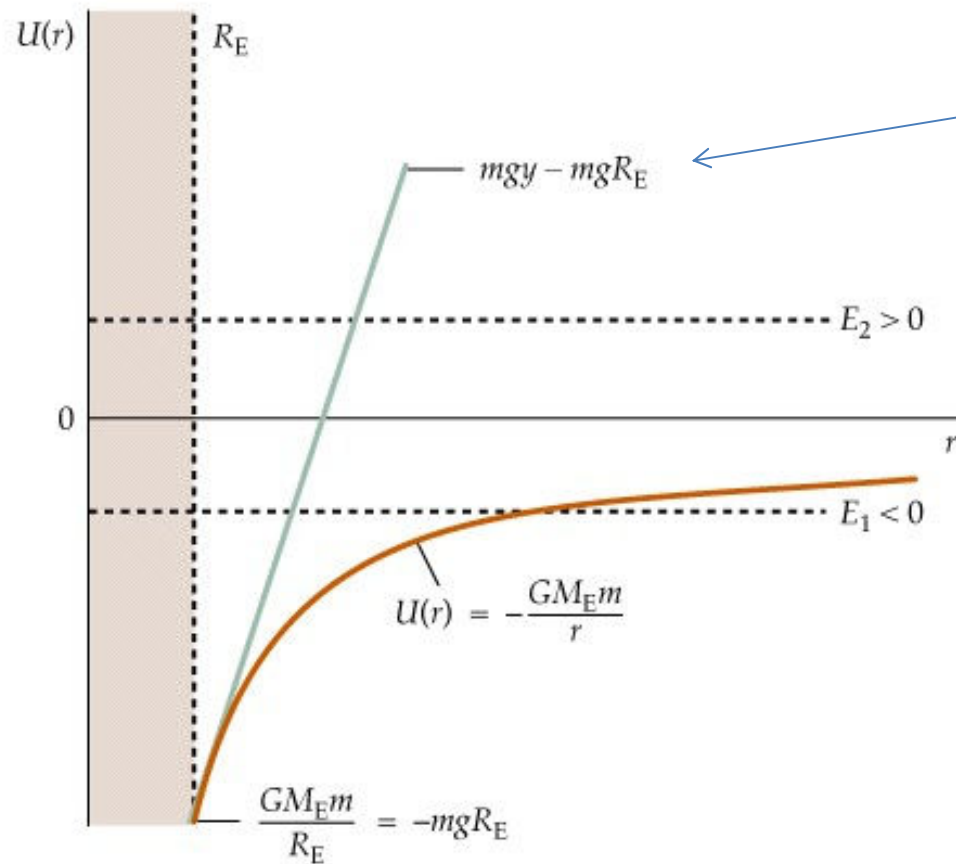
$$U = GM_T m \int \frac{dr}{r^2} = -\frac{GM_T m}{r} + U_0$$

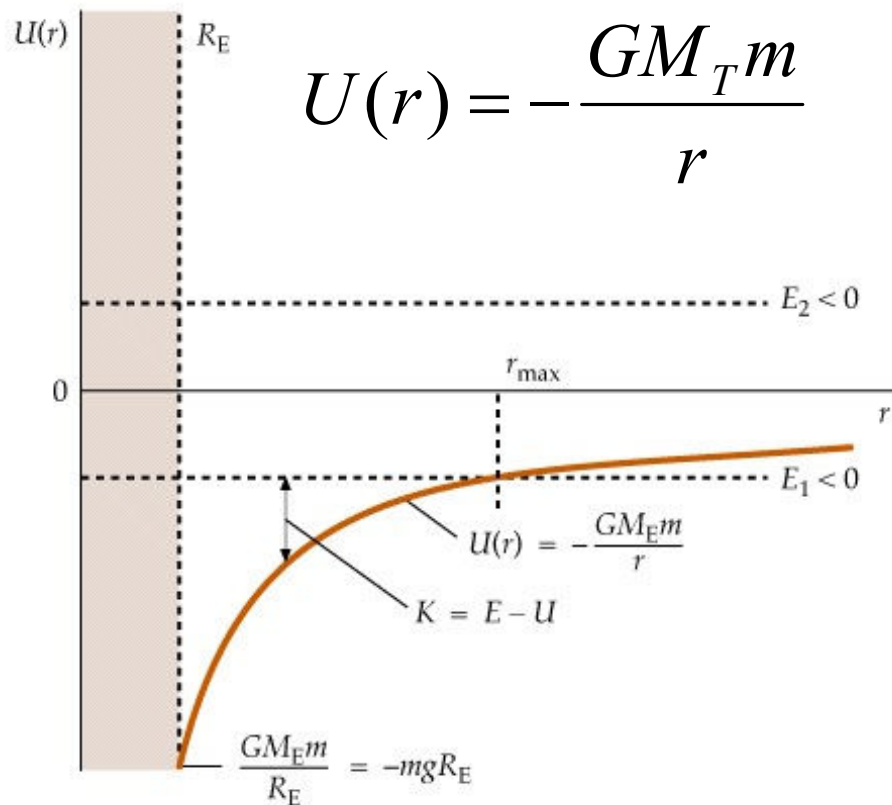
Adota-se $U_0=0$. Portanto, a energia potencial gravitacional é nula para uma distância muito longa (“infinito”).

$$U(r) = -\frac{GM_T m}{r}$$



$$U(r) = -\frac{GM_T m}{r}$$





Classificação das órbitas

Se um corpo submetido à energia potencial gravitacional terrestre tiver uma energia mecânica $E < 0$, ele estará confinado a uma região do espaço definida por $r_{\max}$. Dizemos que o sistema é ligado e deverá descrever uma órbita fechada (elíptica).

Para $E > 0$, o sistema não é ligado e a órbita será hiperbólica.

(Para $E = 0$, o sistema não é ligado e a órbita será parabólica.)

Velocidade de escape

$$K_f + U_f = K_i + U_i$$

$$0 = \frac{1}{2} m v_e^2 - \frac{GM_T m}{R_T}$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$$

$$v_e = 11.200 \text{ m/s} \approx 40.000 \text{ Km/h}$$

Discutir energia cinética dos gases!

Um projétil é disparado verticalmente, para cima, com uma velocidade inicial de 8,0 km/s. (a) Determine a altura máxima que ele atinge. (b) Se a velocidade inicial for 15 km/s, determine a sua velocidade para uma posição muito distante da Terra. Despreze a resistência do ar.

$$K_f + U_f = K_i + U_i$$

$$-\frac{GM_T m}{r_f} = \frac{1}{2} m v_i^2 - \frac{GM_T m}{R_T}$$

$$r_f = 1,3 \times 10^7 \text{ m}$$

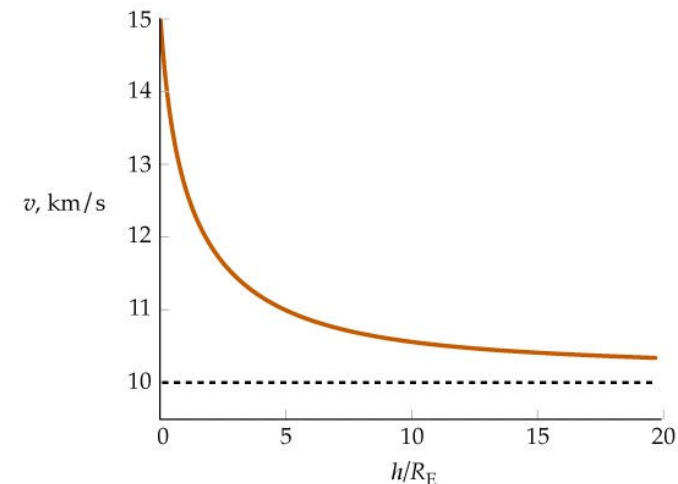
$$K_f + U_f = K_i + U_i$$

$$\frac{1}{2} m v_f^2 = \frac{1}{2} m v_i^2 - \frac{GM_T m}{R_T}$$

$$v_f = 1,0 \times 10^4 \text{ m/s}$$

$$K_f + U_f = K_i + U_i$$

$$\frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{GM_T m}{r_f} = \frac{1}{2} m v_i^2 - \frac{GM_T m}{R_T}$$



A força gravitacional sobre uma partícula de massa m_2 é dada por

$$\vec{F}_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}$$

A grandeza aceleração independe da massa m_2

$$\vec{g} = -\frac{\vec{F}}{m} = \sum \vec{g}_i$$

Se houver um corpo contínuo, a somatória se transforma em uma integral

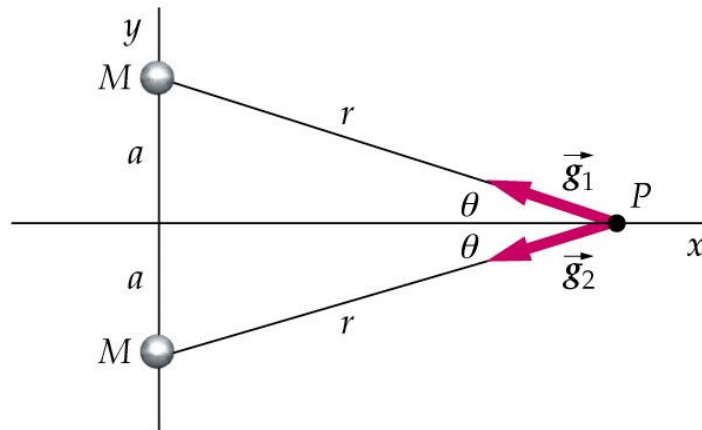
$$\vec{g} = -\frac{\vec{F}}{m} = \int d\vec{g}$$

O campo gravitacional da Terra para $r \geq R_T$ aponta para a Terra e tem magnitude $g(r)$ dada por

$$g(r) = \frac{F_g}{m} = \frac{GM_T}{r^2}$$

Campo Gravitacional

Duas Partículas Pontuais



O campo gravitacional gerado por cada uma das partículas tem magnitude:

$$g_1 = g_2 = \frac{GM}{r^2}$$

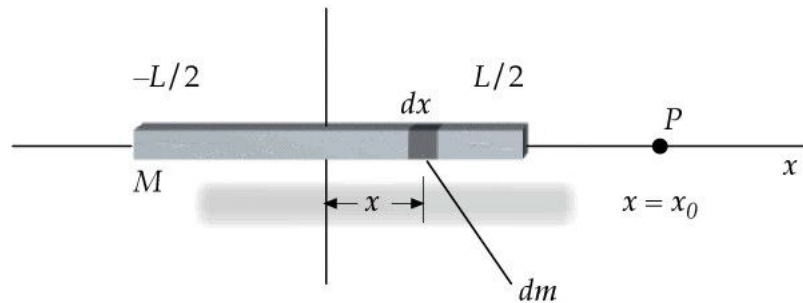
Como as componentes y dos campos gravitacionais se cancelam. O campo gravitacional resultante será dado pela soma das componentes x.

$$g_x = g_{1x} + g_{2x} = (g_1 + g_2) \cos \theta = \frac{2GM}{r^2} \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{x_P}{r} \quad \longrightarrow \quad \vec{g} = g_x \hat{i} = -\frac{2GM}{r^2} \frac{x_P}{r} \hat{i} = -\frac{2GMx_P}{r^3} \hat{i}$$

Portanto, em um ponto qualquer sobre o eixo x, temos:

$$\vec{g} = -\frac{2GMx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \hat{i}$$



Como se trata de um corpo extenso, vamos integrar o efeito gravitacional de toda a sua extensão

$$\vec{g} = -\frac{\vec{F}}{m} = \int d\vec{g}$$

A contribuição de um infinitéssimo dx da massa da barra dm , localizada na posição x , em um ponto P sobre o eixo x , é

$$\left. \begin{aligned} dg_x &= \frac{Gdm}{r^2} \\ dm &= \lambda dx = \frac{M}{L} dx \end{aligned} \right\} dg_x = \frac{G\lambda dx}{(x_0 - x)^2} \longrightarrow g_x = \int dg_x$$

Portanto, em um ponto sobre o eixo x ($x \geq L/2$), temos:

$$g_x = G\lambda \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx}{(x_0 - x)^2} = \frac{G\lambda}{x_0^2 - (L/2)^2} \longrightarrow \vec{g} = -\frac{GM}{x^2 - (L/2)^2} \hat{i}$$

Campo Gravitacional

Método atual de medida

Dois satélites gêmeos, lançados em 2002, se movem em órbitas idênticas, espaçados de 220 Km.

Quando eles se aproximam de um ponto com densidade de massa maior ou menor do que o valor médio, as velocidades dos satélites sofrem variações que alteram momentaneamente a distância entre eles.

Assim, a medida precisa da distância entre os satélites permite mapear o campo gravitacional terrestre.

Já vimos que o campo gravitacional fora da casca esférica é o mesmo que seria obtido se toda a massa estivesse concentrada no centro de massa.

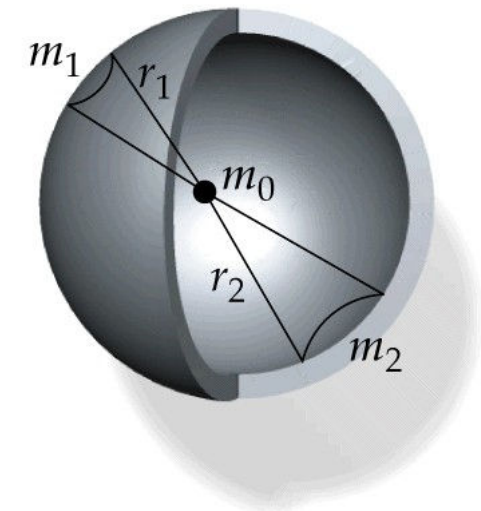
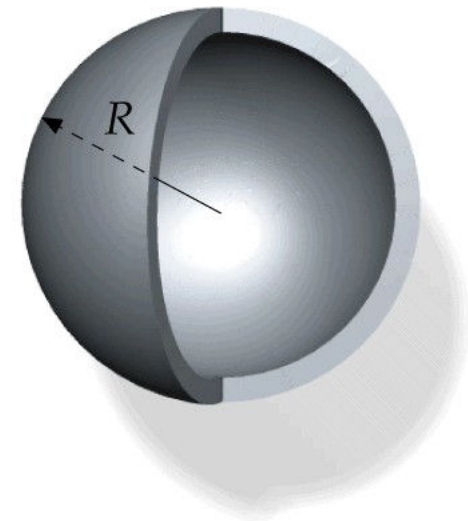
$$\vec{g} = -\frac{GM}{r^2} \hat{r}$$

Em um ponto qualquer no interior da casca esférica, temos que o efeito das massas m_1 e m_2 , são proporcionais às áreas ocupadas, A_1 e A_2 .

Mas, as áreas são proporcionais ao quadrado das distâncias r_1 e r_2 . Então, temos:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{m_1}{r_1^2} = \frac{m_2}{r_2^2}$$

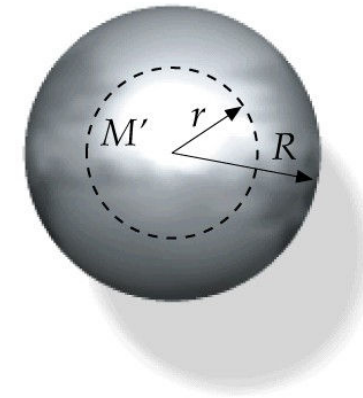
Então,
$$g_r = g_1 - g_2 = \frac{Gm_1}{r_1^2} - \frac{Gm_2}{r_2^2} = 0$$



$$\vec{g} = 0 \quad \text{para } r < R$$

Campo Gravitacional

Esfera Maciça e Homogênea

 $M = \text{total mass}$ 

Vamos usar o resultado para a casca esférica.

Dentro da esfera maciça, em um ponto a uma distância r do centro, o campo gravitacional será devido à massa M' que esteja em um raio inferior a r

$$M' = \frac{V'}{V} M = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} M = \frac{r^3}{R^3} M$$

$$g_r = \frac{GM'}{r^2} = \frac{GM}{r^2} \frac{r^3}{R^3}$$

Então,

$$\vec{g}_r = -\frac{GMr}{R^3} \hat{r}$$

para $r < R$

