MATÉRIA 1

DATA

PTC 2419 - Controle Digital

Prof. Riccardo

Sala C2-01

email: rpm@lac.usp.br

Programa

1. Introdução

2. Sinais amostrados; Conversores A/D e D/A; Transformada Z; Função de Transferência; Estabilidade; outros tópicos básicos

3. Aproximações discretas, outros tópicos relacionados

4. Controladores PID discretos

5. Técnicas de projeto discreto: LGR, Projeto algébrico, Projeto no domínio da frequência, etc

Referências

Ogata K. Discrete-time control systems, 2nd ed. (1st ed também serve)

Franklin G.F., Powell J.D., Workman M.L. Digital Control of Dynamic Systems 3r.ed. (outras edições servem)

Castrucci P.B.L., Moura Sales, R., Controle Digital

MATÉRIA 2

DATA

Avaliação

$$\text{Média} = \frac{P1 + P2 + P3}{3}$$

sem prova substitutiva!

eventuais trabalhos com o Matlab poderão melhorar a nota.

Requisitos

Conhecimentos de Controle I

Outros

Matlab (qq versão - se mais recente melhor)

Moodle : http://moodle.stoa.usp.br

MATÉRIA 3

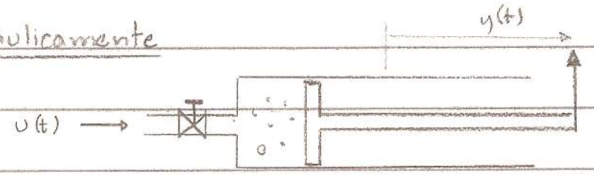
1. Introdução

Controle digital = "Controle para computadores"

A partir dos anos 30, com o advento da teoria de controle, implementar um controlador passou a significar também "realizar fisicamente a solução de uma equação diferencial".

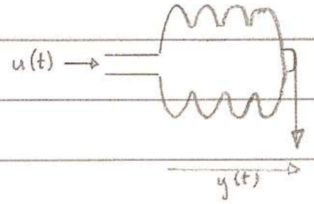
Exemplo: $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s}$; (um integrador)

Hidraulicamente



O deslocamento y(t) do pistão é proporcional à integral da vazão volumétrica u(t)

Pneumaticamente

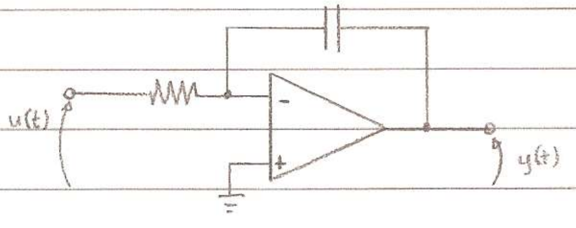


O deslocamento y(t) do fole é proporcional à integral da vazão volumétrica y(t)

MATÉRIA 4

DATA

<u>Eletrônica analógica</u>



A tensão y(t) é proporcional à integral da tensão u(t)

Isso é computação analógica!

<u>Em computador</u>

? $\boxed{\text{(ver fotos históricas)}}$

Quais são os pontos relevantes para implementação em computador?

Um pouco de terminologia

CAD: (computer aided design) computador como ferramenta para projeto (desde os anos 40)

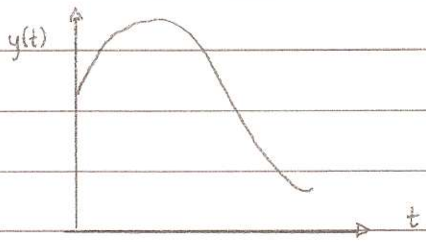
Supervisory Control: computador faz otimização e geração de setpoints (1954 - Digitac - navegação)
(1959 - RW300 - refinaria)

DDC: (direct digital control) a malha é fechada através do computador
(1959 - RW300 - refinaria)
(1962 - Ferranti 200 - processo químico)

Principal diferença: um computador trabalha a tempo discreto com grandezas quantizadas. Não resolve eq. diferenciais, só implementa algoritmos

2. Tópicos básicos

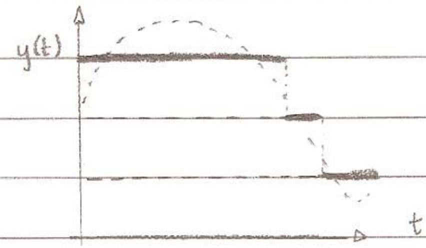
2.1 Quantização & Discretização

a) 

t é contínuo

y(t) é contínuo

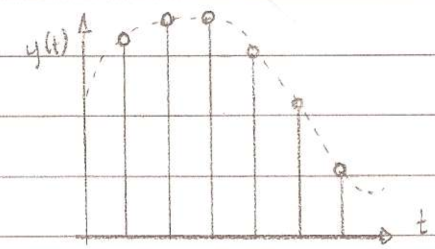
"sinal analógico de tempo contínuo"

b) 

t é contínuo

y(t) é quantizado

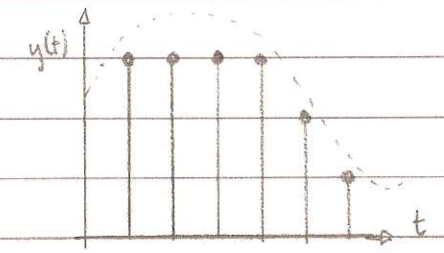
"sinal quantizado de tempo contínuo"

c) 

t é discreto

y(t) é contínuo

"sinal amostrado"

d) 

t é discreto

y(t) é quantizado

"sinal digital"

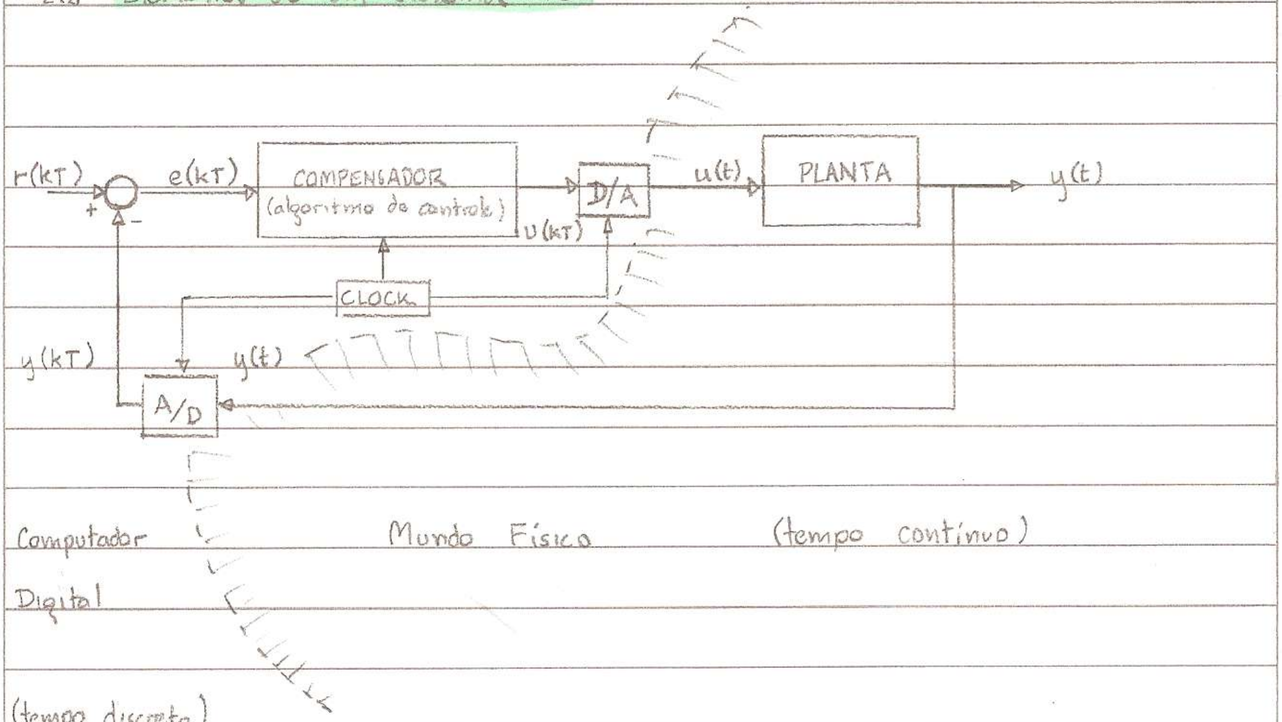
Ver quantization.m

Só nos interessa o caso em que $t \in \{0, T, 2T, 3T, \dots\}$ com $T \in \mathbb{R}^{*+}$ constante ("amostragem periódica"), ou seja $t = kT$ para $k \in \mathbb{N}^+$. T é chamado "período de amostragem".

Vamos usualmente ignorar os efeitos da quantização, salvo quando eles forem importantes. (às vezes podem ocorrer problemas)

AULA 2 2008/2009

2.2 Elementos de um sistema DDC



Computador Digital

(tempo discreto)

Mundo Físico (tempo contínuo)

A/D : Conversor analógico digital

Discretiza o sinal a uma dada frequência

Quantiza o sinal. Hoje em dia são usuais conversores A/D de 10 a 24 bits para um determinado range de entrada.

10 bits : 2^{10} valores = 1024 valores ≈ 0,098 % do range

24 bits : 2^{24} valores = 16 777 216 valores ≅ 0,000 006 % do range

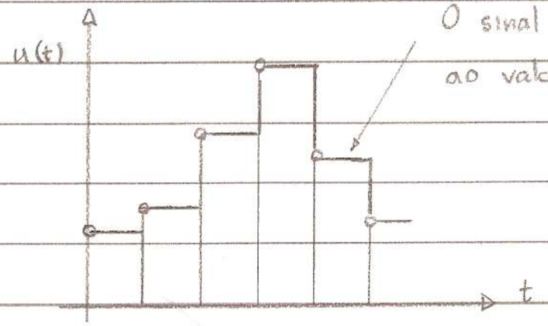
MATÉRIA 7

D/A : Conversor digital analógico

Converte o sinal discreto num sinal contínuo a uma dada frequência. O sinal discreto (quantizado ou não) é quantizado pelo D/A. Hoje em dia são usuais conversores A/D de 8 a 16 bits para um determinado range de saída.

Os D/As utilizam circuitos seguradores (holders) para preencher os espaços entre os instantes de amostragem.

O mais comum (de longe) é o segurador de ordem zero (zero-order holder - ZOH)



O sinal é constante e igual ao valor anterior.

ALGORITMO DE CONTROLE:

O objeto principal do curso!

Pontos importantes:

É uma sequência de operações, obrigatoriamente discreta.

Os computadores também quantizam os dados.

Em ponto Fixo : 8, 16 bits usualmente

Em ponto flutuante : 32 ou 64 bits usualmente

Em condições especiais, mesmo 64 bits de quantização podem causar problemas (a discutir no futuro)

MATÉRIA 8 — DATA

CLOCK: Controla a frequência de amostragem

PLANTA: Sistema físico (ou não) a ser controlado

Plantas físicas existem a tempo contínuo

Sinais contínuos

u(t) entrada da planta ; saída do controlador // variável manipulada

y(t) saída da planta // variável controlada

Sinais discretos

u(kT) saída discreta do controlador

y(kT) saída discretizada da planta

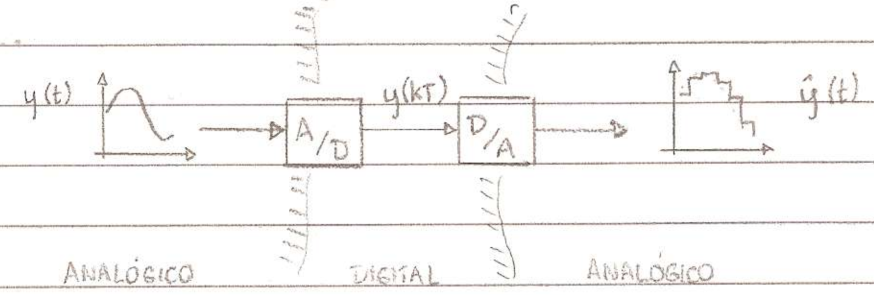
r(kT) referência // set point

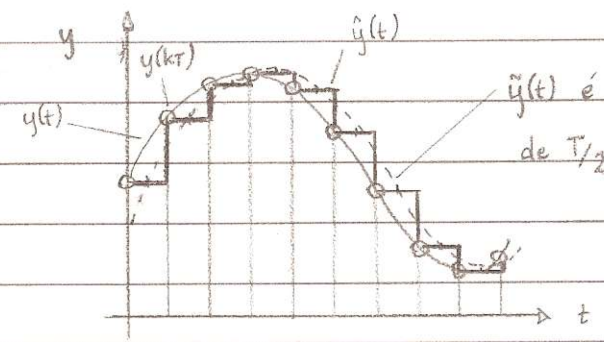
e(kT) erro

2.3 Efeitos do ZOH

O segurador de ordem zero tem influência sobre o sinal

Considere a configuração abaixo (desprezando erros de quantização)





Pergunta: Qual sinal se parece mais com $\hat{y}(t)$

$y(t)$

ou

$\tilde{y}(t)$ ⟵ Resposta: $\tilde{y}(t)$!

Condusão: A "distorsão" introduzida pelo ZOH pode ser aproximada por um atraso de meio período de amostragem

Esse "atraso" pode ser importante e ter que ser levado em conta no projeto do controle ou ser ignorado se a frequência for alta o suficiente. (T pequeno) (a discutir no futuro)

2.4 Escolha de T

A escolha de T deve ser adequada à planta.

$f = 1/T$ muito baixa: subamostragem
Causa problemas óbvios

$f = 1/T$ muito alta: superamostragem
Pode causar problemas nada óbvios
- problemas numéricos
- problemas com ruídos
- viabilidade técnica / econômica
(frequência custa caro!)

(a discutir no futuro)

AULA3 → 2008

2.5 Alguns aspectos de amostragem

Teorema da amostragem

Para que um sinal com banda limitada f_N (i.e. sem componentes espectrais para frequências maiores que f_N) possa ser reconstruido completamente, ele deve ser amostrado a uma frequência $f > 2 f_N$.

$f = 1/T$ é a frequência de amostragem

f_N é a frequência de Nyquist

Importante: "reconstruido totalmente" quer dizer que as componentes frequenciais do sinal original podem ser identificadas e recuperadas a partir do sinal amostrado. NÃO quer dizer que o sinal amostrado seja uma representação perfeita (ou sequer boa) do sinal original, especialmente para aplicações de controle

O que ocorre se houver componentes acima de f_N no sinal amostrado?

Ocorre "aliasing" (êi-lia-zin)

Exemplo: $\boxed{\text{Ver aliasing.m}}$

Consequência: Todo conversor A/D deve ter um filtro passa-baixa analógico na entrada, preferencialmente com uma banda folgadamente menor que f_N (filtro anti-aliasing)

(um ruído de alta frequência pode ser coletado como se fosse de baixa frequência)

2.6 Alguns aspectos dos algoritmos digitais de controle

Este curso é análogo ao de Controle I, então estudaremos técnicas análogas às daquele curso.

Uma das vantagens do controle por computadores é a flexibilidade. Praticamente qualquer estratégia de controle (não-linear, controle especialista, regras, otimização, etc) pode ser implementada em computador, mas nesse curso isso não será abordado.

Por outro lado, as implementações de controladores lineares são usualmente melhores em computador do que as pneumáticas, hidráulicas, eletrônicas, etc. (principalmente por questões construtivas).

Hoje em dia, implementações digitais tomaram o lugar das analógicas, exceto nos casos extremos ou mais simples.

simples:
* implementação analógica mais barata que a digital
* controle incorporado ao sensor ou atuador
  e.g. bimetais, bulbos
  válvulas com molas

extremos:
* velocidade extrema
* ambiente agressivo ou explosivo
* precisão extrema (somente aplicações científicas)

2.7 Transformada Z

Em Controle I: Plantas, Controladores (SLITs) descritos por equações diferenciais.

Ferramenta: Transformada de Laplace (1782)

Em Controle Digital: Equações de diferenças

e.g. $y(kT) = y((k-1)T)/2$

Ferramenta: Transformada Z (Eliahu Jury · 1958)

AULA 4 → 2009

Definição:

Seja um sinal $f(t)$ a tempo discreto igual a $\{f(0), f(T), f(2T), \ldots\}$. A transformada Z unilateral deste sinal é dada por

$$\mathcal{Z}[f(t)] = F(z) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k}$$

onde z é uma variável complexa. (convergencia, etc. Ver livros)

A transformada Z é um artifício matemático que permitirá transformas equações de diferenças em equações polinomiais, com grandes vantagens para projeto e análise de controladores e sistemas em geral.

AULA 4 → 2008

Daqui por diante vamos tirar o T da nossa notação, ou seja

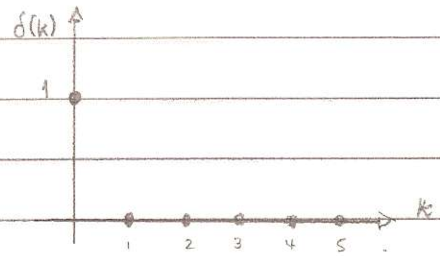
$f(kT) \to f(k)$

(vamos assumir sem perda de generalidade que $T=1$)

Transformada Z de algumas funções interessantes

a) Impulso unitário $\delta(k)$ (delta de Kronecker)

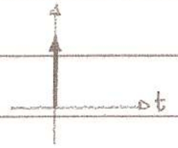
$$\delta(k) = \begin{cases} 1 \; ; & k = 0 \\ 0 \; ; & k \neq 0 \end{cases}$$



daí $\Delta(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(k)\, z^{-k} = 1$

Esta será uma das funções mais interessantes para o curso.

OBS: A função impulso $\delta(t)$ (delta de Dirac) (di rác)



é tal que

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \Delta(s) = 1$$

b) Degrau unitário $\mathbb{1}(k)$

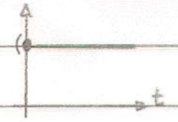
$$\mathbb{1}(k) = \begin{cases} 1 ; & k \geq 0 \\ 0 ; & k < 0 \end{cases}$$

daí $\mathbb{1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}(t)\, z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \ldots$

A série converge se $|z| < 1$ (é o caso em que utilizaremos):

$$\mathbb{1}(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

OBS: A função $\mathbb{1}(t)$



(função de Heaviside)

é tal que

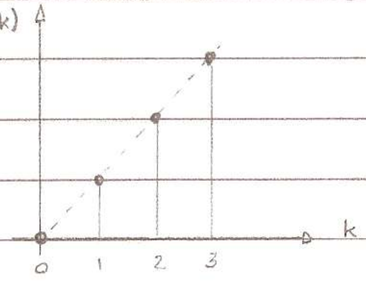
$$\mathcal{L}[\mathbb{1}(t)] = \mathbb{1}(s) = \frac{1}{s}$$

Função útil para:

- padronizar análise de resposta de sistemas
- setpoints.

c) Rampa unitária

$$f(k) = \begin{cases} kT & \text{se } k \geq 0 \\ 0, & \text{se } k < 0 \end{cases}$$

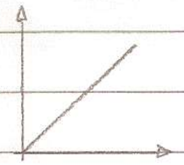


daí $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} = 0 + Tz^{-1} + 2Tz^{-2} + 3Tz^{-3} + \dots$

daí
$$\frac{F(z)}{T} = z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \dots =$$
$$= (z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots) + (z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + \dots) + (z^{-3} + z^{-4} + \dots) + \dots$$
$$= \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} + \frac{z^{-2}}{1-z^{-1}} + \frac{z^{-3}}{1-z^{-1}} + \dots$$
$$= \frac{1}{1-z^{-1}} (z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots) = \frac{1}{(1-z^{-1})} \cdot \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})}$$

então
$$F(z) = \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \frac{Tz}{(z-1)^2}$$
(assumindo convergência)

OBS: A função $f(t)$



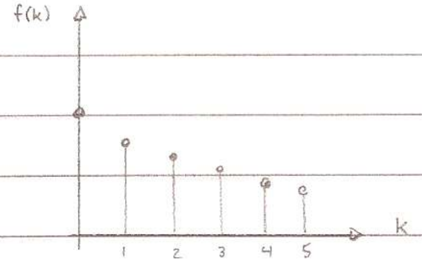
é tal que

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \frac{1}{s^2}$$

Mais comum que degraus em sistemas industriais

d) Exponencial

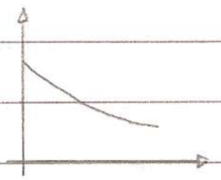
$$f(k) = \begin{cases} e^{-akT} & \text{se } k \geq 0 \\ 0 & \text{se } k < 0 \end{cases}$$



daí $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} = 1 + e^{-aT} z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2} + \dots$

$$F(z) = \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

OBS: A função $f(t)$



é tal que

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \frac{1}{s+a}$$

e) Sequência a^k

$$f(k) = \begin{cases} a^k & \text{se } k \geq 0 \\ 0 & \text{se } k < 0 \end{cases} \quad ; \quad F(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z+a}$$

f) Função seno

$$f(k) = \begin{cases} \text{sen}(\omega(kT)) & , \text{se } k \geq 0 \\ 0 & \text{se } k < 0 \end{cases} \quad ; \quad F(z) = \frac{z . \text{sen}(\omega T)}{z^2 - 2z\cos(\omega T) + 1}$$

g) Função cosseno

$$f(k) = \begin{cases} \cos \omega(kT) & ; \text{se } k \geq 0 \\ 0 & ; \text{se } k < 0 \end{cases} \quad ; \quad F(z) = \frac{z^2 - z.\cos(\omega T)}{z^2 - 2z\cos(\omega T) + 1}$$

Propriedades da Transformada Z

a) Linearidade

Sejam $f(k), g(k)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$Z[\alpha f(k) + \beta g(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha f(k) + \beta g(k)) z^{-k} =$$

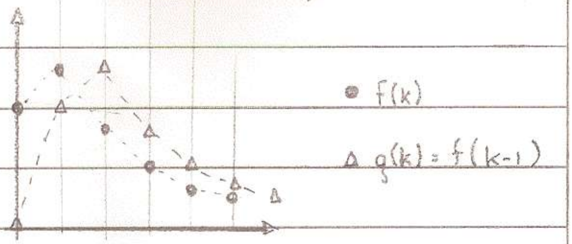
$$= \alpha \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} + \beta \sum_{k=0}^{\infty} g(k) z^{-k} = \alpha F(z) + \beta G(z)$$

b) Atraso

Sejam $f(k), g(k)$ tais que

$$g(k) = \begin{cases} f(k-n) & ; k \geq n \\ 0 & ; k < n \end{cases}$$

Ex.



Seja $m = k - n$, daí

$$G(z) = \sum_{m=0}^{\infty} f(m)\, z^{-(m+n)} =$$

$$= z^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} f(m)\, z^{-m} = z^{-n} F(z)$$

$$\boxed{G(z) = z^{-n} F(z)}$$

c) Avanço

Sejam $f(k), h(k), \hat{h}(k)$ tais que

$$\hat{h}(k) = \begin{cases} f(k+n) & ; \text{ se } k \geq -n \\ 0 & ; \text{ se } k < -n \end{cases}$$ (ops! definida p/ $k < 0$)

e

$$h(k) = \begin{cases} f(k+n) & ; \text{ se } k \geq 0 \\ 0 & ; \text{ se } k < 0 \end{cases}$$ (devidamente truncada)

Seja $m = k + n$, daí

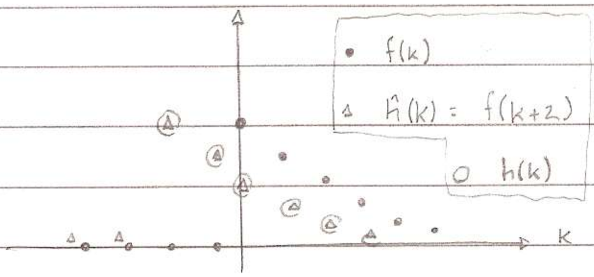
termos "avançados" de antes do zero.

$$H(z) = \sum_{m=n}^{\infty} f(m)\, z^{-(m-n)} = z^{n} \left(\sum_{m=0}^{\infty} f(m)\, z^{-m} - \sum_{m=0}^{n-1} f(m)\, z^{-m} \right) =$$

"condições iniciais"

$$\Rightarrow H(z) = z^{n} \left(F(z) - \sum_{m=0}^{n-1} f(m)\, z^{-m} \right)$$

Ex.



MATÉRIA 18

DATA

OBS: Isso nos sugere encarar "z" como se fosse um "operador avanço"

multiplicar por "z" → avança o sinal

dividir por "z" → atrasa o sinal

Lembrar de "s" que podia ser encarado como um "operador derivada" em tempo contínuo

multiplicar por "s" → deriva o sinal

dividir por "s" → integra o sinal

Ir para pág. 18-A

AULA 5 → 2008 2009

Função de transferência

Seja um sistema dinâmico Γ a tempo discreto.

A entrada e a saída são sequências de números.

A dinâmica do sistema pode ser descrita por uma equação de diferenças. Para um sistema SLIT:

$$u(k) \rightarrow \boxed{\Gamma} \rightarrow y(k)$$

$$y(k+n) + a_{n-1}\, y(k+n-1) + a_{n-2}\, y(k+n-2) + \ldots + a_0\, y(k) =$$

$$= b_m\, u(k+m) + b_{m-1}\, u(k+m-1) + b_{m-2}\, u(k+m-2) + \ldots + b_0\, u(k)$$

"n" é a ordem do sistema

a_i, b_i coeficientes constantes

A transformada Z é uma boa ferramenta para se trabalhar com a equação acima.

MATÉRIA 18-A

Teoremas úteis

Teorema do valor inicial

Seja $F(z)$ a transformada Z de um sinal $f(k)$

O valor inicial $f(0)$ é dado por

$$f(0) = \lim_{k \to 0^+} f(k) = \lim_{z \to \infty} F(z)$$ se os limites existirem.

lembrando que $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} = f(0) + f(1) z^{-1} + f(2) z^{-2}$, quando $z \to 0$, resta apenas o termo $f(0)$

Exemplo: valor inicial do degrau unitário:

$$\mathbb{1}(z) = \frac{z}{z-1} \quad ; \quad 1(0) = \lim_{z \to \infty} \frac{z}{z-1} = 1$$

OBS: Em tempo contínuo com transformada de Laplace

$$f(0) = \lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$$

(se os limites existirem)

Teorema do valor final

Seja $F(z)$ a transformada Z de um sinal $f(k)$ e seja $f_\infty = \lim_{k \to \infty} f(k)$. f_∞ é dado por

$$f_\infty = \lim_{k \to \infty} f(k) = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) F(z)$$

se os limites existirem

(a prova é simples, porém mais longa)

Exemplo: valor final do degrau unitário:

$$1_\infty = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) \frac{z}{z-1} = \lim_{z \to 1} \frac{z-1}{z} \cdot \frac{z}{z-1} = 1$$

MATÉRIA 18-B

DATA

OBS: Em tempo contínuo

$$f_\infty = \lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} s.F(s)$$

(se os limites existirem)

OBS: Analogia

tempo (t,k)	"s"	"z"
$\to 0^+$	$\to \infty$	$\to \infty$
$\to \infty$	$\to 0$	$\to 1$

Voltar para pag. 18

Vamos desprezar as condições iniciais e aplicar a transformada Z

$z^n Y(z) + a_{n-1} z^{n-1} Y(z) + \dots + a_0 Y(z) =$

$= b_m z^m U(z) + b_{m-1} z^{m-1} U(z) + \dots b_0 U(z) \Rightarrow$

$\Rightarrow (z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0) Y(z) = (b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0) U(z)$

$$\Rightarrow \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0}$$

Vamos definir o que é função de transferência:

$$G(z) \triangleq \left.\frac{Y(z)}{U(z)}\right|_{\text{c.i nulas}}$$

no nosso exemplo de estrutura: $G(z) = \dfrac{Y(z)}{U(z)} = \dfrac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0}$

OBservações:

* Porque desprezar condições iniciais?
  Porque assim a FT só depende da estrutura do sistema (ela descreve o sistema e não um contexto específico). Serve para entradas e saídas genéricas
* A FT descreve um sistema. Ela não é a transformada de uma sequência temporal (mesmo que a notação seja muito parecida)

* Se o grau do numerador for maior que o grau do denominador o sistema é "não causal"

MATÉRIA 20

DATA

$m > n$; FT imprópria (sistema não causal)

$m = n$; FT própria, tbm biprópria (difícil de implementar)

$m < n$; FT estritamente própria (o tipo que preferimos)

* Note que

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_m z^{m-n} + b_{m-1} z^{m-n-1} + \dots + b_0 z^{-n}}{1 + a_{n-1} z^{-1} + \dots + a_0 z^{-n}}$$

basta multiplicar por $\frac{z^{-n}}{z^{-n}}$. Esta forma é menos intuitiva, mas a implementação é direta. Elas são equivalentes a menos de condições iniciais (que desprezamos)

Exemplos $U(z) \longrightarrow \boxed{G(z)} \longrightarrow Y(z)$

a) Seja $G(z) = \frac{2z^2}{z^3}$ (estritamente própria)

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{2z^2}{z^3} \Rightarrow z^3 Y(z) = 2z^2 U(z)$$

No domínio do tempo: $y(k+3) = 2u(k+2)$ (sabemos anti-transformar!)

ou

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^{-3} \cdot 2z^2}{z^{-3} \cdot z^3} = \frac{2z^{-1}}{1} \Rightarrow Y(z) = 2z^{-1} U(z)$$

No domínio do tempo: $y(k) = 2u(k-1)$

MATÉRIA 21

Implementação no computador

Início: UK_1 = 0;

Loop: (executar a cada T segundos)

```
UK = readAD;
YK = 2 * UK_1;
writeDA (YK);
UK_1 = UK;
```

AULA 6 2008

b) Seja $G(z) = \dfrac{z}{z^2 + 3z}$ (estritamente própria)

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z}{z^2+3z} \Rightarrow z^2 Y(z) + 3z\,Y(z) = z\,U(z)$$

ou seja: $y(k+2) + 3y(k+1) = u(k+1)$

ou

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^{-2}}{z^{-2}} \cdot \frac{z}{z^2+3z} = \frac{z^{-1}}{1+3z^{-1}} \Rightarrow Y(z) + 3Y(z-1) = U(z-1)$$

ou seja: $y(k) + 3y(k-1) = u(k-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow y(k) = -3y(k-1) + u(k-1)$

No computador:

Início: U(0) = 0, Y(0) = 0;

Loop: for k = 1 : 1000

```
U(k) = readAD;
Y(k) = -3*Y(k-1) + U(k-1);
writeDA (Y(k));
wait (T)        (espera terminar o intervalo)
end;
```

MATÉRIA 22

Note que a saida no instante k, Y(K) depende apenas de valores nos instantes K-1, (Y(K-1) e U(K-1)), ou seja a saida no presente depende apenas de valores no passado (o sistema é estritamente causal)

c) Seja $G(z) = \frac{z^3}{2z+3}$ (imprópria)

$$\frac{Y(z)}{G(z)} = \frac{z^{-1}}{z^{-1}} \cdot \frac{z^3}{2z+3} \Rightarrow \frac{Y(z)}{G(z)} = \frac{z^2}{2+3z^{-1}} \Rightarrow 2Y(z) + 3z^{-1}Y(z) = z^2 U(z)$$

ou seja: $2y(k) + 3y(k-1) = u(k+2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow y(k) = -\frac{3}{2} y(k-1) + \frac{u(k+2)}{2}$$

Ops! A saída no instante k (presente) depende da entrada no instante k+2 (futuro)
O sistema é não-causal! Não dá para implementar

AULA 6 2009

d) Seja $G(z) = \frac{z}{z+2}$ (biprópria)

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^{-1}}{z^{-1}} \cdot \frac{z}{z+2} \Rightarrow \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{1+2z^{-1}} \Rightarrow Y(z) + 2z^{-1}Y(z) = U(z)$$

ou seja: $y(k) + 2y(k-1) = u(k) \Rightarrow$

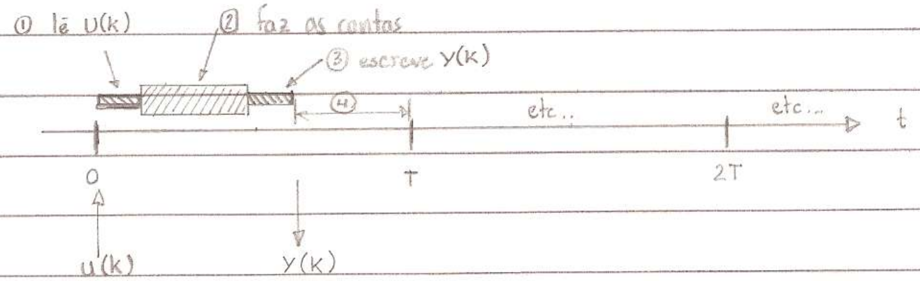
$$\Rightarrow y(k) = -2y(k-1) + u(k)$$

A saída no instante k depende da entrada no instante k. A implementação nesse caso é mais delicada

Vejamos uma implementação:

```
Início:  Y(0) = 0;
Loop:    for k = 1:100
①            U(k) = readAD;
②            Y(k) = -2*Y(k-1) + U(k);
③            writeDA (Y(k));
④            waituntil (T);
         end;
```

Analisando os tempos



Supostamente Y(k) deve ser gerado no mesmo instante que U(k), o que é impossível (precisaríamos de um computador infinitamente rápido)

Porém, se os tempos de ① + ② + ③ forem desprezíveis perto do tempo T, dá para assumir como verdade que U(k) e Y(k) são simultâneos.

$\boxed{\text{Ver algoritmo.m}}$

AULA 7 → 2008

Resposta impulsiva

Seja o sistema Σ

$$u(k) \longrightarrow \boxed{\Sigma} \longrightarrow y(k) \qquad \text{ou} \qquad U(z) \longrightarrow \boxed{G(z)} \longrightarrow Y(z)$$

com $u(k) = \delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{se } k=0 \\ 0 & \text{se } k \neq 0 \end{cases}$ e $U(z) = 1$

daí como $\dfrac{Y(z)}{U(z)} = G(z)$, tem-se que $G(z) = Y(z)$, ou

seja, a função de transferência é igual à transformada $\mathcal{Z}$ da resposta impulsiva $y(k)$, daí

$$y(k) = \mathcal{Z}^{-1}[G(z)]$$

← anti-transformada

Anti-transformando

Seja uma transformada $F(z) = \dfrac{z}{(z-0,5)(z-1)^2} = \dfrac{z^{-2}}{1-2,5z^{-1}+2z^{-2}-0,5z^{-1}}$

a) Numericamente

Basta supor que $F(z)$ seja a resposta impulsiva de um sistema hipotético.

$$\frac{F(z)}{U(z)} = \frac{z^{-2}}{1-2,5z^{-1}+2z^{-2}-0,5z^{-3}} \Rightarrow z^{-2}U(z) = F(z) - 2,5z^{-1}F(z) + 2z^{-2}F(z) - 0,5z^{-3}F(z)$$

daí $f(k) = 2,5f(k-1) - 2f(k-2) + 0,5f(k-3) + u(k-2)$

com $u(0) = 1$ e $u(1) = u(2) = \ldots = \varnothing$.

Por definição $f(-3) = f(-2) = f(-1) = 0$. Não é necessário supor que $F(0) = 0$ (da definição de função de transferência).

Daí é só resolver a equação de diferenças

k	u(k)	f(k)
-3	0	0
-2	0	0
-1	0	0
0	1	0
1	0	0
2	0	1
3	0	2,5
4	0	4,25
5	0	6,125
⋮	⋮	⋮
∞	0	?

(k = -3 a -1: condições iniciais; k = 0 a 5: calculado)

← Não dá para usar o teorema do valor final. O limite não existe (de fato a função cresce indefinidamente)

OBS. Dá para obter uma curva da função, mas não uma forma analítica.

b) Expansão em série

$$F(z) = \frac{z^{-2}}{1 - 2{,}5z^{-1} + 2z^{-2} - 0{,}5z^{-3}}$$

Basta dividir o numerador pelo denominador.

MATÉRIA 26

$$
\begin{array}{l|l}
z^{-2} & 1 - 2{,}5z^{-1} + 2z^{-2} - 0{,}5z^{-3} \\ \hline
-z^{-2} + 2{,}5z^{-3} - 2z^{-4} + 0{,}5z^{-5} & z^{-2} + 2{,}5z^{-3} + 4{,}25z^{-4} + \dots + \\
0 \quad + 2{,}5z^{-3} - 2z^{-4} + 0{,}5z^{-5} & \\
\quad -2{,}5z^{-3} + 6{,}25z^{-4} - 5z^{-5} + 1{,}25z^{-6} & \\
\quad 0 \quad 4{,}25z^{-4} - 4{,}5z^{-5} + 1{,}25z^{-6} & \\
\quad \vdots & \\
\quad \text{etc.} &
\end{array}
$$

Portanto $F(z) = 0.z^{0} + 0.z^{-1} + z^{-2} + 2{,}5z^{-3} + 4{,}25z^{-4} + 6{,}125z^{-5} + \dots$

Daí

f(k)	0	0	1	2,5	4,25	6,125	..
k	0	1	2	3	4	5	..

OBS: Novamente, dá para obter a sequência numérica, mas não uma expressão analítica

c) A partir de uma tabela de transformadas

Passos

1) Expandir em frações parciais
2) Encontrar cada fração numa tabela de transformadas
3) Aplicar a tabela $\boxed{\text{ver tabela}}$

$$F(z) = \frac{z^{-2}}{1 - 2{,}5z^{-1} + 2z^{-2} - 0{,}5z^{-3}} = \frac{4z}{z - 0{,}5} + \frac{2z}{(z-1)^2} - \frac{4z}{z-1}$$

(como fazer? Igual a Controle I - ver livros)

Das tabelas: $f(k) = \begin{cases} 4(0{,}5)^k + 2k - 4 & \text{para } k \geq 0 \\ 0 & \text{para } k < 0 \end{cases}$

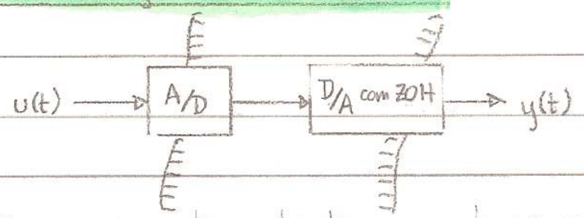
MATÉRIA 27 | DATA

OBS: É obtida uma expressão matemática para $f(k)$

- Se o objetivo for analisar $f(k)$ esse método é interessante, caso contrário não há grande vantagem. A complexidade é maior, e tem que ser feito manualmente (a não ser que se use computação simbólica). Será útil posteriormente.

AULA 7 2009

2.8 De volta ao segurador de ordem zero

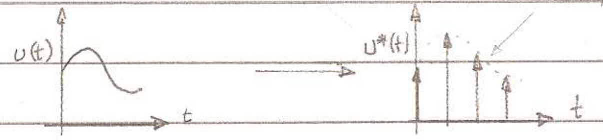


Um modelo para o processo A/D + D/A

Seja

$$u^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)\,\delta(t-kT) = u(0)\,\delta(t) + u(T)\,\delta(t-T) + u(2T)\,\delta(t-2T) + \dots$$

atenção: amplitude infinita! energia modulada



Um sinal contínuo, modulado por um trem de pulsos (deltas de Dirac) será a primeira parte do nosso modelo (apenas um artifício matemático) que chamaremos "impulse sampler"

Seja a transformada de Laplace de $u^*(t)$:

$$\mathcal{L}[u^*(t)] = U^*(s) = u(0)\mathcal{L}[\delta(t)] + x(T)\mathcal{L}[\delta(t-T)] + \dots =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)\,e^{-kTs}$$

Vamos definir

$e^{Ts} = z$ daí $s = \frac{1}{T} \ln(z)$ (importantíssimo)

Com isso:

$$U^*(s)\Big|_{s=\frac{\ln(z)}{T}} = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)\, z^{-k}$$

(é a transformada Z de $u(t)$)

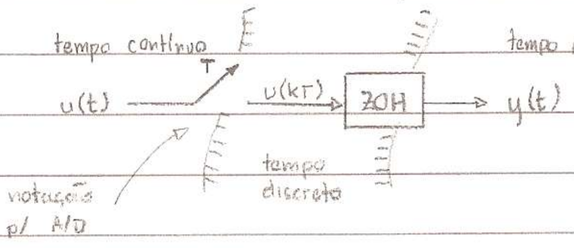
ou seja

$$Z[u(t)] = U(z) = U^*(s)\Big|_{s=\frac{\ln(z)}{T}}$$

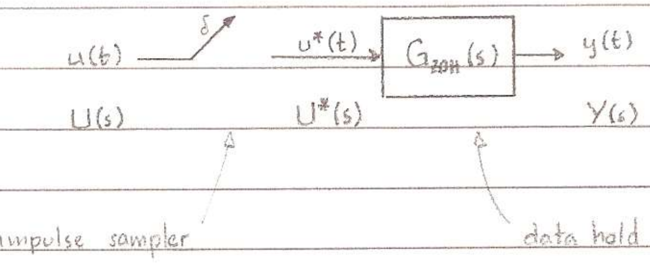
A segunda parte do nosso modelo, que chamaremos de "data hold", converte o trem de pulsos para o sinal característico constante por trechos. (também é um artifício matemático)

$y(kT+\tau) = u(kT)$ para $0 < \tau < T$ e $k = 0, 1, 2, \ldots$

Com isso temos um modelo para A/D + D/A

Daí 

sistema real

e 

nosso modelo

MATÉRIA 29 DATA

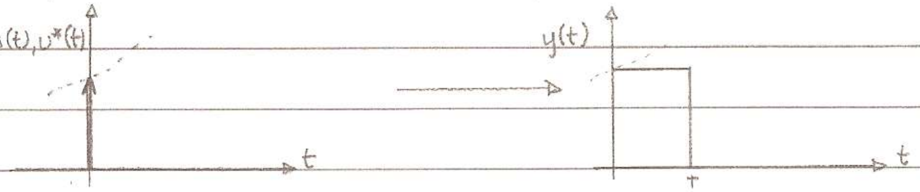
Aula 8 2008

Vamos pôr o que vimos em uso

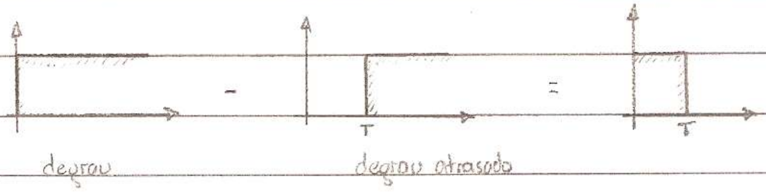
Função de transferência do ZOH

Temos que $G_{ZOH}(s) = \frac{Y(s)}{U^*(s)}$

Note que se a entrada for um impulso (delta de Dirac), temos



e



Portanto

$$Y(s) = \mathcal{L}[\,1(t)\,] - \mathcal{L}[\,1(t-T)\,] = \frac{1}{s} - \frac{e^{-sT}}{s} = \frac{1-e^{-sT}}{s}$$

como $u^*(t)$ é um delta de Dirac, $G_{ZOH}(s) = \frac{Y(s)}{U^*(s)} = \frac{1-e^{-sT}}{s}$

Relações entre o plano $\boxed{S}$ e o plano $\boxed{Z}$

Como vimos: $z = e^{sT}$ e $s = \frac{1}{T}\ln(z)$

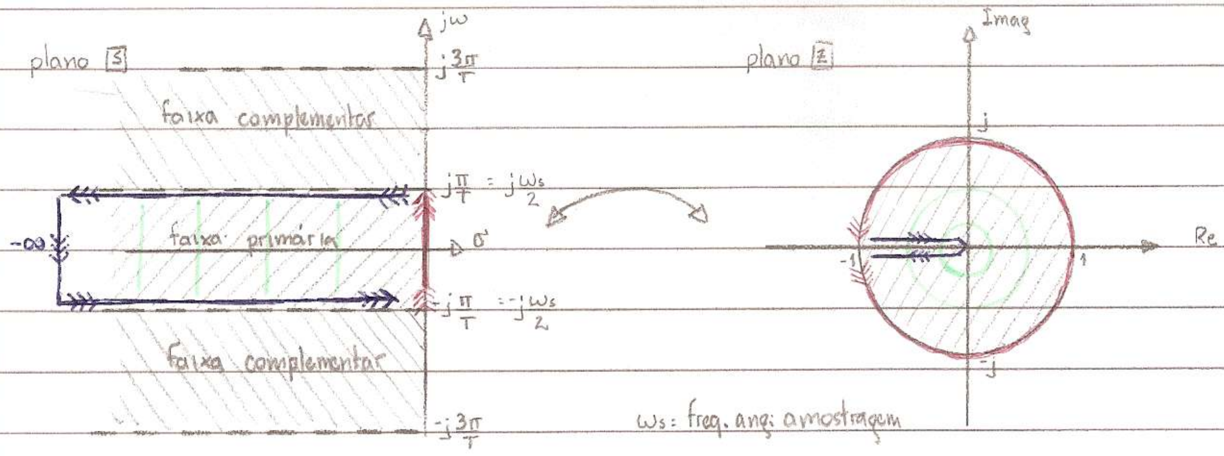
Considere um ponto no plano complexo $\boxed{S}$: $s_0 = \sigma + j\omega$

No plano $\boxed{Z}$ temos $z_0 = e^{T\sigma + jT\omega} = e^{\sigma T} \cdot e^{j\omega T}$

ou seja: $|z_0| = e^{\sigma T}$

$\angle z_0 = \omega T$

O que resulta no seguinte mapeamento:



semi-plano esquerdo ⟷ círculo de raio unitário

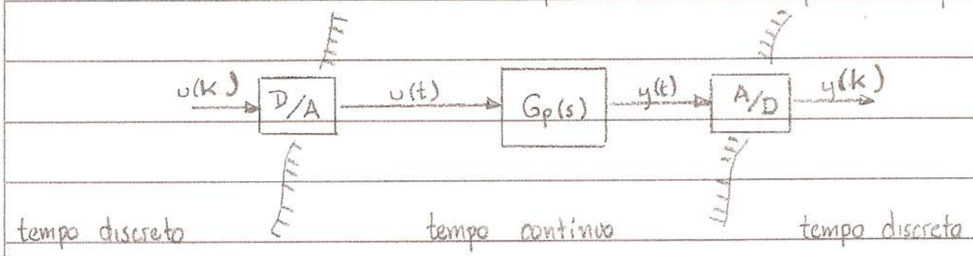
eixo imaginário $j\omega$ ⟷ circunferência de raio unitário.

OBS: Para $\omega \in \left(-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}\right)$, a circunferência é percorrida completamente
$\omega \in \left(\frac{\pi}{T}, \frac{3\pi}{T}\right)$ ela é percorrida novamente e assim por diante

Infinitos pontos no plano [s] são mapeados no mesmo ponto no plano [z].

O subsistema D/A - PLANTA - A/D

O subsistema abaixo é particularmente importante para o nosso curso.

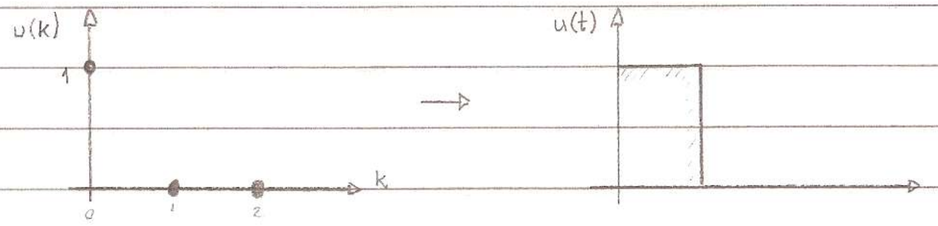


A planta no nosso esquema DDC se insere bem na estrutura acima.

O subsistema é (ou gostaríamos que fosse) equivalente a

$U(z) \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow Y(z)$

Seja $u(k)$ um delta de Kronecker, temos então (resposta impulsiva)



A transformada de Laplace de $u(t)$ é dada por

$$U(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$ (já vimos esse cara antes!)

A transformada de Laplace de $y(t)$ é dada por

$$Y(s) = G_p(s) \cdot U(s) = G_p(s) \cdot \frac{(1 - e^{-sT})}{s}$$

E a transformada Z de $y(k)$ por

$$Y(z) = H(z) \cdot U(z)$$

$\searrow U(z) = 1$; pois $u(k)$ é um impulso unitário

portanto $Y(z) = H(z) = Z[y(k)] = Z[Y(s)] = Z\left[G_p(s) \cdot \frac{(1 - e^{-sT})}{s}\right] =$

ou seja $H(z) = (1 - z^{-1}) \cdot Z\left[\frac{G_p(s)}{s}\right]$

$H(z)$ é um equivalente discreto do subsistema D/A - PLANTA - A/D

AULA 8 → 2009

2.9 Estabilidade

Há vários tipos de estabilidade. Nesse curso vamos utilizar "estabilidade externa", conhecida como "estabilidade BIBO" (bounded input, bounded output)

Ou seja, o sistema é estável se a entradas limitadas corresponderem saídas limitadas, ou melhor, se a qualquer entrada limitada corresponder uma saída limitada.

Lema importante:

$$U(z) \longrightarrow \boxed{G(z)} \longrightarrow Y(z)$$

Um sistema discreto SLIT, com resposta impulsiva $y(k)$ é BIBO-estável se e somente se

$$\sum_{k=0}^{\infty} |y(k)| < \infty$$

(provas: ver livros)

Corolário:

Se $\sum_{k=0}^{\infty} |y(k)| < \infty$ então $\lim_{k \to \infty} y(k) = 0$

Teorema importantíssimo:

$$U(z) \longrightarrow \boxed{G(z)} \longrightarrow Y(z)$$

Um sistema discreto SLIT com função de transferência $G(z) = \frac{num(z)}{den(z)}$ onde num, den são polinômios é BIBO-estável se e somente se todas as raízes de $den(z)$ (chamadas de polos do sistema) z_i, $i=1,\dots,n$ são tais que $|z_i| < 1$, i.e. todas as raízes complexas se localizam dentro do círculo de raio unitário

OBS: * As raízes de $num(z)$, chamadas de zeros do sistema, não têm influência direta na estabilidade do sistema em si, mas influenciam grandemente o desempenho e estabilidade do sistema controlado em malha fechada.

* Cuidado com cancelamentos entre polos e zeros.

(provas: ver livros)

Exemplo ilustrativo:

Seja $G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{z-a} = \frac{z^{-1}}{1-az^{-1}}$ com $a \in \mathbb{R}$

logo $y(k) = a.y(k-1) + u(k-1)$

Considerando $u(k)$ nulo, temos $y(k) = a\,y(k-1)$

obviamente: se $|a|>1$, $y(k) \to \infty$ quando $k \to \infty$

se $|a|<1$, $y(k) \to 0$ quando $k \to 0$

se $a=1$, $y(k)$ é constante (veja as condições do tema)

Exemplo:

$G(z) = \frac{n(z)}{z^5 + 0{,}9z^4 + 3z^2 + 3z - 0{,}7}$ é estável?

polos de $G(z)$: $0{,}7147 \pm j1{,}281$ $|.| = 1{,}47$

$-1{,}262 \pm j0{,}278$ $|.| = 1{,}29$

$0{,}1948$

conclusão: sistema instável

$\boxed{\text{ver exemplo\_estabilidade.m}}$

Critérios de estabilidade

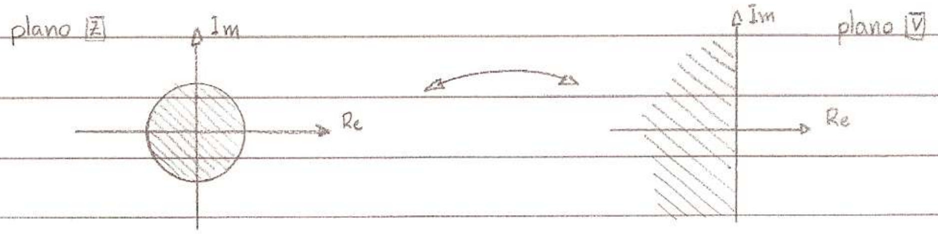
Como descobrir se um sistema é estável sem calcular as raízes do polinômio

Critério de Routh (de tempo contínuo)

Seja a transformação bilinear

$$z = \frac{v+1}{v-1}$$

propriedade interessante: $|z| < 1 \Leftrightarrow \text{real}(v) < 0$



Como usar: substituir z por $\frac{v+1}{v-1}$ na função de transferência e

aplicar o critério de Routh ao denominador da função em termos de v

OBS: A quantidade de cálculos pode ficar muito grande

FT própria: basta olhar o denominador

Critério de Jury (tempo discreto)

ver antiga apostila

MATÉRIA 35

DATA

OBS: Hoje em dia é fácil obter raízes de polinômios (e.g. Matlab). Os critérios são úteis para análise.

Por exemplo

$$G(z) = \frac{1}{z^3 + (2+\alpha)z^2 + 3}$$

para que valores de α o sistema é estável?