4320196 – Física para Engenharia II - Prova Substitutiva - 2011

ATENÇÃO: Você fará QUATRO das questões a seguir, de acordo com a prova que foi perdida:

- **Sub da P1:** Q1, Q2 e Q3 são OBRIGATÓRIAS. Escolha UMA entre a Q4 e Q5.

- **Sub da P2 ou P3:** Escolha UMA entre a Q1 e a Q2. Questões Q3, Q4 e Q5 são OBRIGATÓRIAS.

Observações:

• Preencha todas as folhas com o seu nome, número USP, número da turma e nome do professor.
• A prova tem duração de 2 horas.
• Não somos responsáveis por provas com identificação insuficiente.
• Não é permitido o uso de calculadora e celular (manter desligado).
• Apresente sua identidade ou cartão USP ao assinar a lista de presença.
• Resolva cada exercício a partir da frente da folha de resposta com o mesmo número.
• **Justifique** todas as respostas com fórmulas, comentários (sucintos) e cálculos intermediários, não esquecendo das unidades das grandezas físicas.
• Caso apareça alguma raiz que não seja um quadrado perfeito, deixe indicado (não é necessário calcular o valor decimal).
• Resultados serão anunciados no site da disciplina.

Formulário:

$$c = 3 \times 10^8 \text{ m/s} \qquad \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & \gamma(v)\,(x - vt) \\ y' & = & y \\ z' & = & z \\ t' & = & \gamma(v)\left(t - \frac{v.x}{c^2}\right) \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} u'_x & = & \frac{u_x - v}{\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)} \\ u'_{y,z} & = & \frac{u_{y,z}}{\gamma(v)\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)} \end{array}\right.$$

$$\vec{p} = \gamma(u) m_0 \vec{u} \qquad E = \gamma(u) m_0 c^2$$

$$E = K + m_0 c^2 \qquad E^2 = (pc)^2 + \left(m_0 c^2\right)^2$$

$$\gamma_{(u)}^2 u^2 = \left(\gamma_{(u)}^2 - 1\right) c^2 \qquad m(u) = \gamma(u) m_0$$

Formulário (cont.):

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}; \;\; k = \left.\frac{d^2U(x)}{dx^2}\right|_{x=x_0}$$

$$x(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega t + \varphi); \;\; \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$$

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(ae^{\beta t} + be^{-\beta t}\right); \beta = \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$$

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(a + bt)$$

$$x(t) = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \Omega^2}\cos(\Omega t + \varphi)$$

$$x(t) = A(\Omega)\cos(\Omega t + \varphi(\Omega));$$

$$A(\Omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + \gamma^2\Omega^2}}; \tan\varphi(\Omega) = -\frac{\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

$$Q = \frac{A(\omega_0)}{A(0)}; Q = \frac{\omega_0}{\gamma}; \tau_d = \gamma^{-1}$$

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

$$y(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

$$y(x,t) = A\,\cos(kx \mp \omega t + \varphi)$$

$$v = \frac{\omega}{k};\; \tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f};\; k = \frac{2\pi}{\lambda}; v = \lambda.f$$

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}; I = \frac{1}{2}\mu v\omega^2 A^2; k_n = n\frac{\pi}{L}$$

$$\cos(a \pm b) = \cos(a)cos(b) \mp \text{sen}(a)\text{sen}(b)$$

$$\text{sen}(a \pm b) = \text{sen}(a)\cos(b) \pm \text{sen}(b)\cos(a)$$

$$f = f_0\frac{\left(1 \pm \frac{u}{v_s}\right)}{\left(1 \mp \frac{V}{v_s}\right)} \;\; \left\{\begin{array}{l} u \rightarrow \text{observador} \\ V \rightarrow \text{fonte} \end{array}\right.$$

$$f = f_0\frac{\sqrt{1 \mp \frac{v}{c}}}{\sqrt{1 \pm \frac{v}{c}}}\;;\; \text{sen}\,\alpha = \frac{v_s}{V}$$

$$m\vec{a'} = \vec{F} - m\vec{A} = \vec{F} + \vec{F_{\text{in}}}$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\hat{\theta}$$

$$\vec{F}_c + \vec{F}_{Cor} = \left(m\omega^2 r + 2m\omega u'_\theta\right)\hat{r} - 2m\omega u'_r\,\hat{\theta}$$

Q1 - (OBRIGATÓRIA para quem perdeu a P1) Em um futuro distante, um trem-bala que liga Curitiba ao Rio de Janeiro percorre 900 km (medidos em um referencial próprio ligado à Terra) a uma velocidade constante $v = 3c/5$. Assuma que o caminho é percorrido em linha reta.

(a) [0,5] Qual a duração da viagem, medida por um observador na Terra?

(b) [0,5] Para o condutor do trem, qual foi o tempo da viagem?

(c) [0,5] Para o condutor do trem, qual foi a distância percorrida?

(d) [0.5] É possível encontrar um referencial inercial em que a saída de Curitiba e a chegada no destino sejam eventos simultâneos? Explique.

(e) [0,5] O condutor do trem emite um sinal de rádio na direção de Curitiba no instante e posição em que, de acordo com o seu referencial, o trem chega na metade do trajeto. Quanto tempo depois da partida do trem esse sinal seria recebido, de acordo com a estação?

Solução Q1:

$v = \frac{3c}{5} \rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{9}{25}}} = \frac{5}{4}$

a) No Ref. S da Terra, $\Delta x = 900$ km $= 9 \times 10^5$ m.

Então $\Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{9.10^5.5}{3.3.10^8} = 5 \times 10^{-3}$ s.

b) No Ref. S' do condutor $\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{5.10^{-3}.4}{5} = 4 \times 10^{-3}$ s

c) No Ref. S', os pontos inicial e final se movem com velocidade $-v$.

Método 1: Assim, a distância entre eles será $\Delta x' = v.\Delta t' = \frac{3.3.10^8.4.10^{-3}}{5} = 36.20.10^3$ m $= 720$ km

Método 2: O comprimento próprio é $\Delta x = 900$ km então $\Delta x' = \frac{\Delta x}{\gamma} = \frac{900.4}{5} = 720$ km.

d) Não, pois $c\Delta t > \Delta x$. Assim, não haverá nenhum referencial inercial S'' tal que $\Delta t'' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c}\frac{\Delta x}{c}\right)$ seja negativo.

e) Relógios sincronizados em $t = t' = 0$ (trem sai da estação).

Evento 1: emissão do sinal. Coordenadas em S' : $x'_1 = 0; t'_1 = \frac{\Delta t'}{2}$

Coordenadas em S:

$x_1 = \gamma\left(x'_1 + vt'_1\right) = \gamma.v.\frac{\Delta t'}{2} = \frac{5}{4}.\frac{3c}{5}.2 \times 10^{-3} = 4,5 \times 10^5 = 450$ km.

$t_1 = \gamma\left(t'_1 + \frac{vx'_1}{c^2}\right) = \gamma\frac{\Delta t'}{2} = 2,5 \times 10^{-3}$ s.

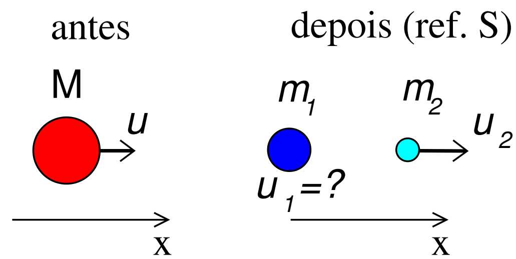
Evento 2: sinal chega no estação:

Coordenadas em S: $x_2 = 0$ $t_2 = ?$

Sinal viaja com velocidade $-c$, logo $t_2 - t_1 = \frac{x_2 - x_1}{-c}$

$\rightarrow t_2 = t_1 + \frac{x_1}{c} = 2,5 \times 10^{-3} + 1,5 \times 10^{-3} = 4 \times 10^{-3}$ s

Q2 - (OBRIGATÓRIA para quem perdeu a P1) Um objeto de massa de repouso M tem velocidade $u = \frac{3c}{5}$ em relação a um referecial inercial S. Em um dado momento, o objeto se quebra em dois corpos com massas de repouso m_1 e m_2 e velocidades u_1 e u_2 (em relação a S) respectivamente (vide figura). Sendo $m_2 = \frac{M}{4}$ e $u_2 = \frac{4c}{5}$:



(a) [0,6] Calcule u_1.

(b) [0,6] Calcule m_1.

(c) [0,6] Calcule a variação de energia cinética do sistema no referencial S.

(d) [0,7] Calcule as velocidades dos corpos 1 e 2 em relação a um outro referencial inercial S' que se move com velocidade $v = \frac{3c}{5}$ (na direção x positiva) em relação a S.

Solução Q2:

$u = \frac{3c}{5} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{9}{25}}} = \frac{5}{4}$

$u_2 = \frac{4c}{5} \Rightarrow \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{16}{25}}} = \frac{5}{3}$

a) Cons. momento: $\gamma.M.u = \gamma_1.m_1.u_1 + \gamma_2.m_2.u_2$

$\Rightarrow \gamma_1.m_1.u_1 = \gamma.M.u - \gamma_2.m_2.u_2 = \frac{5M}{4}\frac{3c}{5} - \frac{5M}{12}\frac{4c}{5} = \frac{5Mc}{12}$

Cons. energia: $\gamma.M.c^2 = \gamma_1.m_1.c^2 + \gamma.M.c^2$

$\Rightarrow \gamma_1.m_1 = \gamma.M - \gamma_2.m2 = \frac{5M}{4} - \frac{5M}{12} = \frac{5M}{6}$

Logo: $\frac{5M}{6}u_1 = \frac{5Mc}{12} \Rightarrow u_1 = \frac{c}{2}$

b) $\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Logo

$\frac{2\sqrt{3}}{3}.m_1 = \frac{5M}{6} \Rightarrow m_1 = \frac{5\sqrt{3}}{12}M$

c) Inicial: $E_i = K_i + Mc^2 = \gamma Mc^2 \Rightarrow K_i = (\gamma - 1)Mc^2 = \frac{Mc^2}{4}$.

Final: $E_f = E_1 + E_2 = K_f - (m_1c^2 + m_2c^2)$

$\Rightarrow K_f = m_1c^2(\gamma_1 - 1) + m_2c^2(\gamma_2 - 1) = \frac{5\sqrt{3}}{12}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1\right)Mc^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{5}{3} - 1\right)Mc^2 = \left(1 - \frac{5\sqrt{3}}{12}\right)Mc^2$

Logo

$\Delta K = K_f - K_i = \left(9 - 5\sqrt{3}\right)\frac{Mc^2}{12}$

d) Em S' ($v = +\frac{3c}{5}$):

$u_1' = \frac{u_1 - v}{1 - \frac{u_1 v}{c^2}} = \frac{\frac{c}{2} - \frac{3c}{5}}{1 - \frac{3}{10}} = \frac{-c}{7}$

$u_2' = \frac{u_2 - v}{1 - \frac{u_2 v}{c^2}} = \frac{\frac{4c}{5} - \frac{3c}{5}}{1 - \frac{12}{25}} = \frac{5c}{13}$

Q3 - (OBRIGATÓRIA para TODOS) Um corpo de massa $m_1 = 2$ kg é preso a uma mola de constante $k = 8$ N/m e oscila com período $T = 6,28$ s. (use $\pi \approx 3,14$)

(a) [0,5] O movimento é amortecido? Justifique com cálculos.

(b) [0,5] Se a resposta ao ítem (a) for positiva, calcule a constante de amortecimento b (sendo a força de amortecimento dada por $-b\dot{x}$).

(c) [0,5] O corpo é desconectado da mola e, em seu lugar, é preso um segundo corpo de massa $m_2 = 3/2$ kg. Qual o regime de oscilação nesse caso? Justifique.

(d) [1,0] Sabendo que o novo corpo ($m_2 = 3/2$ kg) parte da posição $x_0 = 0,1\sqrt{3}$ m com velocidade $v_0 = +0,6$ m/s, determine sua posição em função do tempo $x(t)$ (considere a posição de equilíbrio como $x = 0$).

Solução Q3:

a) $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$ rad/s e $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_1}} = \sqrt{4} = 2$ rad/s

Logo, $\omega < \omega_0$ de modo que, sim, o movimento é amortecido.

b) $\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4} \Rightarrow \frac{\gamma^2}{4} = \omega^2 - \omega_0^2 = 3 \Rightarrow \gamma = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ s^{-1}

Ou seja:

$b = m.\gamma = 4\sqrt{3}$ kg/s

c) $m_2 = 3/2 \Rightarrow \gamma_2 = \frac{b}{m_2} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ s^{-1}.

E ainda, a frequência natural do sistema muda: $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m_2}} = \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

Logo $\frac{\gamma_2}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$s^{-1} $= \omega_2 \rightarrow$ movimento em amortecimento crítico.

d) Solução: $x(t) = e^{-\frac{\gamma_2}{2}t}(a + bt)$; $\dot{x}(t) = e^{-\frac{\gamma_2}{2}t}\left[-\frac{\gamma_2}{2}(a + bt) + b\right]$

Condições iniciais: $x(0) = 0,1\sqrt{3}$ m; $\dot{x}(0) = +0,6$ m/s. Temos ainda $\frac{\gamma_2}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ s^{-1}

Como $x(0) = a$ e $\dot{x}(0) = -\frac{\gamma_2}{2}a + b$, temos

$a = 0,1\sqrt{3}$ m

e

$b = \frac{4\sqrt{3}}{3}a + \dot{x}(0) = 0,4 + 0,6 = 1$ m/s

Logo

$x(t) = e^{-\frac{4\sqrt{3}}{3}t}(0,1\sqrt{3} + t)$ m.

Q4 - (OBRIGATÓRIA para para quem perdeu a P2 ou P3) Considere um pêndulo simples de comprimento ℓ e massa m suspenso no teto de um carro que está inicialmente em repouso.

(a) [0,5] Escreva a equação diferencial de movimento para o ângulo com a vertical $\theta(t)$ e calcule a frequência de oscilação do pêndulo no limite de pequenas amplitudes de vibração.

Considere agora que o carro está se deslocando em velocidade constante v em uma trajetória circular de raio R. No referencial S' que se move com o carro:

(b) [0,5] Desenhe um diagrama com todas as forças (reais e inerciais) atuando sobre a massa m.

(c) [0,75] Calcule o ângulo θ_0 (em relação à vertical) correspondente à posição de equilíbrio.

(d) [0,75] Escreva a equação diferencial de movimento e calcule a frequência de oscilação do pêndulo no limite de pequenas oscilações em torno da posição de equilíbrio nesse caso.

Solução Q4:

a) Torque da força gravitacional: $\tau(\theta) = -mg\ell\text{sen}(\theta)$

$\frac{dL}{dt} = \tau \Rightarrow m\ell^2\ddot{\theta} = -mg\ell\text{sen}(\theta)$

$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\text{sen}(\theta)$

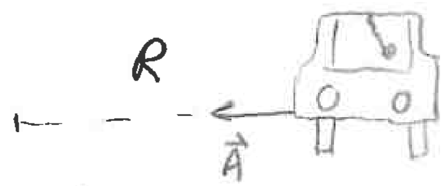
Para $\theta \approx 0 \rightarrow \text{sen}(\theta) \approx \theta$ e

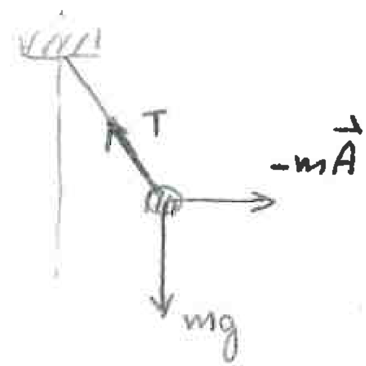
$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\theta = -\omega_0^2\theta$

onde $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ é a frequencia de pequenas oscilações em torno de $\theta = 0$.

b)

Q4 - b)





c) Aceleração centrípeta da massa em S': $A = \frac{v^2}{R}$ (considerando $R \gg \ell$).

Em equilíbrio:

$$\begin{cases} T\text{sen}(\theta_0) &= mA \\ T\cos(\theta_0) &= mg \end{cases} \Rightarrow \tan(\theta_0) = \frac{A}{g} = \frac{v^2}{gR} \Rightarrow \theta_0 = \text{arctg}\left(\frac{v^2}{gR}\right)$$

d) Torque externo total (desprezando a Força de Coriolis devido ao movimento do pêndulo): $\tau(\theta) = -mg\ell\text{sen}(\theta) + mA\ell\cos(\theta)$

$\frac{dL}{dt} = \tau \Rightarrow m\ell^2\ddot{\theta} = -m\ell\left(g\text{sen}(\theta) - A\cos(\theta)\right)$

$\ddot{\theta} = -\frac{1}{\ell}\left[g\text{sen}(\theta) - \frac{v^2}{R}\cos(\theta)\right]$

Frequência de pequenas oscilações em torno de θ_0:

Expandindo em torno de θ_0:

$\text{sen}(\theta) \approx \text{sen}(\theta_0) + \cos(\theta_0)\left(\theta - \theta_0\right)$ e $\cos(\theta) \approx \cos(\theta_0) - \text{sen}(\theta_0)\left(\theta - \theta_0\right)$

Logo:

$\ddot{\theta} = -\frac{1}{\ell}\left[g\cos(\theta_0)\left(\theta - \theta_0\right) + \frac{v^2}{R}\text{sen}(\theta_0)\left(\theta - \theta_0\right) + g\text{sen}(\theta_0) - \frac{v^2}{R}\cos(\theta_0)\right]$

Usando o resultado de (c), temos $g\text{sen}(\theta_0) = \frac{v^2}{R}\cos(\theta_0)$, logo

$\ddot{\theta} = -\frac{g\cos(\theta_0)}{\ell}\left[1 + \frac{v^4}{g^2R^2}\right]\left(\theta - \theta_0\right) = -\frac{g\cos(\theta_0)}{\ell}\left[1 + \tan^2(\theta_0)\right]\left(\theta - \theta_0\right) = -\omega_1^2\left(\theta - \theta_0\right)$

Assim, definindo $\theta_1 = \theta - \theta_0$, temos $\ddot{\theta}_1 = -\frac{g}{\ell}\theta_1 = -\omega_1^2\theta_1$

onde $\omega_1 = \sqrt{\frac{\cos(\theta_0)g}{\ell}\left[1 + \tan^2(\theta_0)\right]} = \sqrt{\frac{g}{\ell\cos(\theta_0)}}$

Solução alternativa para ω_1 assumindo θ_0 pequeno:

Considerando θ, θ_0 pequenos, temos $\text{sen}(\theta) \approx \theta$ e $\cos(\theta) \approx 1$ e $\text{tg}(\theta_0) \approx \theta_0$, logo:

$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\left(\theta - \frac{v^2}{gR}\right) = -\frac{g}{\ell}\left(\theta - \theta_0\right)$

Assim, definindo $\theta_1 = \theta - \theta_0$, temos

$\ddot{\theta_1} = -\frac{g}{\ell}\theta_1 = -\omega_1^2\theta_1$

onde $\omega_1 \approx \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ é a frequência de pequenas oscilações em torno de $\theta = \theta_0$.

Q5 - (OBRIGATÓRIA para para quem perdeu a P2 ou P3) Uma corda tem comprimento $L = 50$ cm e massa $m = 5$ g, está presa em ambas as extremidades (a tensão na corda é $T = 100$ N) e oscila com frequência f no primeiro harmônico.

(a) [0,5] Calcule a frequência f da onda na corda.

(b) [1,0] Se a amplitude do ventre é 1 mm e a constante de fase da onda é $\varphi = 0$, escreva a função $y(x,t)$ que descreve o deslocamento vertical da corda (extremidades em $x = 0$ e $x = L$).

(c) [0,5] Determine a variação de tensão na corda para que a frequência do primeiro harmônico passe a ser 110 Hz (nota "lá").

(d) [0,5] Uma das extremidades da corda passa a poder se mover verticalmente e a corda passa a oscilar no primeiro harmônico dessa nova configuração. Determine a nova frequência de oscilação f' nesse caso.

Solução Q5:

Densidade: $\mu = m/L = \frac{5\times10^{-3}}{5\times10^{-1}} = 0,01$ kg/m

a) $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{100}{0{,}01}} = \sqrt{10000} = 100$ m/s

1o Harmônico: $\lambda_1 = 2L \Rightarrow f_1 = \frac{v}{2L} = \frac{100}{1} = 100$ Hz

b) Onda estacionária: $y(x,t) = A(x)\cos\omega t + \varphi = A(x)\cos 2\pi f t$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{d^2A(x)}{dx^2} = -k^2A(x) \Rightarrow A(x) = A\text{sen}(kx) + B\cos(kx)$$

Condições de contorno: $A(0) = A(L) = 0 \Rightarrow B = 0$, $kx = n\pi$

No primeiro harmônico ($n = 1$) $k_1 = \frac{\pi}{L}$:

$A(x) = A\text{sen}(\frac{\pi}{L}x) = A\text{sen}(2\pi x)$

Como a amplitude do ventre é $A = 10^{-3}$ m, temos:

$y(x,t) = 0,001\text{sen}(2\pi x)\cos(200\pi t)$

c) $f_1 = 110$ Hz.

Como $f_1^2 = \frac{v_1^2}{4L^2} = \frac{T_1}{4\mu L^2} \Rightarrow T_1 = 4\mu L^2 f_1^2 = 4.(0,01).(0,25).12100 = 121$ N

ou seja $T_1 = 121$ N. Variação de tensão: $\Delta T = T_1 - T = 21$ N.

d) Extremidade livre, condição de contorno: $\frac{dA}{dx}\Big|_{x=L} = 0 \Rightarrow A\cos(kL) = 0 \Rightarrow kL = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

Primeiro Harmônico ($n = 0$): $k_1 = \frac{\pi}{2L} \Rightarrow \lambda_1 = 4L$

Logo $f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{100}{2} = 50$ Hz.