Conteúdo

Capítulo 1

Aritmética e Álgebra

1.1 Potências

Introdução

Nesta seção conheceremos as propriedades das potências.

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \tag{1.1}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^m \times a^{-n} = a^{m-n} \tag{1.2}$$

$$(a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \tag{1.3}$$

$$(a^n)^m = a^{mn} \tag{1.4}$$

e veremos exemplos de manipulação de potência.

1. Produtos como 1.44×1.44 e $0.02 \times 0.02 \times 0.02$ podem ser escritos na seguinte notação. $1.44 \times 1.44 = (1,44)^2$ e $0.02 \times 0.02 \times 0.02 = (0.02)^3$. Se a é qualquer número e m é um número inteiro positivo $(1, 2, 3, \dots)$, a^m é definido por:

$$a^m = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a \times}_{m \text{ fatores}} \tag{1.5}$$

   a^m é chamado de m-ésima potência de a e m é chamada de índice ou expoente.

2. Se n tanto quanto m for um número inteiro positivo, o produto das potencia $a^m a^n$ é

$$a^m \times a^n = (\underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a \times}_{m \text{ fatores}}) \times (\underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a \times}_{n \text{ fatores}}) \tag{1.6}$$

logo

$$a^m a^n = a^{m+n} \tag{1.7}$$

Exemplo

$$10^3 \times 10^2 = 10^5 = 100000 \tag{1.8}$$

3. A recíproca de a^m, $\frac{1}{a^m}$ pode ser escrito na forma a^{-m} ,por exemplo,

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} \tag{1.9}$$

O quociente de potências $\frac{a^m}{a^n}$ pode ser escrito $a^m a^{-n}$.

Exemplo

$$\frac{3^5}{3^3} = 3^5 3^{-3} \tag{1.10}$$

Também

$$\frac{3^5}{3^3} = \frac{\cancel{3}\times \cancel{3}\times \cancel{3} \times 3 \times 3}{\cancel{3}\times \cancel{3}\times \cancel{3}} = 3 \times 3 = 3^2 \tag{1.11}$$

então

$$\frac{3^5}{3^3} = 3^5 3^{-3} = 3^2 \tag{1.12}$$

Em geral

$$\frac{a^m}{a^n} = a^m a^{-n} = a^{m-n} \tag{1.13}$$

4. Se $m = n$, $\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^m} = \frac{a \times a \times a \times a \times a \times a \times a}{a \times a \times a \times a \times a \times a \times a}$

Para cada a no denominador, há um a no numerador, então, eles podem ser todos cancelados.

Por esse motivo,

$$\frac{a^m}{a^m} = 1 \tag{1.14}$$

e pela propriedade 1.2

$$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0 \tag{1.15}$$

Então consequentemente definimos $a^0 = 1$

5. Uma vez que $2 \times 2 \times 2 = 8$, dizemos que 2 é a raiz cúbica de 8 e escrevemos

$$(8)^{\frac{1}{3}} = 2 \tag{1.16}$$

Para que a equação 1.7 funcione em casos em que m e n não são números inteiros, devemos ter

$$(8)^{\frac{1}{3}} \times (8)^{\frac{1}{3}} \times (8)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = 8^1 = 8 \tag{1.17}$$

Em geral, se a é um número positivo, e q é um número inteiro positivo, $a^{\frac{1}{q}}$ é a raiz q-ésima de a, logo

$$\underbrace{a^{\frac{1}{q}} \times a^{\frac{1}{q}} \times a^{\frac{1}{q}} \times \cdots \times a^{\frac{1}{q}}}_{q \text{ fatores}} = a \tag{1.18}$$

Notação equivalente:

$$a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a} \tag{1.19}$$

6. Se p é um inteiro, incluindo zero, e q é um inteiro, $a^{\frac{p}{q}}$ é definido por

$$a^{\frac{p}{q}} = (a^p)^{\frac{1}{q}} = (a^{\frac{1}{q}})^p \tag{1.20}$$

A escolha de qual forma usar no cálculo depende dos números envolvidos.

Exemplo

$$16^{\frac{3}{2}} = (16^3)^{\frac{1}{2}} = (16^{\frac{1}{2}})^3 \tag{1.21}$$

Já que $16^{\frac{1}{2}}$ é mais fácil de resolver do que 16^3

$$16^{\frac{3}{2}} = (4)^3 = 64 \tag{1.22}$$

7. A m-ésima potência de a^n é escrita como $(a^n)^m$

$$(a^n)^m = \overbrace{\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{\text{n fatores}} \times \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{\text{n fatores}} \times \cdots \times \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{\text{n fatores}}}^{m \text{ fatores de } n \text{ termos}} \tag{1.23}$$

$$= \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{m \times n \text{ fatores}} \tag{1.24}$$

ou seja

$$(a^n)^m = a^{nm} \tag{1.25}$$

8. As equações 1.7, 1.13, 1.20 e 1.25 são frequentemente chamadas de lei das potências.

$$a^m a^n = a^{m+n} \tag{1.26}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^m a^{-n} = a^{m-n} \tag{1.27}$$

$$a^{\frac{p}{q}} = (a^p)^{\frac{1}{q}} = (a^{\frac{1}{q}})^p \tag{1.28}$$

$$(a^n)^m = a^{nm} \tag{1.29}$$

A primeira e última relações podem ser estendidas para qualquer quantidade de produtos e potências. Por exemplo

$$a^m \times a^n \times a^p \times a^q = a^{m+n+p+q} \tag{1.30}$$

$$\left(\left((a^n)^m\right)^p\right)^q = a^{mnpq} \tag{1.31}$$

exemplo

$$\left((8^2)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 8^{2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}} = 8^{\frac{1}{3}} = 2 \tag{1.32}$$

9. Divisão por zero não é definido, então a^{-n} é sem sentido, quando $a = 0$.

10. *Exercícios*

    (a) Cacule as seguintes expressões.

    i. $(25)^{\frac{3}{2}}$

    ii. $100^{\frac{-1}{2}}$

    iii. $\frac{(a^2)^3}{a^{-4}\times a^{-2}}$

    (b) Determine o valor de x.

    i. $((a^m)^n)^p = a^x$

    ii. $b^p \times b^q \times b^r = b^x$

    iii. $a^0 = x \quad$, para qualquer a

1.2 Logaritmos

Introdução

Esta seção explica a teoria dos logaritmos. São apresentadas explanações completas de cálculos usando logaritmos.

1. Preliminares para as definições

   (a) Se a é positivo e menor que 1, a^n, para n positivo ou negativo é positivo. Por exemplo

$$(0.25)^{-2} = 16 \tag{1.33}$$

e

$$8^{-\frac{1}{3}} = 0.5 \tag{1.34}$$

(b) Se a é igual a 1, então $a^n = 1$ para qualquer n.

(c) Se a é positivo e maior que 1, a^n é positivo tanto para n negativo quanto positivo. Por exemplo:

$$(1.1)^3 = 1.331 \tag{1.35}$$

e

$$(16)^{-\frac{1}{2}} = 0.25 \tag{1.36}$$

Se x é positivo e

$$x = a^n \tag{1.37}$$

onde a é positivo, então n é chamado de logaritmo de x na base a. Escrevemos

$$n = \log_a x \tag{1.38}$$

2. Apresentamos alguns exemplos.

x	a	$\log_a x$		
25	5	2	$5^2 = 25$	$\log_5 25 = 2$
16	2	4	$2^4 = 16$	$\log_2 16 = 4$
16	4	2	$4^2 = 16$	$\log_4 16 = 2$
100	100	1	$100^1 = 100$	$\log_{100} 100 = 1$
100	10	2	$10^2 = 100$	$\log_{10} 100 = 2$
64	8	2	$8^2 = 64$	$\log_8 64 = 2$
64	16	1.5	$16^{\frac{3}{2}} = 64$	$\log_{16} 64 = \frac{3}{2}$
0.25	16	-0.5	$16^{-\frac{1}{2}} = 0.25$	$\log_{16} \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$

Note que não existe o logaritmo de um número sem a especificação da base de logaritmo. Note também que o logaritmo pode ser positivo ou negativo.

Usamos nos cálculos os logaritmos na base 10, o chamado logaritmo comum. Você deve ser capaz de ver o motivo ao olhar as propriedades 1.7, 1.13, 1.20e 1.25 substituindo a por 10.

Propriedade	Comentário
$10^m \times 10^n = 10^{m+n}$	multiplicação implica na soma dos índices
$\frac{10^m}{10^n} = 10^{m-n}$	divisão implica na subtração dos índices
$(10^m)^{\frac{1}{n}} = 10^{\frac{m}{n}}$	raíz de potências implica em divisão dos índices
$(10^m)^n$	potência de potência implica na multiplicação dos índices

3. Forma logarítmica das propriedades das potência.

Propriedade	Forma logaritmica
$10^m \times 10^n = 10^{m+n}$	$\log_{10}(10^m \times 10^n) = \log_{10}(10^{m+n}) = m+n$
$\frac{10^m}{10^n} = 10^{m-n}$	$\log_{10}(\frac{10^m}{10^n}) = \log_{10}(10^{m-n}) = m-n$
$(10^m)^{\frac{1}{n}} = 10^{\frac{m}{n}}$	$\log_{10}((10^m)^{\frac{1}{n}}) = \log_{10}(10^{\frac{m}{n}}) = \frac{m}{n}$
$(10^m)^n$	$\log_{10}((10^m)^n) \log_{10}(10^{mn}) = mn$

4. Para entender porque as tabelas de logaritmos são representadas daquela maneira, primeiro iremos olhar para numeros de logaritmicos fáceis de encontrar.

x	$log_{10}x$	Comentário
$\frac{1}{100}$	-2	O log de todos os números entre $\frac{1}{100}$ e $\frac{1}{10}$ assumem valores entre -2 e -1
$\frac{1}{10}$	-1	O log de todos os números entre $\frac{1}{10}$ e 1 assumem valores entre -1 e 0
1	0	O log de todos os números entre 1 e 10 assumem valores entre 0 e 1
10	1	O log de todos os números entre 10 e 100 assumem valores entre 1 e 2
100	2	

Por exemplo, 8 está entre 1 e 10 e por isso o seu logaritmo está entre 0 e 1. Mais precisamente, seu valor aproximado é 0.9031.

Já que qualquer numero positivo x pode ser expresso na forma padrão

$$x = 10^m \times X \tag{1.39}$$

onde m é um inteiro e $1 \leq X < 10$

$$\begin{aligned} \log_{10} x &= \log_{10}(10^m) + \log_{10} X & (1.40) \\ &= m + \log_{10} X & (1.41) \end{aligned}$$

Por exemplo

$$0.08 = 10^{-2} \times 8 \tag{1.42}$$

então

$$\log_{10}(0.08) = -2 + 0.9031 \tag{1.43}$$

Portanto, para obter o logaritmo de x basta escrever x na forma padrão

$$x = 10^m \times X \tag{1.44}$$

e somar m ao $\log_{10} X$, o qual será um valor entre 0 e 1, uma vez que X está entre 1 e 10.

1.3 Coleção de notações e técnicas

Introdução

Nesta seção será discutida a simplificação de expressões algébricas pelo uso das propriedades de potências e das expansões

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{1.45}$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \tag{1.46}$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \tag{1.47}$$

Serão apresentados tambem a noção de módulo, proporção direta, somatória e uma aproximação para $(a+b)^2$.

1. Uma expressão algébrica às vezes pode ser simples ou complicada, como por exemplo

$$5\left(\frac{ax^2 + 2by}{ax - 3cy^2}\right) \tag{1.48}$$

As vezes é util usar a palavra *termo* para descrever um grupo de simbolos. No exemplo acima temos os termos ax^2, $2by$, ax e $3cy^2$.

2. O produto de $a+b$ por $c+d$ é escrito como

$$(a+b)(c+d) \tag{1.49}$$

e o produto de $a+b$ por si mesmo é escrito como

$$(a+b)^2 \tag{1.50}$$

Se quisermos, podemos expandir $(a+b)^2$

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) &(1.51)\\
&= a(a+b) + b(a+b) &(1.52)\\
&= a^2 + ab + ba + b^2 &(1.53)
\end{aligned}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{1.54}$$

Da mesma forma

$$\begin{aligned}
(a-b)^2 &= (a-b)(a-b) && (1.55)\\
&= a(a-b) - b(a-b) && (1.56)\\
&= a^2 - ab - ba + b^2 && (1.57)
\end{aligned}$$

$$(a+b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \tag{1.58}$$

Também

$$\begin{aligned}
(a-b)(a+b) &= a(a+b) - b(a+b) && (1.59)\\
&= a^2 + ab - ba - b^2 && (1.60)
\end{aligned}$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \tag{1.61}$$

1.54, 1.58 e 1.61 são usados com muita frequência.

Exemplos

(a)

$$(3x-2y)(3x+2y) = 9x^2 - 4y^2 \tag{1.62}$$

(b)

$$(2z^2 - x)^2 = 4z^4 - 4z^2x + x^2 \tag{1.63}$$

(c)

$$\begin{aligned}
(x-y)^2 - (x+y)^2 &= x^2 - 2xy + y^2 - (x^2 + 2xy + y^2) && (1.64)\\
&= -4xy && (1.65)
\end{aligned}$$

Considere a equação 1.54 para o caso em que $a = 10$ e $b = 0.1$ Substituindo em

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{1.66}$$

temos

$$\begin{aligned}
(10+0.1)^2 &= 10^2 + 2 \times 10 \times 0.1 + (0.1)^2 && (1.67)\\
&= 100 + 2 + 0.01 && (1.68)
\end{aligned}$$

Neste caso o termo b^2 é muito pequeno comparado com os outros termos. De fato 102 é uma aproximação muito boa para $(10.1)^2$.

Sempre que b é muito pequeno comparado a a podemos aproximar $(a+b)^2$ por a^2+2ab; Escrevemos isso como

$$(a+b)^2 \approx a^2 + 2ab \qquad \text{se } b \ll a \tag{1.69}$$

onde $\ll$ significa é "muito menor que".

Mais dois exemplos.

(a)

$$(1000+1)^2 \approx 10^6 + 2 \times 10^3 \tag{1.70}$$

(b)

$$(10+5)^2 = 225 \tag{1.71}$$

$$10^2 + 2 \times 10 \times 5 = 200 \tag{1.72}$$

Neste caso $(a+b)^2$ não é bem aproximado por a^2+2ab já que 5 não é "muito menor que"10.

3. Expressões algébricas complicadas às vezes podem ser simplificadas aplicando as leis de índices e expansões 1.54, 1.58 e 1.61.

   Exemplos:

   (a) Simplifique

   $$\frac{(a+b)^2 - ((a-b)^4)^{\frac{1}{2}}}{4ab} \tag{1.73}$$

   aplicando a propriedade de potências de potências

   $$\frac{(a+b)^2 - ((a-b)^4)^{\frac{1}{2}}}{4ab} = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4ab} \tag{1.74}$$

   Expanda o lado direito da equação usando 1.54 e 1.58

   $$= \frac{a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2)}{4ab} \tag{1.75}$$

   Cacele os termos

   $$= \frac{4ab}{4ab} \tag{1.76}$$

   logo

   $$\frac{(a+b)^2 - ((a-b)^4)^{\frac{1}{2}}}{4ab} = 1 \tag{1.77}$$

(b) Simplifique

$$\frac{(xyz^2)^3}{\left(\frac{1}{x}y^{-2}\right)^2} \tag{1.78}$$

Já que

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \tag{1.79}$$

$$\frac{(xyz^2)^3}{\left(\frac{1}{x}y^{-2}\right)^2} = \frac{(xyz^2)^3}{(x^{-1}y^{-2})^2} \tag{1.80}$$

Aplique a propriedade de potência de potência no numerador e no denominador

$$\frac{x^3y^3z^6}{x^{-2}y^{-4}} \tag{1.81}$$

Usando novamente a relação $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, temos

$$x^3x^2y^3y^4z^6 \tag{1.82}$$

Logo

$$\frac{(xyz^2)^3}{\left(\frac{1}{x}y^{-2}\right)^2} = x^5y^7z^6 \tag{1.83}$$

4. Se a letra d representa uma grandeza física que pode ser positiva ou negativa e estamos interessados apenas na magnitude e não no sinal da grandeza, dizemos que estamos interessados no módulo de d, representado pelo símbolo:

$$|d| \tag{1.84}$$

Exemplos

$$|-5| = 5 \qquad |+5| = 5 \tag{1.85}$$

Em geral

$$|d| = |-d| \tag{1.86}$$

Note que

$$|0| = 0 \tag{1.87}$$

Exemplos:

(a) Se $a = 6$ e $b = -7$, calcule $|a+b|$ e $|a|+|b|$.

$$|a+b| = |6-7| = |-1| = 1 \tag{1.88}$$

$$|a|+|b| = |6|+|-7| = 6+7 = 13 \tag{1.89}$$

(b) Se $a = 3$ e $b = 5$, calcule $|a + b|$ e $|a| + |b|$.

$$|a + b| = |3 + 5| = |8| = 8 \tag{1.90}$$

$$|a| + |b| = |3| + |5| = 3 + 5 = 8 \tag{1.91}$$

Esses dois exemplos ilustram uma importante relação geral dada por:

$$|a + b| \leq |a| + |b| \tag{1.92}$$

ou seja, o módulo da soma é menor ou igual à soma dos módulos.

5. Suponha que em um experimento você coletou uma série de 10 medidas de tempo identificados por

$$t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_9, t_{10}$$

A média das leituras de tempo é

$$\frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 + t_7 + t_8 + t_9 + t_{10}}{10} \tag{1.93}$$

É conveniente representar somas como essa na forma

$$\sum_{i=1}^{10} t_i \tag{1.94}$$

ou seja,

$$\sum_{i=1}^{10} t_i = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 + t_7 + t_8 + t_9 + t_{10} \tag{1.95}$$

O símbolo $\sum$ é a forma maiúscula da letra grega *sigma* e $\sum_{i=1}^{10} t_i$ é lido como "A soma de t_i de i igual a 1 até i igual a 10". Qualquer letra pode ser usada como índice. Outros exemplos são:

$$\sum_{r=3}^{9} r = 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 \tag{1.96}$$

e

$$\sum_{k=1}^{4} (k - 1)^2 = (1 - 1)^2 + (2 - 1)^2 + (3 - 1)^2 + (4 - 1)^2 \tag{1.97}$$

Para uma série de n leituras de tempo, definimos o tempo médio das leituras $\bar{t}$ como

$$\bar{t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} t_i \tag{1.98}$$

6. Suponha que t e s representem alguma grandeza física. Suponha também que, a partir de um experimento foram coletados os valores de t e s apresentados na tabela.

t	s
1.7	5.0
2.9	8.7
3.8	11.4
4.6	14.7
5.9	17.7

Inspecionando a tabela, podemos perceber que a razão $\frac{s}{t}$ é aproximadamente 3 em cada caso

Em tais casos dizemos que s e t são diretamente proporcionais. Esta relação é expressada simbolicamente por

$$s \propto t \tag{1.99}$$

A partir disso, podemos escrever que

$$\frac{s}{t} = k \qquad , \tag{1.100}$$

onde k é alguma constante para os experimentos em questão.

No caso acima, podemos assumir $k = 3$, então

$$\frac{s}{t} = 3 \tag{1.101}$$

ou

$$\frac{t}{s} = \frac{1}{3} \tag{1.102}$$

Para confirmar esta equação nós podemos observar mais valores de s no intervalo de t de 1.7 a 5.9. Devemos tambem observar valores fora desse intervalo.

7. *Exercícios*

   (a) i. $(X - Y)^2$

   ii. $(X + Y)(X - Y)$

   iii. $(3a + b)^2$

   iv. $(2a + c^2)^2(c^2 - 2a)$

   (b) Mostre que
   $$\frac{(x - a - b)(a + b + x) + a^2 + 2ab + b^2}{x^2} = 1$$

   (c) Se $x \ll y$, mostre que $(x + y)^2 \approx y(y + 2x)$.

   (d) Simplifique

i. $\frac{(x^2yz^2)^{\frac{1}{2}}}{}$

ii. $\left((x+2y)^2-(2x-y)^2\right)^2$

(e) Cacule $|a-b|$ sendo que $a=-3$ e $b=-4$.

(f) Calcule

$$\sum_{j=2}^{4} 2^j$$

.

1.4 Manipulação de equações e formulas

Introdução

Esta seção explica o que é uma equação e dá uma orientação para a manipulação delas por meio de operações permitidas.

1. Uma variável é uma quantidade que pode assumir qualquer valor de um determinado conjunto de números. O conjunto de números podem ser, por exemplo, todos os números, apenas os inteiros positivos ou todos os numeros entre -4 e $+6$.

   Variáveis são comumente representadas por letras.

   Uma equação é a declaração formal de equivalência entre duas expressões, na qual pelo menos uma das expressões envolve no mínimo uma variável.

   Apresentamos exemplos de equações das variáveis x e y.

$$x+y=1 \tag{1.103}$$

$$2x=y \tag{1.104}$$

$$x+1=2 \tag{1.105}$$

$$x=x \tag{1.106}$$

   A equação

$$v=u+ft \tag{1.107}$$

onde v representa a velocidade do corpo depois de um tempo t e u a velocidade do corpo no instante inicial $t = 0$ e f é a constante de aceleração do corpo. É dito que esta equação é a formula para v em termos de u, f e t.

Se subtrairmos 1 dos dois lados da equação 1.105, obtemos

$$x + 1 - 1 = 2 - 1 \tag{1.108}$$

logo

$$x = 1 \tag{1.109}$$

é a solução da equação 1.105.

2. Quando nós subtraimos 1 de ambos os lados da equação 1.105, nós estamos realizando uma operação permitida na equação. Operações permitidas nos permitem manipular equações de maneira tal que o resultado é outra equação que tem a mesma solução que a equação original. Podemos também dizer que operações permitidas são todas as operações que preservam a igualdade entre as expressões dos dois lado da equação.

3. *Exemplo 1*

   Se F é a temperatura em graus Fahrenheit e C é a temperatura em graus Celsius, então

   $$f - 32 = \frac{9}{5}C \tag{1.110}$$

   Qual temperatura na escala Fahrenheit corresponde a 10 graus Celsius?

   Substitua C por 10 na equação 1.110

   $$F - 32 = \frac{9}{5}10 \tag{1.111}$$

   Podemos simplificar o lado direito da equação para obter

   $$F - 32 = 18 \tag{1.112}$$

   Somando 32 em ambos os lados

   $$F - 32 + 32 = 18 + 32 \tag{1.113}$$

   logo

   $$F = 50 \tag{1.114}$$

   Exemplo 2

Se é conhecido o valor de F e é solicidado encontrar o valor de C, podemos manipular a equação para que C esteja em evidência da seguinte maneira.

Multiplicar ambos os lados de 1.110 por $\frac{5}{9}$

$$\frac{5}{9}(F-32) = \frac{5}{9}\frac{9}{5}C \tag{1.115}$$

E se nós trocarmos os lados e simplificarmos, temos

$$C = \frac{5}{9}(F-32) \tag{1.116}$$

Exemplo 3

Manipule a equação para que u seja função das outras variáveis.

$$puv = \frac{\psi v}{u} \tag{1.117}$$

Multiplique ambos os lados da equação 1.117 por u

$$pu^2v = \psi v \tag{1.118}$$

Divida ambos os lados de 1.118 por pv

$$u^2 = \frac{\psi \cancel{v}}{p \cancel{v}} \tag{1.119}$$

Cancele v no numerador e denominador do lado direito da equação e então tome a raiz quadrada de ambos os lados de 1.119. Note que existem duas soluções para a equação 1.119 e que estas variáveis representam grandezas físicas com propriedades que podem desqualificar algumas das soluções.

$$u = +\sqrt{\frac{\psi}{p}} \tag{1.120}$$

e

$$u = -\sqrt{\frac{\psi}{p}} \tag{1.121}$$

Podendo ser reescrito como

$$u = \pm\sqrt{\frac{\psi}{p}} \tag{1.122}$$

Exemplo 4

Considere duas equações que são simultaneamente verdadeiras

$$y = ax + b \tag{1.123}$$

e

$$Y = AX + B \tag{1.124}$$

As operações permitidas indicadas a seguir podem ser usadas para produzir uma unica equação de 1.123 e 1.124. Já que $Y = AX + B$, podemos realizar a operação permitida de divisão de ambos os lados de 1.123 por Y dividindo o lado esquerdo por Y e o direito por $AX + B$.

$$\frac{y}{Y} = \frac{ax + b}{AX + B} \tag{1.125}$$

4. *Exercícios*

   (a) Manipule a formula abaixo com operções válidas e obtenha $u(v, f, s)$.

   $$v^2 = u^2 + 2fs$$

   (b) Dado

   $$v = \pi r^2 h$$

   $$V = \pi R^2 H$$

   $$H = 2h$$

   expresse a razão $\frac{v}{V}$ em função de r e R apenas.

   (c) Um cilindro de altura h e raio r ocupa um volume V_1 dado por

   $$V_1 = \pi r^2 h$$

   Uma esfera de raio r ocupa um volume V_2 dado por

   $$V_2 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

   Se $V_2 = 2V_1$, expresse h em termos de r.

1.5 Solucionando equações

Introdução

Nesta seção nós solucionamos equações lineares, equações quadrática e equações cúbicas simples. As equações quadráticas são solucionadas por meio da formula de Baskhara

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{1.126}$$

O método por eliminação é utilizado para solucionar pares de equações simultâneas de duas variáveis.

1. Nós vimos que a solução de uma equação pode ser obtida através de operações permitidas.

   Para solucionar uma equação nós fazemos diversas operações até chegar a forma equivalente da equação de

   $$x = \text{alguma coisa conhecida} \tag{1.127}$$

   que é a solução da equação original.

2. *Exemplo 1: Equação linear em x*

   Resolva

   $$2x + 3 = -5 \tag{1.128}$$

   Subtraia 3 de ambos os lados de 1.128

   $$2x + 3 - 3 = -5 - 3 \tag{1.129}$$

   logo

   $$2x = -8 \tag{1.130}$$

   Divida ambos os lados por de 1.130 por 2

   $$x = -4 \tag{1.131}$$

   1.131 é a solução de 1.128.

   Em geral, a solução de

   $$ax + b = c \tag{1.132}$$

   para $a \neq 0$ é dada por

   $$x = \frac{c - b}{a} \tag{1.133}$$

   As soluções podem sempre ser checadas por substituição. Substituindo $x = -4$ na equação 1.128, temos que o lado direito da equação se torna $2(-4) + 3 = -5$, como requerido.

3. *Exemplo 2: Equações sem solução*

   Resolva

   $$x^2 = -4 \tag{1.134}$$

   Não podemos tirar a raíz quadrada dos dois lados da equação já que não existe nenhum ordinário cuja raíz quadrada seja um número negativo: A equação não tem solução.

4. *Exemplo 3: Equações quadráticas em x*

Resolva

$$2x^2 + x - 2 = 4 \tag{1.135}$$

Equações como essa podem sempre ser resolvidas comparando a equação equivalente na forma

$$2x^2 + x - 6 = 0 \tag{1.136}$$

com a equação quadrática geral em x, para $a \neq 0$,

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1.137}$$

temos que as soluções são dadas por

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{1.138}$$

e

$$x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{1.139}$$

A fórmula para a solução de 1.137 é geralmente escrita como

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{1.140}$$

Resolveremos 1.136 usando 1.138

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{2 \cdot 2} \tag{1.141}$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{49}}{4} \tag{1.142}$$

Portanto, são solução da equação 1.136, $x = -2$ e $x = \frac{3}{2}$.

Novamente, as soluções podem ser checadas por substituição. Quando $x = -2$, o lado esquerdo da equação 1.136 torna-se:

$$2 \cdot (-2)^2 + (-2) - 6 = 0 \tag{1.143}$$

E quando $x = \frac{3}{2}$,o lado esquerdo da equação 1.136 torna-se:

$$2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right) - 6 = \frac{9}{2} + \frac{3}{2} - 6 = 0 \tag{1.144}$$

Note que

(a) se $b^2 - 4ac$ é positivo, 1.137 tem duas soluções.

(b) se $b^2 - 4ac$ é zero, 1.137 tem uma soluções.

(c) se $b^2 - 4ac$ é negativo, 1.137 não tem solução pertencentes ao conjuntos dos numeros reais.

5. *Exemplo 4: Equação cúbica simples em x* Solucione

$$2x^3 + 4 = -12 \tag{1.145}$$

Subtraia 4 de ambos os lado de 1.145

$$2x^3 + 4 - 4 = -12 - 4 \tag{1.146}$$

logo

$$2x^3 = -16 \qquad . \tag{1.147}$$

Divida ambos os lados por de 1.147 por 2

$$x^3 = -8 \tag{1.148}$$

Calcule a raiz cúbica em ambos os lados da equação 1.148

$$x = (-8)^{\frac{1}{3}} \tag{1.149}$$

logo

$$x = -2 \tag{1.150}$$

A solução pode ser checada por substituição. Quando $x = -2$, o lado esquerdo da equação 1.145 torna-se:

$$2(-2)^3 + 4 = -12 \tag{1.151}$$

Em geral, as equações cúbicas simples, na forma

$$ax^3 + b = c \tag{1.152}$$

tem,para $a \neq 0$, solução dada por

$$x = \left(\frac{c-b}{a}\right)^3 \tag{1.153}$$

Se $c - b$ é positivo, x é positivo; Se $c - b$ é negativo, x é negativo.

6. Equações simultâneas Exemplos 1, 3 e 4 envolveram uma equação e uma variável. Agora vamos considerar duas equações em que cada uma envolve as mesmas duas variáveis. Por exemplo:

$$2x + 4y = 3 \tag{1.154}$$
$$x - 2y = 1 \tag{1.155}$$

Tais equações são chamadas de equações simultâneas, sistema de equações ou equações acopladas.

Realizando as operações permitidas em um par de equações simultâneas temos como objetivo chegar em duas equações equivalentes na forma

$$x = \text{algo conhecido} \tag{1.156}$$
$$y = \text{algo conhecido} \tag{1.157}$$

que forma a solução do par de equações.

Exemplo

Resolva

$$2x + 4y = 19 \tag{1.158}$$
$$x - y = -1 \tag{1.159}$$

Escolhemos resolver primeiro para x, sem nenhum motivo em especial.

Nós manipularemos 1.158 e 1.159 para eliminar y. Podemos fazer isso, por exemplo, multiplicando ambos os lados de 1.159 por 4 e então adcionando o resultado a equação 1.158. Ou seja, equação 1.159 vai ficar assim

$$4x - 4y = -4 \tag{1.160}$$

somando a equação 1.158 e 1.160, temos

$$6x + 0 = 19 - 4 \tag{1.161}$$

$$x = 2.5 \tag{1.162}$$

Para obter y, substitua o valor de x dado pela ultima equação na equação 1.160 e assim obteremos

$$4 \times (2.5) - 4y = -4 \tag{1.163}$$
$$y = 3.5 \tag{1.164}$$

1.162 e 1.164 são a solução do sistema de equações constituído das equações 1.158 e 1.159.

Vamos verificar os resultados. O lado esquerdo de 1.158 ao substituir x e y pelos nossos resultados fica

$$2 \times (2.5) + 4 \times (3.5) = 19 \tag{1.165}$$

e o lado esquerdo de 1.159 fica

$$2.5 - 3.5 = -1 \tag{1.166}$$

como queriamos comprovar.

7. A eliminação de variáveis é uma técnica muito útil na manipulação de sistemas de equações.

   Exemplo:

   Um corpo de massa m e velocidade v tem momento p e energia cinética E dados por

$$p = mv \tag{1.167}$$

   e

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \tag{1.168}$$

   Expresse E em termos de p e m. Multiplique a equação 1.168 por si mesmo

$$p^2 = m^2v^2 \tag{1.169}$$

   Divida a equação 1.168 pela equação 1.169

$$\frac{E}{p^2} = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{m^2v^2} \tag{1.170}$$

   Cancele o v^2 e um m a então miltiplique ambos os lados por p^2

$$E = \frac{p^2}{2m} \tag{1.171}$$

8. Na prática, quando se manipula ou quando se soluciona uma equação, a descrição das operações sendo realizadas são comprimidas e às vezes duas são feitas ao mesmo tempo.

   Isso pode aumentar a chance de se fazer um erro. Então sempre se deve checar a solução quando possível.

9. *Exercícios*

(a) Solucione as seguintes equações realizando operações válidas e verifique as suas soluções.

i. $9x + 8 = -4$.

ii. $6x^2 + 7x - 3 = 0$.

iii. $9x^2 + 18x + 8 = 0$.

iv. $6x^3 = 10^{-6}$ (Use logaritmos).

v. $2x - y = 3$ e $x + 3y = -2$.

vi. $x + y = 3$ e $6x - 2y = -2$.

(b) Verifique por substituição que

$$x = \frac{-b - b\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

é solução da equação $ax^2 + bx + c = 0$.

(c) Se

$$v^2 = u^2 + 2fs$$

e

$$v = u + ft$$

mostre que eliminando a dependência em v temos $ft^2 + 2ut - 2s = 0$.

Capítulo 2

Geometria

2.1 A área de um triângulo

Introdução

Nesta seção demonstraremos a fórmula $\frac{1}{2} \times base \times altura$ para a área de um triângulo.

1. Um triângulo é uma figura plana fechada de três lados. Se dois dos lados de um triângulo são perpendiculares, ou seja, formam um ângulo reto, dizemos que esse triângulo é retângulo. (Fig. 2.1)

   A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois ângulos retos. Portanto, da Fig. 2.2, $\alpha + \beta + \gamma = 2$ ângulos retos.

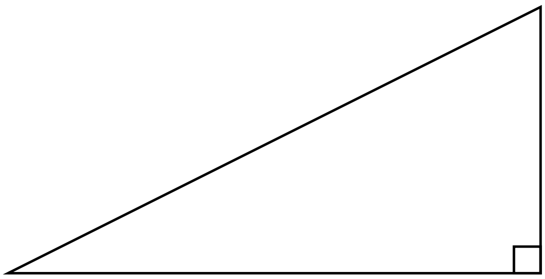


Figura 2.1:

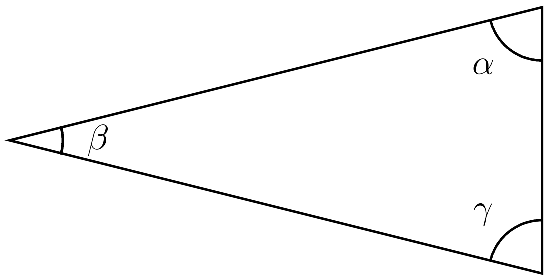


Figura 2.2:

2. Para determinar a área de um triângulo ABC construímos um retângulo $ABDE$ sobre o triângulo usando um dos lados do mesmo como um dos lados do retângulo (Fig. 2.3). CF é perpendicular a AB.

   Podemos considerar AB como a base do triângulo ABC; representamos esse comprimento por b.

   CF é a altura do triângulo ABC, que representamos por h.

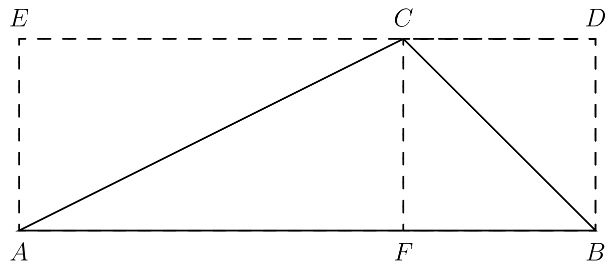


Figura 2.3:

Sabemos que $AB = ED = b$ e $BD = AE = FC = h$. Como as diagonais AC e BC dividem pela metade os retângulos $AFCE$ e $FBDC$, respectivamente, temos ÁreaAFC = ÁreaACE e ÁreaFBC = ÁreaCBD.

Portanto ÁreaAFC + ÁreaFBC + ÁreaACE + ÁreaCBD = Área$ABDE$ e ÁreaAFC + ÁreaFBC = ÁreaABC e $2\times$ Área ABC = Área $ABDE$

Porém, Área$ABDE = b \times h$

Portanto, Área$ABC = \frac{1}{2} \cdot b \times h$

Em palavras: a área de um triângulo é igual ao produto

$$\frac{1}{2} \times base \times altura \tag{2.1}$$

Exemplo

A área do triângulo XYZ da Fig. 2.4 é $\frac{1}{2}$ × base × altura = $\frac{1}{2}\times$ (4 unidades) × (3 unidades) = 6 unidades quadradas

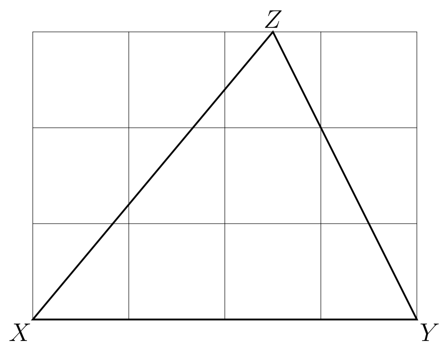


Figura 2.4:

2.2 A área de um paralelogramo

Introdução

Nesta seção determinaremos a fórmula para a área de um paralelogramo e mostraremos que dois paralelogramos, que tenham bases iguais e são contruídos entre um par de linhas paralelas, têm a mesma área.

1. Um quadrilátero é uma figura plana fechada com quatro lados. Então, como sabemos, um retângulo é um quadrilátero cujos ângulos internos são ângulos retos: um quadrado é um retângulo cujos lados possuem o mesmo comprimento. Um paralelogramo é um quadrilátero cujos pares de lados opostos são paralelos. (Portanto, um retângulo é um caso especial de um paralelogramo.)

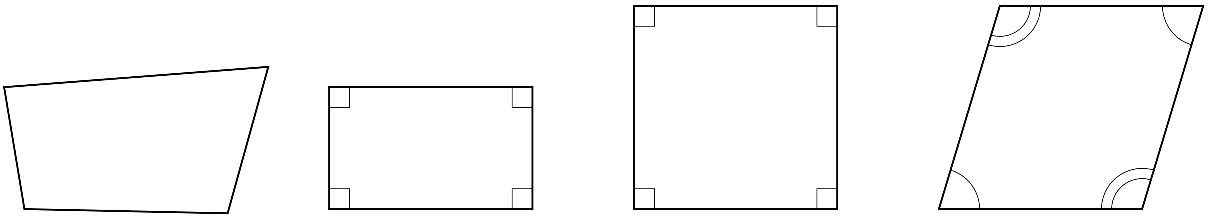


Figura 2.5:

Dividindo um quadrilátero em dois triângulos, podemos encontrar a área do quadrilátero (fig:2_6).

Não podemos fornecer a fórmula para a área de qualquer quadrilátero, mas deduziremos a fórmula para a área de um paralelogramo.

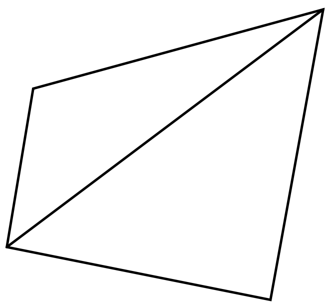


Figura 2.6:

2. Na Fig. 2.7, um paralelogramo é mostrado com um par de seus lados produzidos paralelamente.

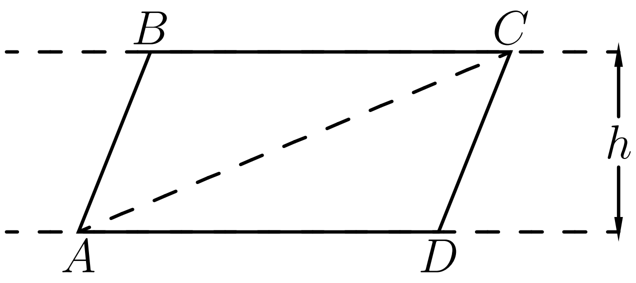


Figura 2.7:

A diagonal AC divide o paralelogramo exatamente em dois, isto é, Área $ABC =$ Área DAC e, portanto, Área $ABCD = 2\times$ Área ACD.

Mas, Área $ACD = \frac{1}{2}\times base\times altura = \frac{1}{2}AD\times h$, onde h é a distância perpendicular entre a extensão dos lados paralelos.

Portanto,

Área $ABCD = 2 \times (\frac{1}{2} \cdot AD \times h) = AD \times h$

Em palavras: a área de um paralelogramo é igual ao produto de um de seus lados pela distância perpendicular entre este lado e o lado paralelo ao mesmo.

Exemplo

A área do paralelogramo $ABCD$ na Fig. 2.8 é $AD \times h =$ 6 unidades $\times$ 4 unidades $=$ 24 unidades quadradas

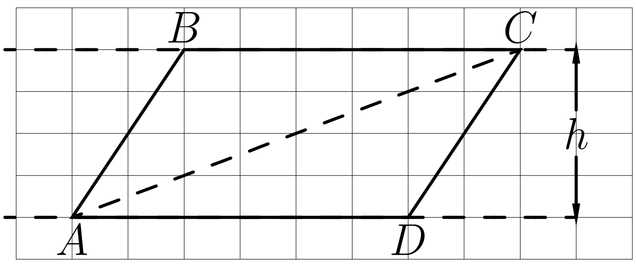


Figura 2.8:

3. A Fig. 2.9 mostra dois paralelogramos entre um par de linhas paralelas. $AD = WX$ e a distância perpendicular entre as linhas paralelas é h. Área $ABCD =$ Área $AD\times h$ Área $YZWX = WX \times h$ Mas $AD = WX$ Então, Área $ABCD =$ Área $XYZW$.

   Se denominarmos base e o lado de um paralelogramo que está sobre as linhas paralelas estendidas, podemos expressar os resultados acima em palavras: Dois

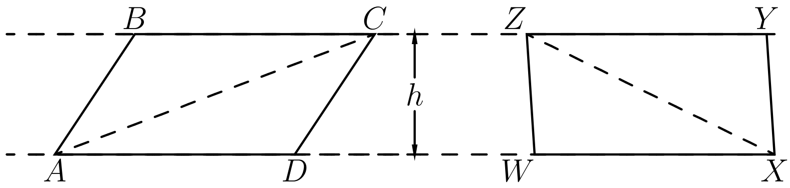


Figura 2.9:

paralelogramos entre um par de linhas paralelas cujas bases são iguais, possuem a mesma área.

Exemplo

Por quê os paralelogramos $ABCD$ e $ABEF$ possuem áreas iguais? (Fig. 2.10) Como eles têm uma base em comum, AB, eles têm uma base igual. Portanto, do resultado acima, eles têm áreas iguais.

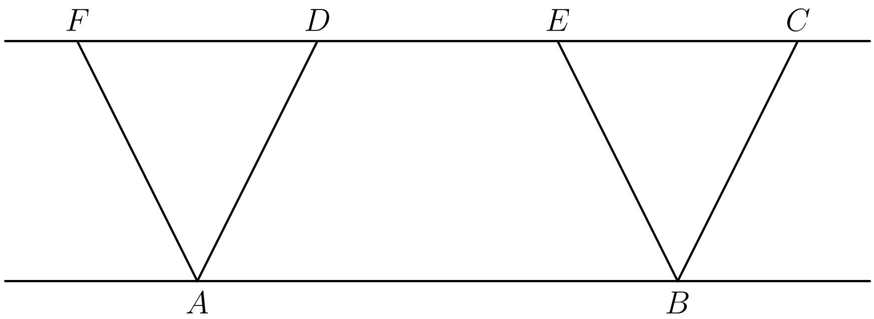


Figura 2.10:

2.3 Um pouco de geometria do círculo

Introdução

Nesta seção encontraremos as fórmulas para a circunferência (o contorno do círculo) e para a área de um círculo: circunferência $= 2\pi r$ e área $= \pi r^2$.

Nós também encontraremos as palavras: arco, corda, tangente, setor e segmento.

1. Uma circunferência é o conjunto de todos os pontos em um plano que estão a uma mesma distância de um ponto fixo. O ponto fixo é chamado de centro da circunferência. Qualquer linha reta que una o centro a um ponto da circunferência é chamada de raio.

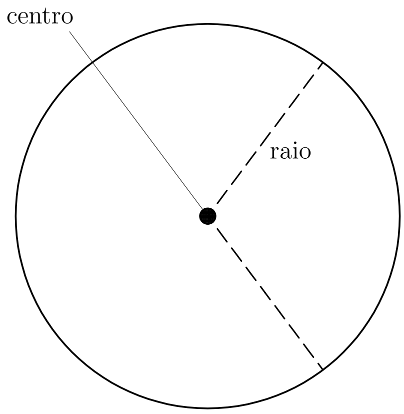


Figura 2.11:

Uma linha reta que una dois pontos da circunferência, passando pelo centro da mesma, é chamada de diâmetro. Se d representa o comprimento do diâmetro e r o comprimento do raio, então $d = 2r$. A distância percorrida no contorno de um círculo, a partir de um ponto qualquer na borda do círculo, até retornar ao ponto inicial, com uma volta completa da circunferência, é chamda de comprimento da circunferência. Com a ajuda de um barbante e de alguns cilindros, podemos mostrar que a razão $\frac{\text{comprimento da circunferência}}{\text{diâmetro}}$ é aproximadamente igual a 3,14. Esta razão, na verdade, é constante para todas as circunferências e é denomindada sempre pela letra grega π. O valor de π possui infinitas casas decimais, mas para a maioria dos trabalhos a aproximação $\pi = 3{,}14$ (arredondamento para 2 casas decimais) é suficiente.

Temos, então, que o comprimento da cirferência $= \pi \cdot d = 2 \cdot \pi \cdot r$

2. Pode-se mostrar que a área A delimitada por uma circunferência é dada por $A = \pi \cdot r^2$. (Você pode gostar de estimar a área do círculo mostrado na Fig. 2.12, cujo raio é de 10 unidades.)

   Exemplo

   Um círculo A tem área quatro vezes maior que um círculo B. Em quantas vezes a circunferência de A é maior que a circunferência de B?

   Se A tem raio r e B tem raio R:

   Área de $A = \pi r^2$ e área de $B = \pi R^2$ e $\pi r^2 = 4\pi R^2$

   Como r e R são positivos, $r = 2R$.

   Circunferência de $A = 2\pi r = 4\pi R$ Circunferência de $B = 2\pi R$

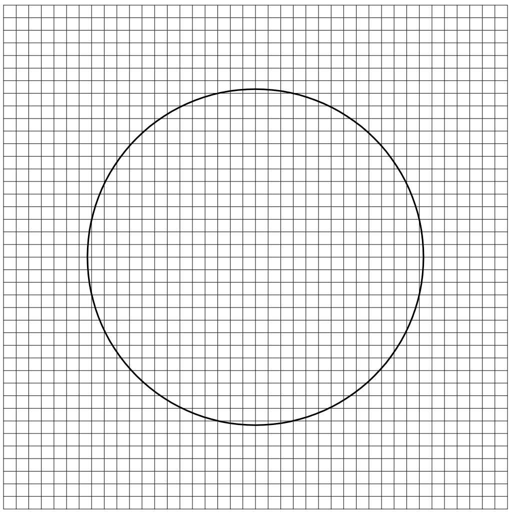


Figura 2.12:

Portanto, a circunferência de A é o dobro da de B.

3. A conexão entre dois pontos na circunferência é chamada de arco. Na Fig. 2.13 uma circunferência é mostrada dividida em dois arcos.

   Uma linha reta que liga a ponta de um arco a outra ponta do arco é chamada de corda.

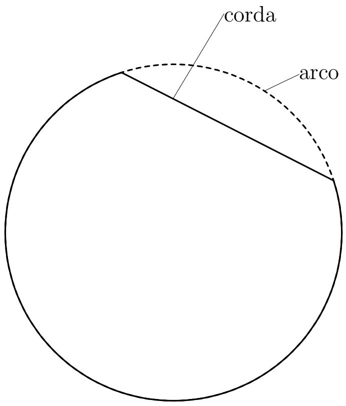


Figura 2.13:

4. O raio que divide a corda ao meio o faz em um ângulo reto. Na Fig. 2.14 $PR = RQ$. O raio também divide o arco ao meio: arco PT = arco TQ.

5. Dividimos agora o arco PQ de tal maneira que arco PT = arco TQ. Podemos perceber que o comprimento da corda diminui na medida em que esta se aproxima

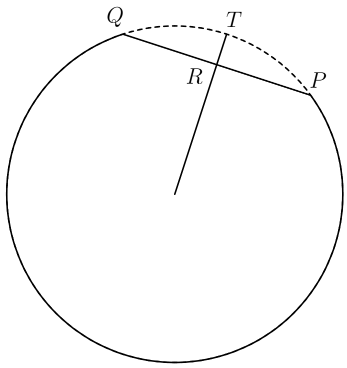


Figura 2.14:

do ponto T. Na Fig. 2.15 estendemos as cordas além do círculo por meio de linhas retas. Cada uma dessas linhas é perpendicular ao raio. Ao final, uma das retas prolongadas a partir das cordas se torna uma linha reta perpendicular ao raio no ponto T e que toca a circunferência somente nesse ponto. Essa linha é chamada de tangente.

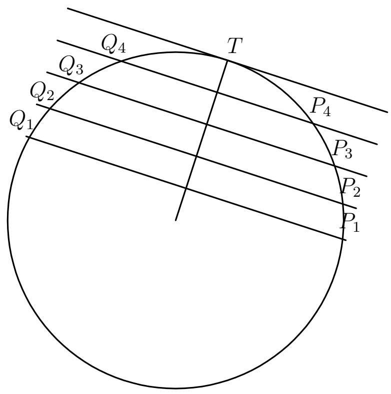


Figura 2.15:

6. Note que o arco PQ é maior que a corda PQ. Um diâmetro é um caso especial de uma corda; neste caso o arco é uma semi-circunferência e seu comprimento é πr.

7. Um segmento de círculo é a região delimitada pela corda PQ e pelo arco PQ (Fig. 2.16)

   Um setor de círculo é a região delimitada por dois raios para os pontos P e Q e o arco PQ (Fig. 2.17)

   Exemplo

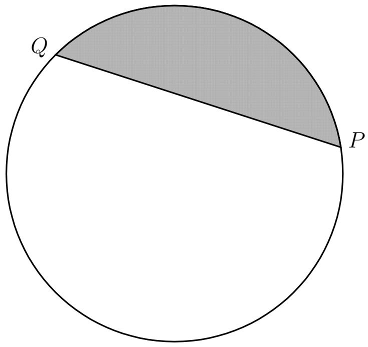


Figura 2.16:

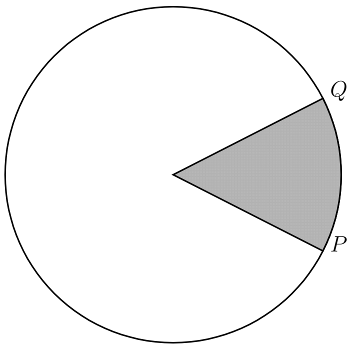


Figura 2.17:

Por quê as tangentes aos dois pontos extremos de um semi-círculo são paralelas? (Fig. 2.18) T_1T_2 é uma corda que passa por C, o centro da circunferência; ou seja, T_1CT_2 é um diâmetro. T_1CT_2 é perpendicular à ambas as tangentes, pois CT_1 e CT_2 são raios, portanto as duas tangentes são paralelas.

2.4 Unidades de ângulo

Introdução

Esta seção define as unidades de ângulos, o radiano e o grau, e estabelece a equação que os relaciona
$2\ \pi$ radianos $=$ 360 graus

1. Se as linhas OA e OB são inicialmente coincidentes e então OA é rotacionada no sentido anti-horário no eixo O para uma nova posição, dizemos que OA se deslocou por um ângulo θ, que é mostrado na Fig. 2.19.

2. Há várias unidades de ângulo, assim como existem diferentes unidades para qualquer

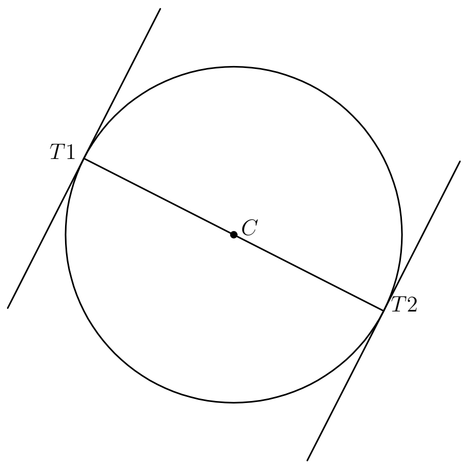


Figura 2.18:

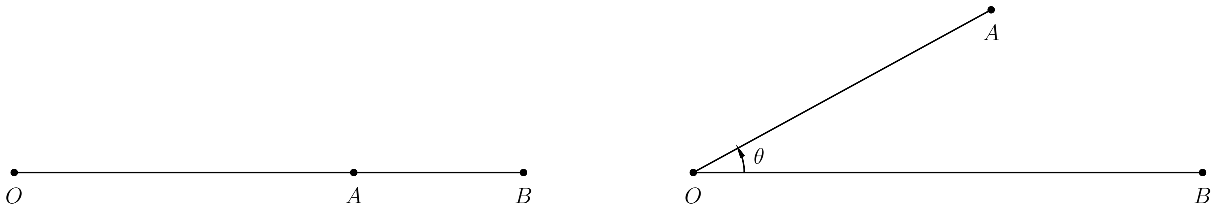


Figura 2.19:

outra grandeza física. Se $OA = OB = r$ unidades de comprimento, e o arco de circunferência $AB = s$ unidades de comprimento, então o tamanho do ângulo θ em radianos é $\frac{s}{r}$. (Fig. 2.20) A abreviação rad é usada, ou seja,
$\theta = \frac{s}{r}$ rad.
Quando $s = r$, temos que $\theta = 1$ rad.

Se OA percorre uma rotação completa, denominaremos o ângulo percorrido de 1 revolução. Como o comprimento da circunferência é igual a $2\pi\times$ raio
1 rev $= \frac{2\pi r}{r}$rad, ou seja, 1 rev $= 2\pi$ rad.

Uma unidade comum para ângulo é o grau. Em 1 revolução existem 360 graus. A abreviação para grau é $^\circ$
1 rev $= 360^\circ$ e, das equações acima, $2\pi rad = 360^\circ$
Da equação acima: 1 rad $= \frac{360}{2\pi}^\circ$, ou seja, 1 radiano é um pouco menor que 60°, desde que $\pi = 3{,}14$.

3. A tabela abaixo mostra algumas equivalências úteis entre graus e medidas de radianos de um ângulo.

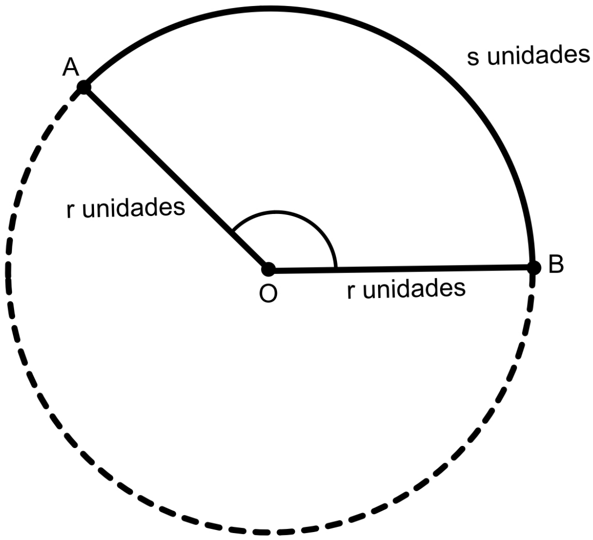


Figura 2.20:

2.5 Triângulos semelhantes e congruentes

Introdução

Nesta seção definiremos triângulos semelhantes e triângulos congruentes, assim como critérios para similaridade e congruência. Uma propriedade de triângulos semelhantes que nos permite fazer deduções sobre o comprimento dos lados dos mesmos também será discutida.

1. Na Fig. 2.21, os dois triângulos ABC e ADE têm a mesma forma, isto é,
   $\angle ABC = \angle ADE$
   $\angle BCA = \angle DEA$ e
   $\angle A$ é comum a ambos.

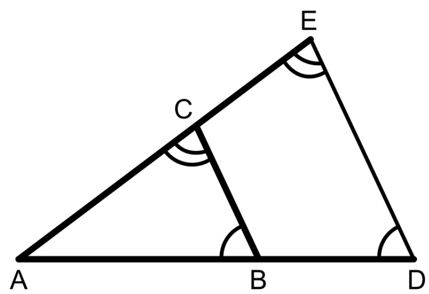


Figura 2.21:

Radianos	Graus
0	0
$\frac{\pi}{6}$	30
$\frac{\pi}{4}$	45
$\frac{\pi}{3}$	60
$\frac{\pi}{2}$	90
π	180
$\frac{3\pi}{2}$	270
2π	360

O triângulo ADE pode ser visto como uma ampliação do triângulo ABC.
Dois triãngulos são ditos semelhantes se os ângulos de um forem α, β e γ e os ângulos do outro também forem α, β e γ.
Nas Figs. 2.22 e 2.23 AB e XY, BC e YZ, CA e ZX são pares de lados correpondentes em triângulos semelhantes.

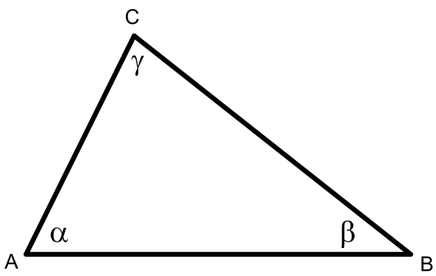


Figura 2.22:

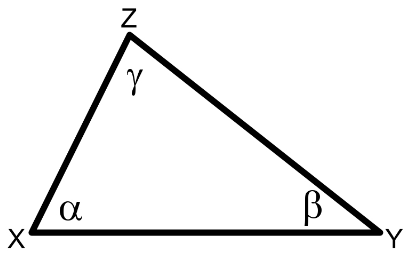


Figura 2.23:

2. Se os lados de dois triângulos semelhantes são medidos, verificaremos que a razão de um par de lados correspondentes é igual à razão de qualquer outro par de lados correpondentes. Então, das Figs. 2.22 e 2.23

$$\frac{AB}{XY} = \frac{BC}{YZ} = \frac{CA}{ZX} \tag{2.2}$$

É convencional escrever os vértices de dois triângulos semelhantes de tal maneira que pares de letras correpondentes forneçam lados correspondentes. Então, se o triângulo ABC é semelhante ao triângulo XYZ, temos que AB e XY são lados correspondentes, assim como YZ e BC, e ZX e CA.

Então, se os triângulos ABC e XYZ são semelhantes

$$\frac{AB}{XY} = \frac{BC}{YZ} = \frac{CA}{ZX} \tag{2.3}$$

3. Essa propriedade dos triângulos semelhantes pode ser usada para determinar os comprimentos de lados desconhecidos. Por exemplo, na Fig. 2.24 os triângulos ABE e ACD são semelhantes. Portanto
$\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CD} = \frac{EA}{DA}$
Do primeiro par de equações, as azões são
$\frac{2cm}{AC} = \frac{1cm}{2cm}$, isto é, $AC = 4$ cm

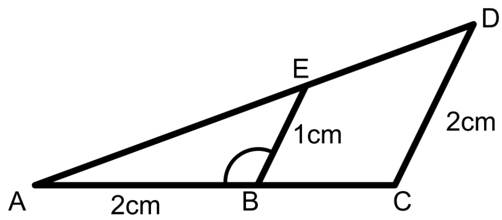


Figura 2.24:

4. **Critérios para similaridade**

   (a) Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é $180\,^\circ$, ou π rad (ver item anterior), se um triângulo tem dois ângulos que são iguais a dois ângulos em um outro triângulo, então esses dois triângulos são semelhantes.
   Então na Fig. 2.25, os triângulos ABC e ADE são semelhantes. (Note a ordem dos vértices)

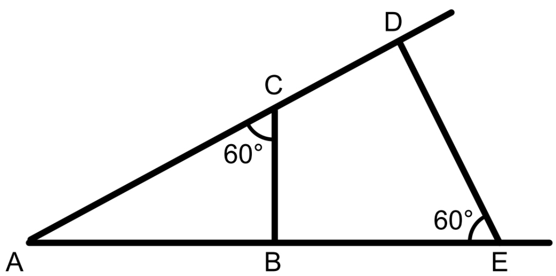


Figura 2.25:

(b) Vimos que se dois triângulos são semelhantes, então as razões dos lados correspondentes são iguais.

A recíproca é verdadeira, isto é, se ABC e DEF são dois triângulos e
$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$
então os triângulos são semelhantes.

A partir disso, podemos deduzir que os dois triângulos da Fig. 2.26 são semelhantes.

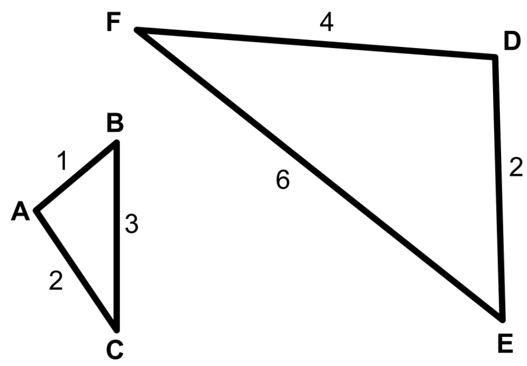


Figura 2.26:

5. Se os triângulos XYZ e ABC são semelhantes e os lados correspondentes são iguais, então
$\frac{AB}{XY} = \frac{BC}{YZ} = \frac{CA}{ZX} = 1$
então os triângulos são ditos congruentes. Se dois triângulos são congruentes, um deles poderia ser invertido ou girado, se necessário, e colocado exatamente sobre o outro. Então, dois triângulos espelhados são congruentes.
Na Fig. 2.27
$AB = XY$; $BC = YZ$; e $CA = ZX$

6. **Critérios para congruência**

De algum conhecimento sobre os comprimentos dos lados e das medidas dos ângulos de dois triângulos, é posível deduzir a congruência.

(a) Se os comprimentos dos lados de um triângulo são iguais aos comprimentos de um outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes. Portanto, os dois triângulos nas Figs. 2.28 e 2.29 são congruentes.

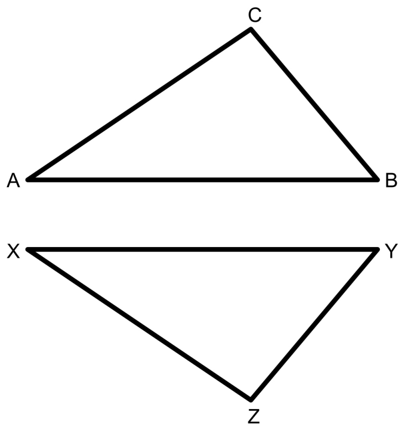


Figura 2.27:

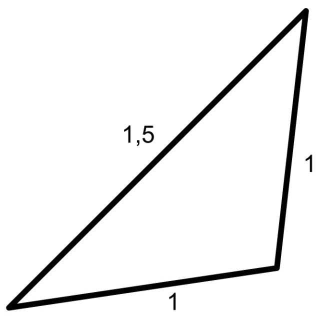


Figura 2.28:

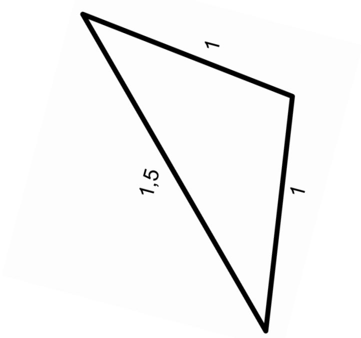


Figura 2.29:

(b) Se dois triângulos possuem dois ângulos iguais a dois ângulos de um outro triângulo (isto é, eles são semelhantes) e os comprimentos de pares de lados correspondentes são iguais, então os triângulos são congruentes. Portanto, os dois triângulos na Fig. 2.30 são congruentes, assim como os triângulos ABC e ADC na Fig. 2.31.

(c) Se os comprimentos de dois lados de um triângulo são iguais aos de dois lados de um outro triângulo (isto é, eles têm dois lados de comprimento comum) e se um dos ângulos de um triângulo é igual a um ângulo do outro (isto é, eles têm um ângulo em comum), então os triângulos são congruentes.
Portanto, os dois triângulos na Fig. **??** são congruentes, assim como aqueles da Fig. **??**. (A hipotenusa é necessariamente o maior lado.)

Essa congruência não pode ser deduzida quando o ângulo comum é oposto ao lado menor como mostrado nas Figs. **??** e **??**, onde dois triângulos são

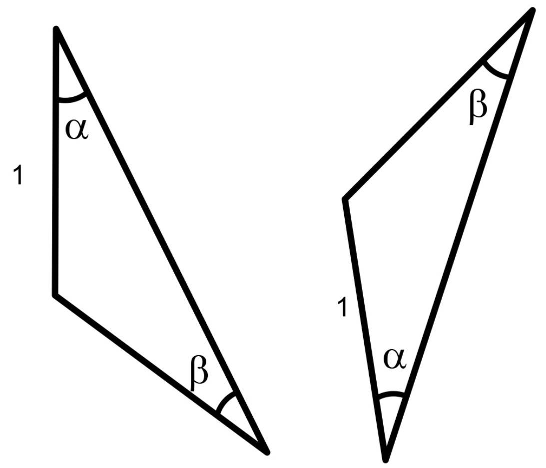


Figura 2.30:

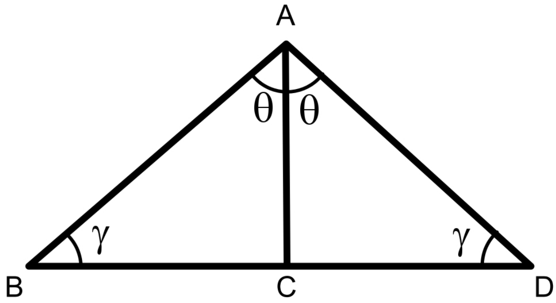


Figura 2.31:

apresentados tendo um ângulo comum de 40° e dois lados comuns de 2 cm e 3 cm, sendo o angulo de 40° oposto ao lado de 2 cm.

Existe a possibilidade de que dois triângulos sobre os quais nosso conhecimento é limitado, como nesse caso, sejam congruentes; assim, quando confrontados casos como este, tudo o que podemos dizer é que "não é possível concluir sobre a congruência"e não que "os triângulos não são congruentes".

Capítulo 3

Gráficos

3.1 Eixos Cartesianos

Introdução

Esta seção explica como representar um ponto em um plano através de um par de coordenadas cartesianas (x, y).

1. Podemos representar a localização de qualquer ponto em um plano (uma região plana bidimensional, como o tampo de uma mesa) através da especificação de duas distâncias perpendiculares: do ponto até cada uma de duas retas perpendiculares entre si. Estas duas linhas são concebidas como horizontal e vertical (Fig. 1). A linha horizontal é chamada de eixo x e a linha vertical de eixo y. O ponto de intersecção dos dois eixos é chamado de origem e é marcado com um O.

   Distâncias perpendiculares a pontos a direita do eixo y são chamadas positivas; distâncias a esquerda são chamadas de negativas. Distâncias perpendiculares de pontos acima do eixo x são chamadas de positivas; distâncias a pontos abaixo são chamadas de negativas. Os eixos x e y são conhecidos por Eixos Cartesianos Retangulares em homenagem a René Descartes (1596-1650), um matemático e filósofo francês.

2. As distâncias perpendiculares de um ponto aos eixos são escritas entre parênteses, sendo que escreve-se primeiro a distância do eixo y. Na figura 2 abaixo podemos especificar: P como $(5, 3)$; Q como $(-4, 2)$; R como $(-7, -3)$; T como $(3, -3)$. $(5, 3)$ são as coordenadas cartesianas de P. Note que $(5, 3)$ é diferente de $(3, 5)$. A cada ponto no plano corresponde um único par de coordenadas, e a cada par de coordenadas corresponde apenas um ponto no plano. É por isto que freqüentemente

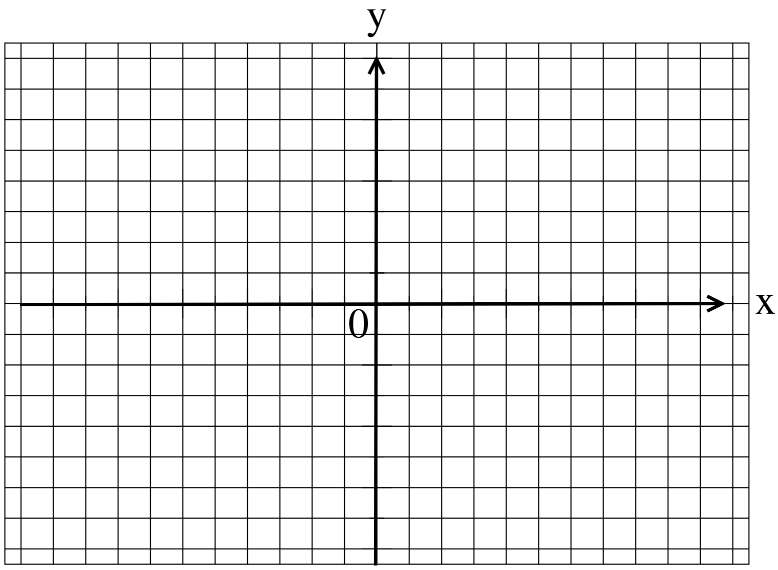


Figura 3.1: Eixos cartesianos

falamos do ponto $(2, 1)$, por exemplo, sem nenhuma ambigüidade. A primeira coordenada mede a distância ao eixo y, isto é, a distância paralela ao eixo x, e por isso é chamada de coordenada x. A segunda coordenada é chamada de coordenada y. Nos referimos às coordenadas de qualquer ponto no plano como (x, y). Note que na 2 temos a mesma escala nos dois eixos. Isto nem sempre é assim, como veremos mais adiante.

3.2 Gráfico de uma equação

Introdução Esta seção explica o que quer dizer o gráfico de uma equação; o termo "inclinação" é definido e os gráficos de equações como $y = ax + b$ e $y = ax^2 + bx + c$ são discutidos.

1. A partir de equações tais como

$$y = 2x - 3 \tag{3.1}$$

$$y = 3x + 2x - 1 \tag{3.2}$$

podemos obter um valor de y para qualquer valor de x que desejemos, parecido com uma situação de entrada e saída.

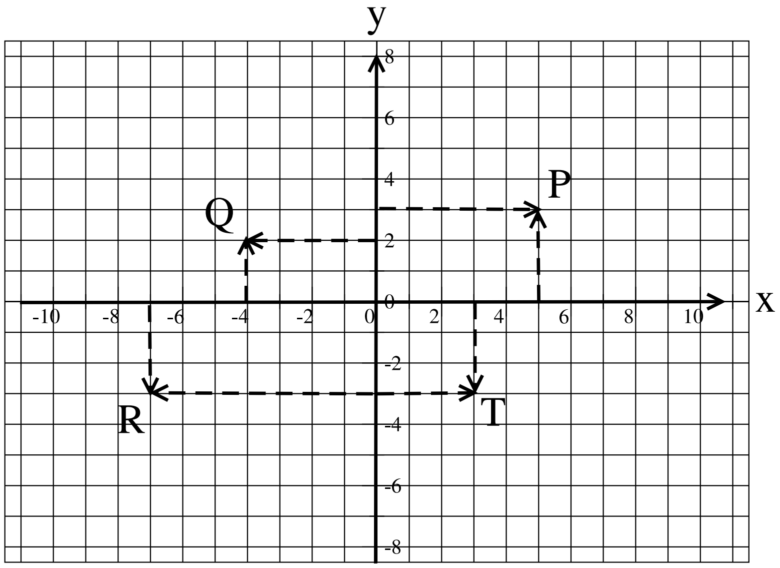


Figura 3.2: Coordenadas cartesianas

Exemplo 1 Veja uma pequena tabela de valores a partir de $y = 2x - 3$.

x	y	
-2	-7	$\rightarrow (-2, -7)$
-1	-5	$\rightarrow (-1, -5)$
0	-3	$\rightarrow (0, -3)$
1	-1	$\rightarrow (1, -1)$
2	1	$\rightarrow (2, 1)$

Para cada par x, y podemos especificar um par de coordenadas. Estas coordenadas estão representadas graficamente na figura 4. Todas elas ficam sobre a linha reta descrita pela equação $y = 2x - 3$. Em geral, o gráfico de qualquer equação da forma $y = ax + b$ é uma linha reta. É suficiente colocar no gráfico quaisquer dois pontos para desenhar uma linha.

Se $(x_1, y1)$ e (x_2, y_2) são as as coordenadas de quaisquer dois pontos sobre a linha reta, então a razão é chamada de inclinação da linha reta em relação ao eixo x.

A Fig. 5 mostra uma linha reta cuja equação é $y = ax + b$ e que passa pelos pontos A e B, cujas coordenadas são (x_1, y_1) e (x_2, y_2), respectivamente.

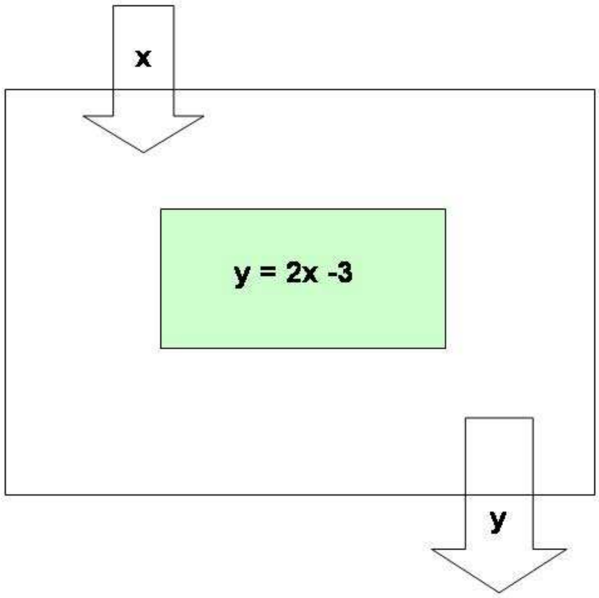


Figura 3.3: Eixos cartesianos

Qual é a inclinação desta reta?

Como A e B estão sobre a reta, temos

$$y_1 = ax_1 + b \tag{3.3}$$

e

$$y_2 = ax_2 + b. \tag{3.4}$$

Portanto, subtraindo 3.4 de 3.3, obtemos

$$\begin{aligned} y_1 - y_2 &= (ax_1 + b)\breve{}(a_2 + b) && (3.5)\\ &= a(x_1\breve{}x_2). && (3.6)\end{aligned}$$

Assim, a

$$\text{inclinação} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = a \tag{3.7}$$

, isto é, a inclinação do gráfico de $y = ax + b$ é igual a a.

Exemplo

A inclinação de $y = -2x + 3$ é -2. Para verificar esta afirmação, precisamos especificar dois pontos na linha (Fig. 1).

Se $x_1 = 1$, $y_1 = -2x_1 + 3 = 1$. Se $x_2 = 2$, $y_2 = -2x_2 + 3 = -1$. Portanto, $(x1, y1)$ é $(1, 1)$ e $(x2, y2)$ é $(2, -1)$ e a

$$\text{inclinação} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{1 - (-1)}{1 - 2} = \frac{2}{-1} = -2. \tag{3.8}$$

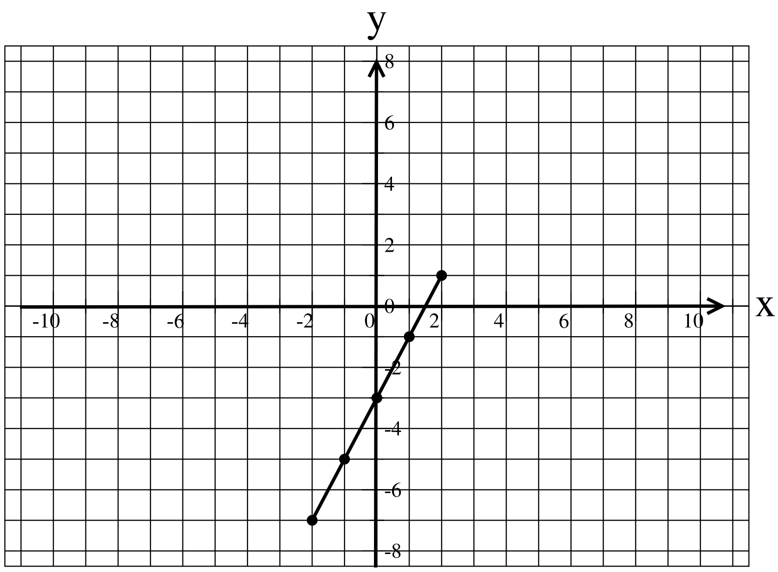


Figura 3.4: Eixos cartesianos

Da definição 3.7, como $y = ax + b$ é independente de b, $y = ax + b_1$ e $y = ax + b_2$ representam linhas de mesma inclinação, isto é, retas paralelas (Fig. 7).

Exemplo 2

O gráfico de $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$ também pode ser obtido se colocamos no plano alguns pontos e se supomos que os pontos podem ser unidos por uma curva lisa.

x	y
-3	5 $\frac{1}{2}$
-2	3
-1	1 $\frac{1}{2}$
0	1
1	1 $\frac{1}{2}$
2	3
3	5 $\frac{1}{2}$

Em geral, o gráfico de qualquer equação da forma

$$y = ax^2 + bx + c \tag{3.9}$$

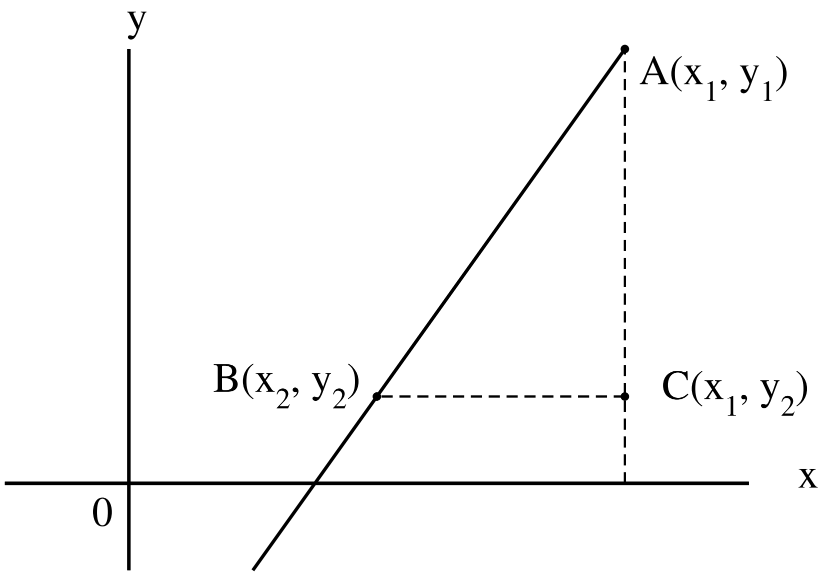


Figura 3.5: Eixos cartesianos

em que a não é nulo, tem forma semelhante à da Fig. 8. Os gráficos deste tipo de equação são chamados de parábola.

3.3 Representando dados com um gráfico

Introdução

Nesta seção consideraremos como representar dados obtidos em experimentos simples. Encontraremos "proporcionalidade direta"e "inclinação"novamente.

1. Em um experimento para investigar a relação entre duas grandezas físicas observamos valores de uma das grandezas para valores específicos da outra. A tabela abaixo nos dá valores correspondentes para a distância, d, percorrida no tempo, t, por um corpo se movendo com aceleração nula (isto é, com velocidade constante). Desta tabela 6 pares de coordenadas são encontradas.

   Essas coordenadas podem ser plotadas. Para fazer isso precisamos escolher escalas adequadas para cada eixo. Se, por exemplo, desejamos ler o valor de t quando d é igual a 17 metros, a escala deve ser tal que 17 m é facilmente lido; isto é, esteja em uma divisão adequada. Outra condição geral é que devemos usar uma boa

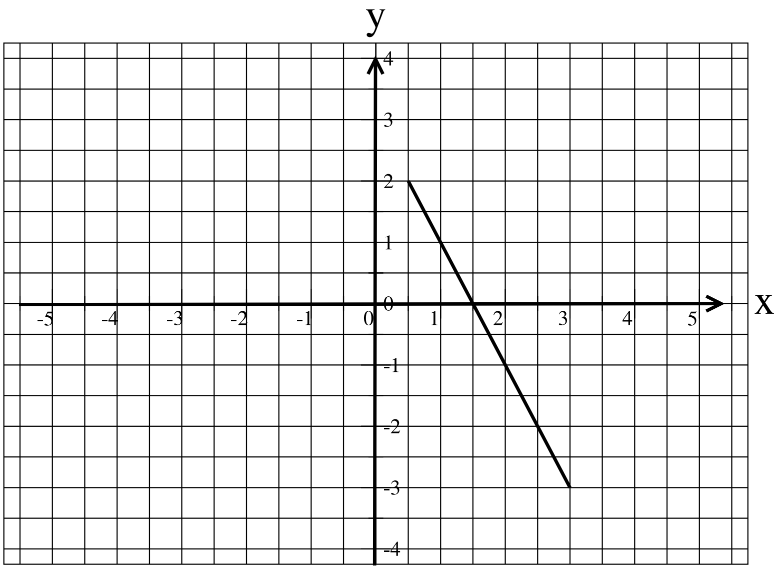


Figura 3.6: Eixos cartesianos

proporção do papel milimetrado disponível para que possamos realizar marcações e leituras mais precisas possíveis. O gráfico na Fig. 9 mostra como os dados acima podem ser plotados de tal maneira a mostrar os dois pontos acima. Note que as escalas são marcadas e os eixos marcados.

2. Inspecionando o gráfico podemos ver que a distância percorrida é diretamente proporcional ao tempo decorrido, isto é
$d \propto t$
$d = vt$

t (em segundos)	d (em metros)
0	0 $\rightarrow (0; 0)$
1	3,6 $\rightarrow (1; 3,6)$
2	8,4 $\rightarrow (2; 8,4)$
3	12,4 $\rightarrow (3; 12,4)$
4	15,8 $\rightarrow (4; 15,8)$
5	20,2 $\rightarrow (5; 20,2)$

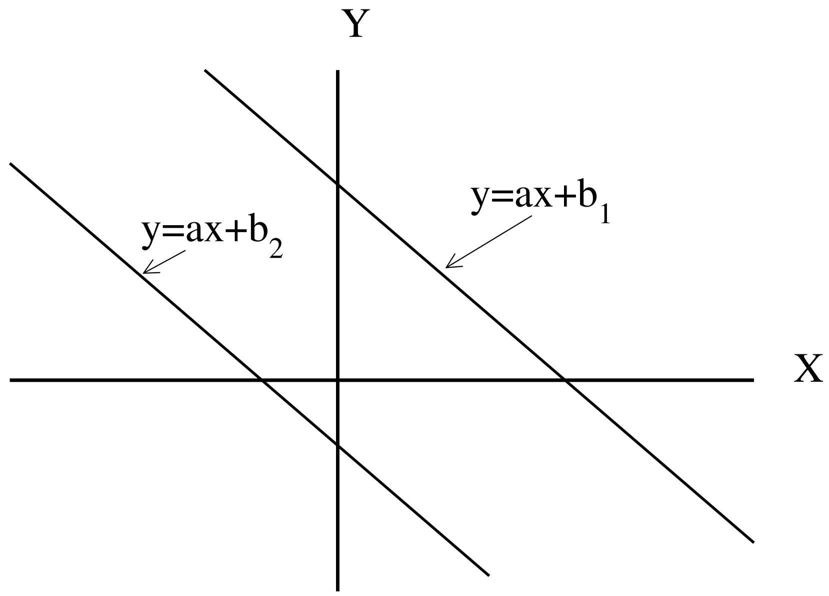


Figura 3.7: Eixos cartesianos

onde v é a constante de proporcionalidade, a velocidade constante do corpo. Uma linha reta é desenhada passadno pelos pontos; sua inclinação nos dá a velocidade constante, v. (Nota: A linha reta pode ser desenhada utilizando uma régua transparente e tentando deixar o mesmo número de pontos acima e abaixo da mesma, pois dessa maneira a soma das distâncias entre a linha e os pontos é a menor possível.) A inclinação é calculada construindo-se um triângulo retângulo nos pontos onde a linha reta por subdivisões que podemos ler; neste caso v é

$\frac{(17{,}6-2{,}2)m}{(4{,}4-0{,}5)s} = \frac{15{,}4}{3{,}9}$ m/s = 3,95m/s

Note que é uma convenção representar os valores observados no eixo vertical e os valores pré-selecionados no eixo horizontal.

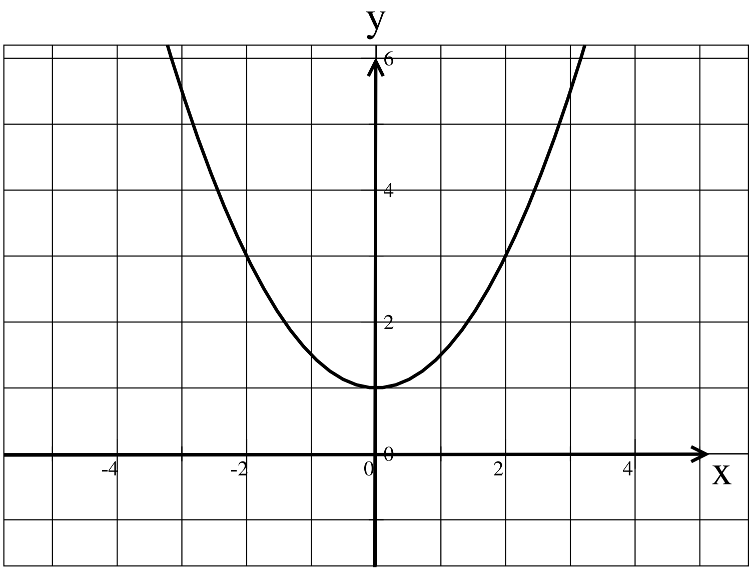


Figura 3.8: Eixos cartesianos

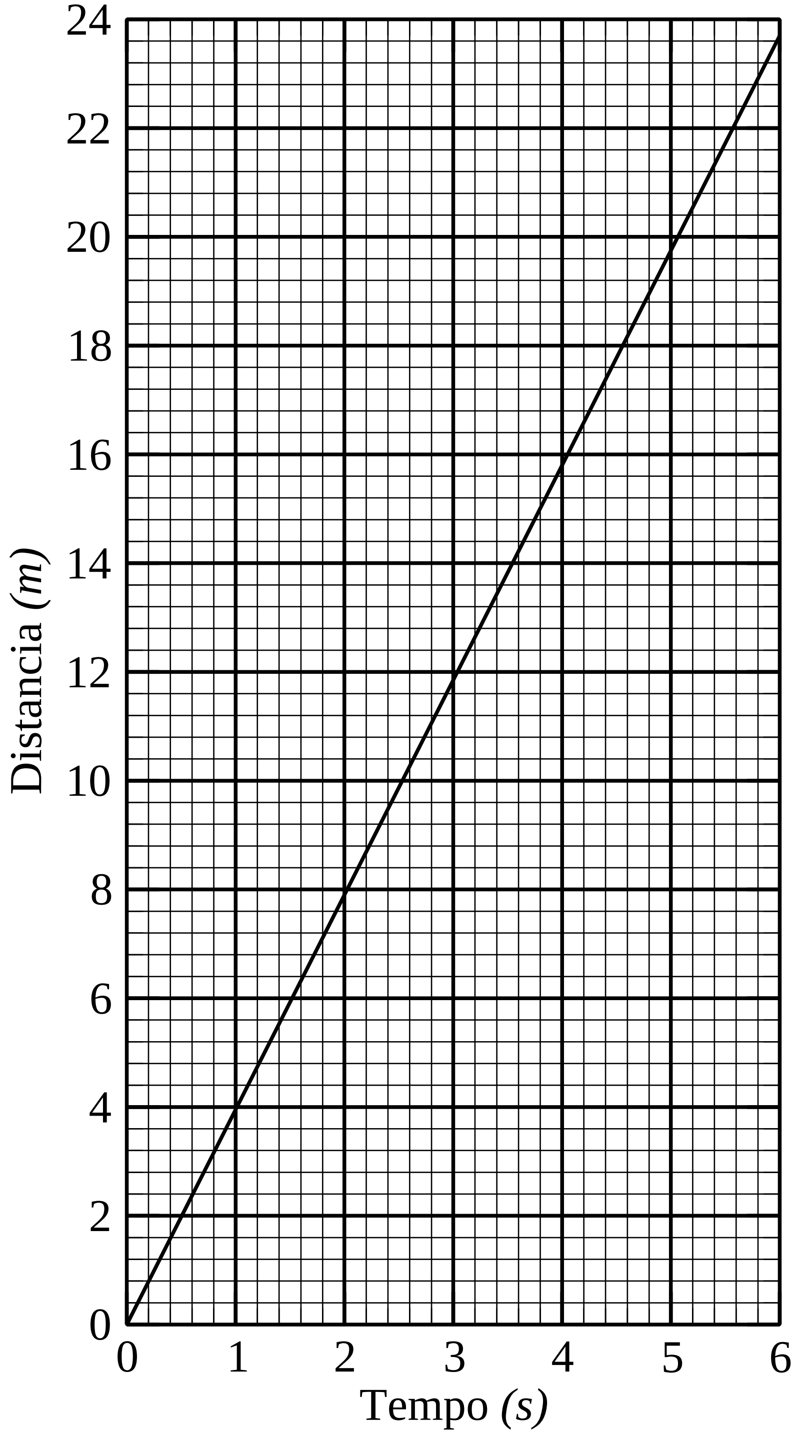


Figura 3.9:

Capítulo 4

Trigonometria

4.1 Seno, cosseno e tangente

Introdução Nesta seção definiremos a tangente, o seno e o cosseno de um ângulo. Discutimos a tangente e a inclinação. Discutimos também a aproximação

$$\tan\theta \approx \theta \tag{4.1}$$

e

$$\sin\theta \approx \theta \tag{4.2}$$

,onde é medido em radianos. Apresentamos s gráficos de tangente, seno e cosseno e definimos o termo "periódico".

1. Na Fig. 1, o triângulo OPQ possui um ângulo reto em Q e o ponto Q tem coordenadas (x, y). Portanto, as coordenadas de Q são $(x, 0)$. O ângulo POQ, θ , é menor que $\frac{1}{2}\pi$ rad, isto é, θ é agudo.

   OP tem comprimento r, onde $r = +\sqrt{x^2 + y^2}$, pelo teorema de Pitágoras.

   Definimos a tangente de θ, que é abreviado para $\tan\theta$, por

   $$\tan\theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{y}{x} \tag{4.3}$$

   Definimos o seno de θ, que é abreviado para $\sin\theta$, por

   $$\tan\theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{y}{x} \tag{4.4}$$

   Definimos o cosseno de θ, que é abreviado para $\cos\theta$, por

   $$\tan\theta = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{y}{x} \tag{4.5}$$

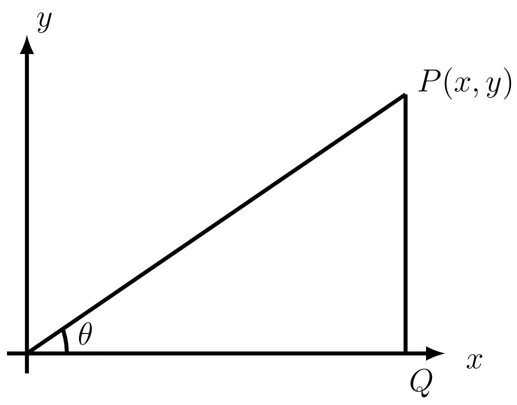


Figura 4.1:

Se θ permanece constante, cada uma dessas três razões permanece a mesma para qualquer posição de $P(x, y)$. A Fig. 2 mostra duas posições de P, P_1 e P_2. Os triângulos OQP_1 e OQP_2 são semelhantes e portanto

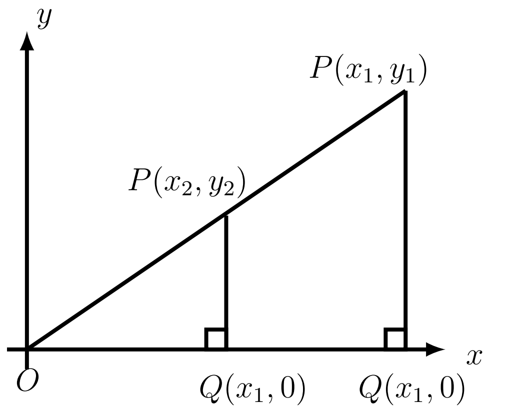


Figura 4.2:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \tan\theta \tag{4.6}$$

$$\frac{y_1}{r_1} = \frac{y_2}{r_2} = \sin\theta \tag{4.7}$$

$$\frac{x_1}{r_1} = \frac{x_2}{r_2} = \cos\theta \tag{4.8}$$

Na Fig. 3, desenhamos P_2R paralelo ao eixo x. Os triângulos OQ_2P_2, OQ_1P_1 e P_2RP_1 são semelhantes e portanto

$$\frac{y_2}{x_2} = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \tag{4.9}$$

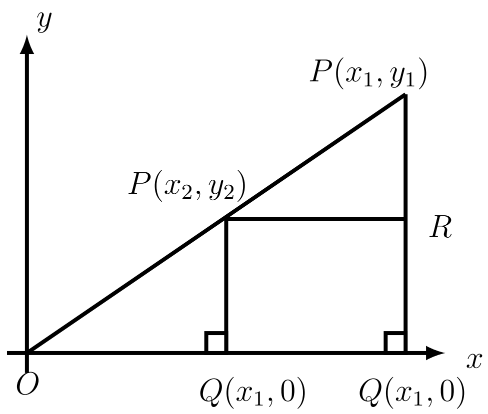


Figura 4.3:

Dessa forma, a inclinação de uma linha reta é igual à tangente do ângulo entre o eixo x e a linha reta, partindo-se do eixo x no sentido contrário ao do relógio.

2. Considerando os triângulos desenhados nas Figs 4 e 5 e as definições acima, podemos obter alguns valores úteis, apresentados na tabela abaixo.

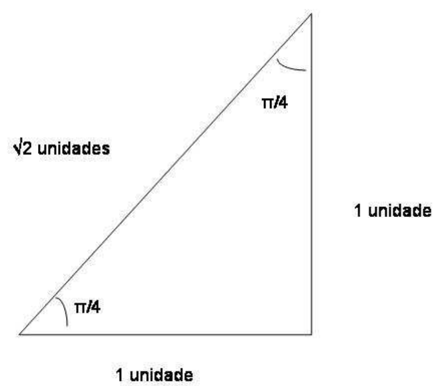


Figura 4.4:

Note que utilizamos a convenção de não escrever a unidade de radianos. Note também que a soma dos ângulos interiores de um triângulo é $\pi = 180^0$.

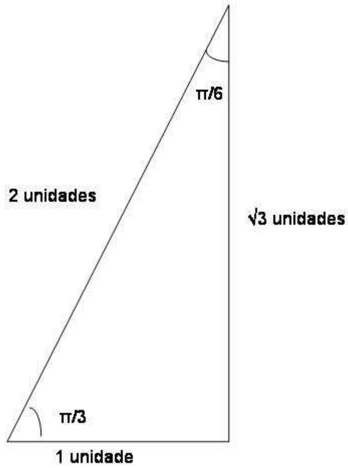


Figura 4.5:

θ(rad)	$\tan\theta$	$\sin\theta$ $\sin\theta$	
0	0	0	$1(x = r)$
$\frac{\pi}{6} = 30^o$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4} = 45^o$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{\pi}{3} = 60^o$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

3. Na calculadora, para obter os valores da tangente, do seno e do cosseno de um ângulo pode-se fornecer o ângulo em radianos ou em graus. È preciso escolher a opção correta, oferecida na calculadora. Para ângulos *pequenos*, podem ser úteis as seguintes aproximações, válidas apenas para ângulos *medidos em radianos*:

$$\tan\theta \approx \theta \tag{4.10}$$

$$\sin\theta \approx \theta \tag{4.11}$$

Na tabela abaixo você pode verificar para que valores de as aproximações são boas:

θ(rad)	$\tan\theta$	$\sin\theta$
0.05	0.0500	0.0500)
0.10	0.1003	0.0998
0.15	0.1511	0.1494
0.30	0.3093	0.2955
0.60	0.6841	0.5646

Se o que se deseja é a precisão de 1 parte em 100, por exemplo, para valores da tangente, então a aproximação $\tan\theta \approx \theta$ é boa para $\theta < 0.30$ radianos $\approx 17^0$.

Podemos ver a justificativa para a validade das duas aproximações para ângulos pequenos, $\tan\theta \approx \theta$ e $\sin\theta \approx \theta$, se considerarmos o triângulo abaixo, no qual θ é menor que 0.2 rad. Para ângulos assim pequenos, o comprimento do arco AC, s, é aproximadamente igual à CB, y (Fig. 6).

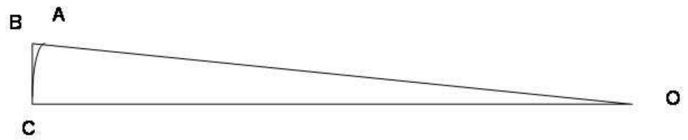


Figura 4.6:

4. As definições de tan, sen e cosseno podem ser estendidas para ângulos que não são agudos. Se $P(x, y)$ é qualquer ponto no plano e θ é o ângulo medido a partir do eixo positivo x para OP, então

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \tag{4.12}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \tag{4.13}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \tag{4.14}$$

A Fig. 7 mostra θ agudo, ao passo que na Fig. 8, θ está entre π e $\frac{3\pi}{2}$.

Exemplo Escreva os valores de tan, sin e cos para os pontos $P_2(-5, 12)$, $P_3(-4, -3)$ e $P_4(4, -4)$ da Fig. 9.

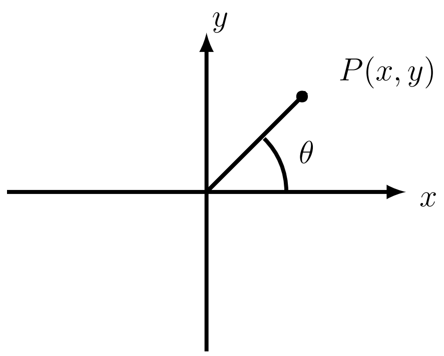


Figura 4.7:

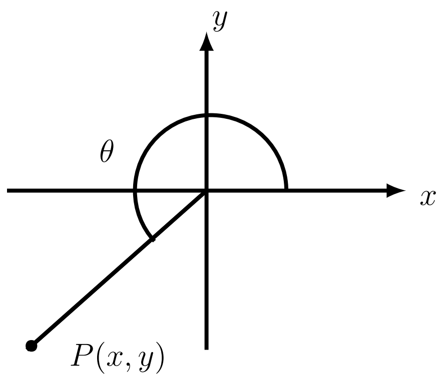


Figura 4.8:

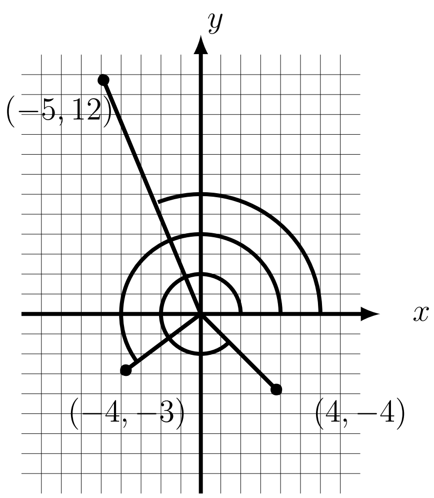


Figura 4.9:

Ponto	tan	sin	cos
$(-5, 12)$	$\frac{12}{-5} = -2.4$	$\frac{12}{13}$	$\frac{-5}{13}$
$(-4, -3)$	$\frac{-3}{-4} = 0.75$	$\frac{-3}{5} = -0.6$	$\frac{-4}{5} = -0.8$
$(4, -4)$	$\frac{-4}{5} = -1$	$\frac{-4}{\sqrt{32}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{4}{\sqrt{32}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

5. Note que a definição de tangente envolve a divisão por x. Portanto, $\tan\theta$ não é definida quando x é zero. Note que $x = 0$ corresponde a OP sobre o eixo y, portanto os valores de θ para os quais $\tan\theta$ não é definida são $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{2}$, ...

6. Ângulos negativos são definidos "girando-se" no sentido do relógio , a partir do eixo x. A Fig. 10 mostra um ângulo negativo de $\frac{-3\pi}{4}$. Os valores negativos de θ para os quais $\tan\theta$ não é definida são $\frac{-\pi}{2}$, $\frac{-3\pi}{2}$, $\frac{-5\pi}{2}$, $\frac{-7\pi}{2}$, ...

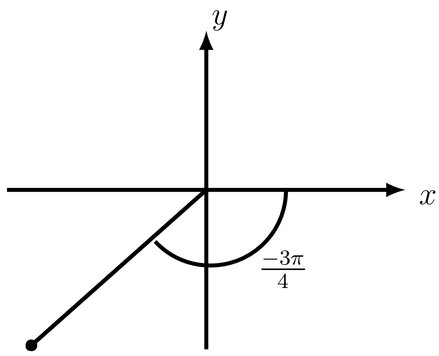


Figura 4.10:

7. As figuras abaixo (11, 12 e 13) mostram os gráficos de $\tan\theta$, $\sin\theta$ e $\cos\theta$. Note que as curvas se repetem: por isso chamamos estas funções de periódicas. O gráfico de $\tan\theta$ se repete após um intervalo de π radianos, sobre o eixo x. Por isso dizemos que $\tan\theta$ tem período π. O período de $\sin\theta$ é 2π e o de $\cos\theta$ é, também, 2π.

   Note que $\sin\theta$ e $\cos\theta$ nunca atingem valores maiores do que 1 (pois x e y nunca são maiores do que r). Note também que no gráfico de $\tan\theta$, para os valores de θ nos quais $\tan\theta$ não é definida, desenhamos linhas pontilhadas verticais: o gráfico de $\tan\theta$ nunca cruza estas linhas, mas se aproxima delas o quanto quisermos. De certa maneira, essas linhas verticais servem como fronteiras entre as figuras repetidas. Elas (as linhas verticais) são chamadas de assíntotas.

   A partir dos gráficos é fácil perceber quais são os sinais da tangente, do seno e do cosseno nos intervalos de 0 a $\frac{\pi}{2}$, de $\frac{\pi}{2}$ a π, de π a $\frac{3\pi}{2}$, e de $\frac{3\pi}{2}$ a 2π.

8. *Exercícios*

   (a) Quandos as aproximações

$$\tan\theta \approx \tan \tag{4.15}$$

$$\sin\theta \approx \tan \tag{4.16}$$

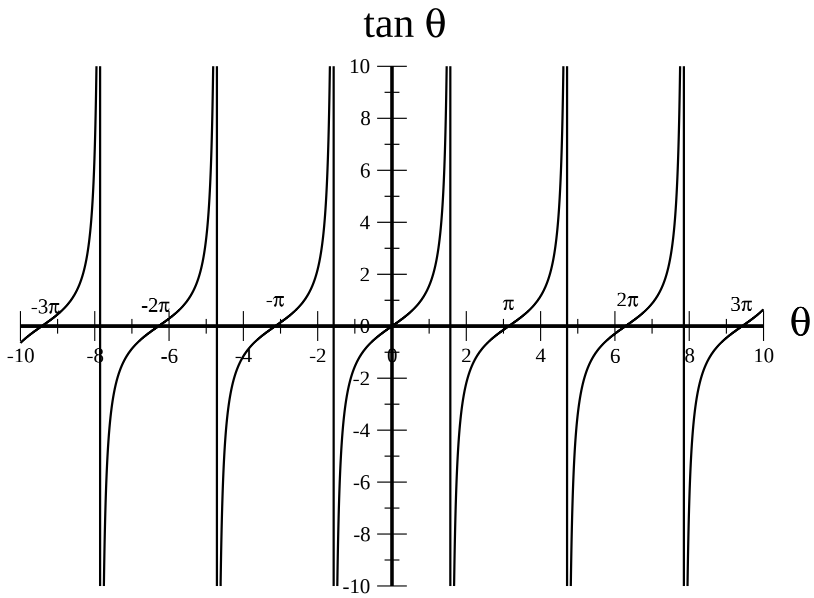


Figura 4.11: Tangente

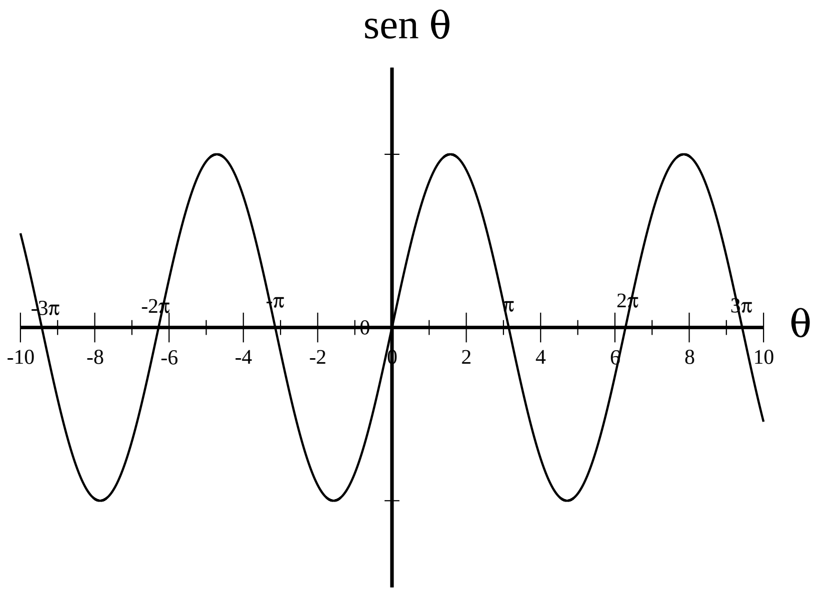


Figura 4.12: Seno

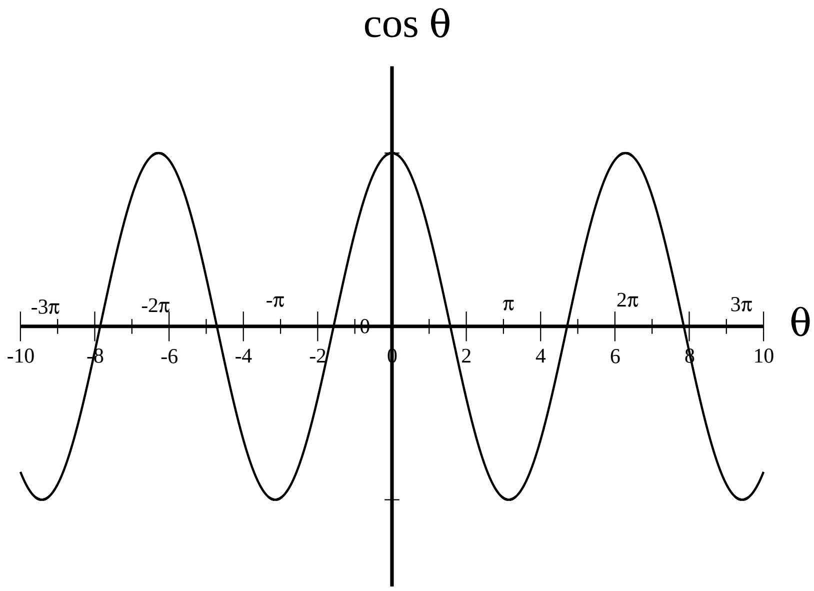
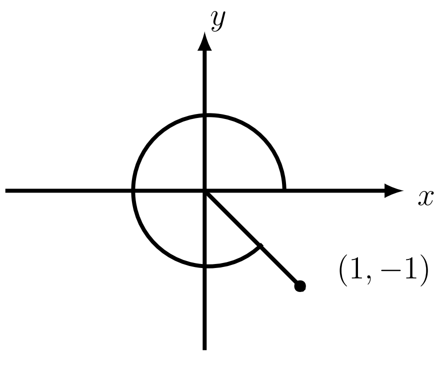


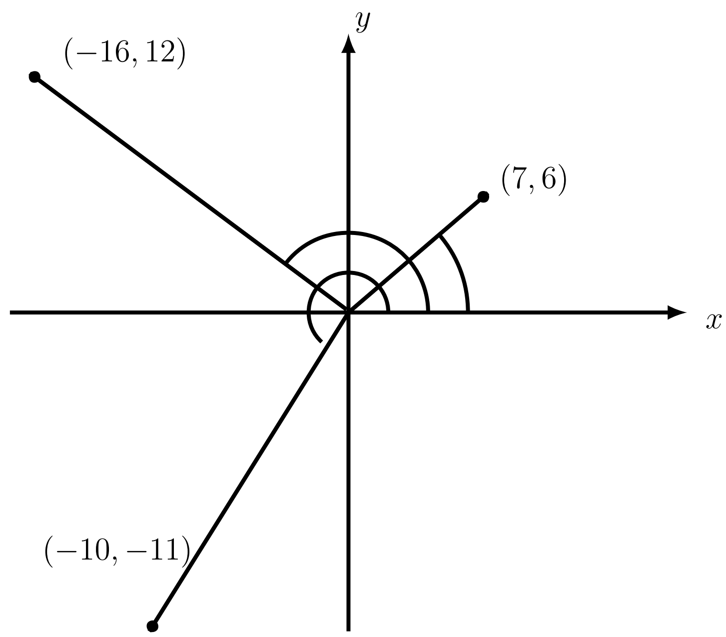
Figura 4.13: Cosseno

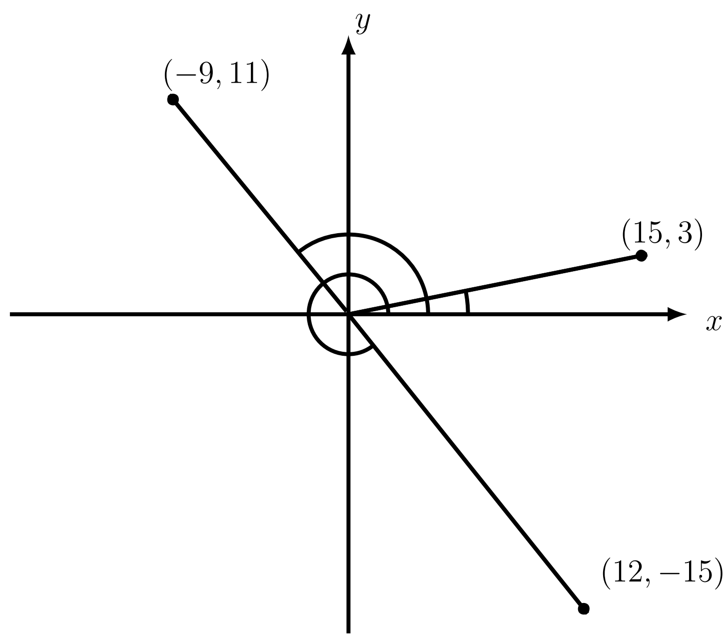
são válidas?

(b) Escreva os valores do seno, cosseno e da tangente para o angulo apresentado abaixo.



(c) Calcule os valores de seno, cosseno e da tangente para os angulos das duas figuras abaixo.





4.2 Identidades

Introdução

Nesta seção as seguintes identidades serão discutidas:

$$tan\theta = \frac{sen\theta}{cos\theta}$$

$\cos^2\theta + sen^2\theta = 1$

sen $\theta = cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$

cos $\theta = sen(\frac{\pi}{2} - \theta)(4.17)$

1. Uma identidade é uma equação cuja solução tem todos valores para a variável para a qual ambos os lados da equação são definidos.
   Sendo $tan\theta = \frac{y}{x}$; $sen\theta = \frac{y}{r}$; e $cos\theta = \frac{x}{r}$, podemos deduzir que $tan\theta = \frac{sen\theta}{cos\theta}$ para qualquer valor de θ, exceto $\theta = +\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, +\frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}$, etc, para o qual ambos os lados não estão definidos. Essa equação é um exemplo de uma identidade.

2. O Teorema de Pitágoras afirma que em um triângulo retângulo a área do quadrado sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados sobre os outros dois lados (Fig. 4.14).

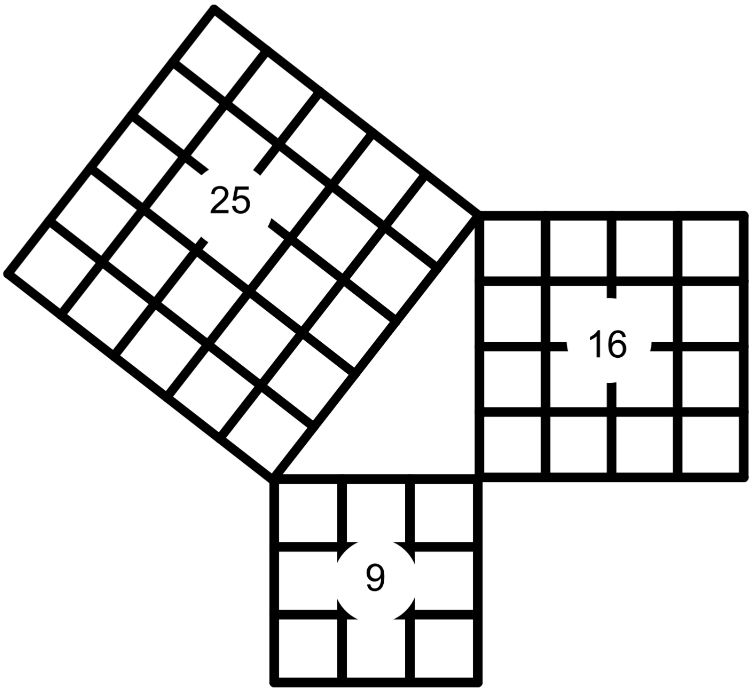


Figura 4.14:

   Algebricamente, da Fig. 4.15

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{4.18}$$

3. Dividindo ambos os lados da equação acima por r^2
   $\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2}$
   isto é,

$$cos^2\theta + sen^2\theta = 1 \tag{4.19}$$

   A equação acima é um identidade para ângulos agudos. Embora tenhamos começado com o Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo OPQ, a equação acima é

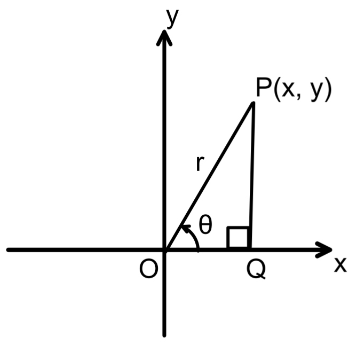


Figura 4.15:

identidade para todos os ângulos. Por exemplo, da Fig. 4.16, para $330\,°$
$cos330\,° = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$sen330\,° = \frac{y}{r} = \frac{-1}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}} = -\frac{1}{2}$
então, $cos^2 330\,° + sen^2 330\,° = (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (-\frac{1}{2})^2 = 1$

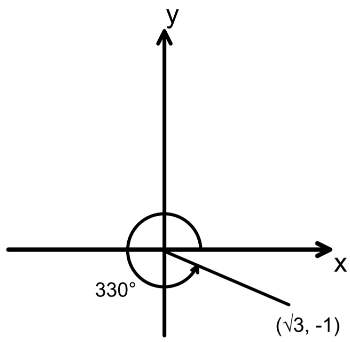


Figura 4.16:

4. Se $\alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$, α e β podem ser chamados de ângulos complementares. No triângulo OQP (4.15, $\angle QPO = \frac{\pi}{2} - \theta$. Em termos de cateto oposto, cateto adjascente e hipotenusa temos
$sen\theta = \frac{PQ}{OP}$
$cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \frac{PQ}{OP}$
$cos\theta = \frac{QO}{OP}$
$sen(\frac{\pi}{2} - \theta) = \frac{QO}{OP}$
Portanto,
$$sen\theta = cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$$

e

cos $\theta = (\frac{\pi}{2} - \theta)(4.20)$

As equações acima são identidades para qualquer ângulo. Por exemplo, da Fig. 5
$sen30\,^\circ = \frac{1}{2}$ e $cos60\,^\circ = sen(90\,^\circ - 60\,^\circ) = \frac{1}{2}$
Similarmente $cos30\,^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $sen60\,^\circ = cos(90\,^\circ - 60\,^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

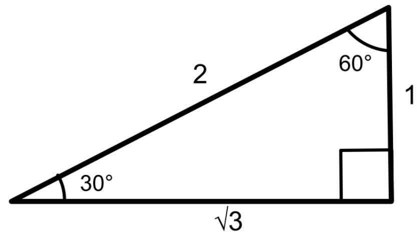


Figura 4.17:

Exemplo

(a) Se $sen\theta = \frac{5}{13}$ e θ é agudo, qual é o valor de $cos\theta$?
Como $cos^2\theta + sen^2\theta = 1$, temos que $cos\theta = \sqrt{1 - sen^2\theta}$ tendo que θ é agudo.
Então $cos\theta = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$

(b) Sabendo que $cos74\,^\circ = 0,2756$, qual é o valor de $sen16\,^\circ$?
Como $16\,^\circ + 74\,^\circ = 90\,^\circ$
$cos(90\,^\circ - \theta) = sen\theta$
$cos74\,^\circ = sen16\,^\circ = 0,2756.$

4.3 Quantidades vetoriais

Introdução

Nesta seção definiremos uma quantidade vetorial em termos de segmentos de linha direcionados e veremos como realizar soma dessas quantidades vetoriais. Vetores são expressos em termos de suas componentes cartesianas e deduzimos que $cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$, onde α, β e γ são as direções do vetor.

1. Podemos dizer que a velocidade com que um automóvel viaja é igual a 60 km/h, mas essa informação não é muito útil, pois não nos dirá onde o carro estará daqui a cinco minutos: precisamos também especificar a direção. A combinação da "rapidez"e

da direção é o vetor velocidade. O número que indica a "rapidez"do movimento denominamos módulo da velocidade.

Outra grandeza física que tem módulo e direção é a força: forças de mesma magnitude são diferentes se estiverem empurrando ou puxando o corpo ao qual estão sendo aplicadas.

2. Quantidades físicas como força e velocidade podem ser representadas por segmentos de linhas retas: o comprimento da mesma representa a magnitude da quantidade física e sua direção em relação a um eixo fixo representa a direção da quantidade física.

   Por exemplo, uma velocidade de 15 m/s na direção Nordeste pode ser representada por um segmento de reta como mostrado na Fig. 4.18.

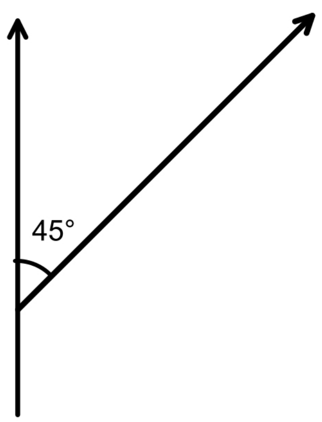


Figura 4.18:

   Para duas forças que atuam em um mesmo ponto de um corpo, a direção de uma das forças pode ser usada como um eixo.

   A Fig. 2 mostra uma força de 10 N e outra de 15 N formando um ângulo de 30° entre si, ambas agindo em direções de afastamento do corpo.

3. Segmentos de linhas orientados que estão no mesmo plano (usamos o plano da folha de papel!) podem ser "somadas"de acordo com a regra que podemos chamar de regra "da cabeça na cauda".

   Para adicionar um segmento de comprimento b denominado por **b** a um segmento de comprimento a denominado por **a**, fazemos uma transposição dos mesmos juntando

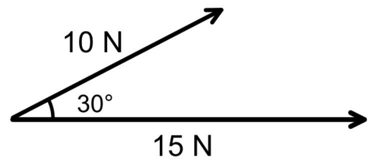


Figura 4.19:

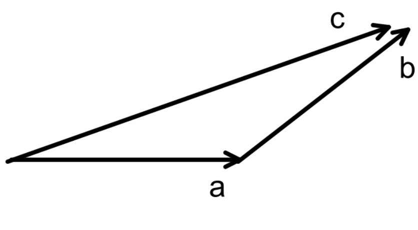


Figura 4.20:

a cabeça de um à cauda do outro, de modo que seus tamanhos e oritações se mantenham iguais: isto é mostrado na Fig. 4.20. O segmento que representa a soma de $\mathbf{b}$ e $\mathbf{a}$ é o que liga a cauda à cabeça. Se denominarmos esse segmento por $\mathbf{c}$, temos que $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$, onde $+$ denota adição de segmentos.
Como vimos na regra de adição acima, qualquer dois segmentos de um mesmo comprimento e mesma direção são tidos como equivalentes.

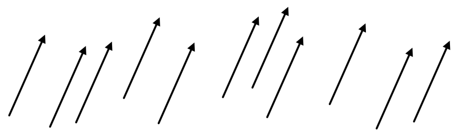


Figura 4.21:

4. As Figs. 4.22 e 4.23 mostra que $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

5. Pode ser experimentalmente mostrado que a resultante representada por $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ atuando em um ponto (isto é, uma força que tenha o memso efeito que as duas) é representada por $\mathbf{a} + \mathbf{b}$.
   Definimos uma quantidade vetorial como uma quantidade física que é especificada por uma intensidade e uma direção e que pode ser adicionada pela regra anterior.

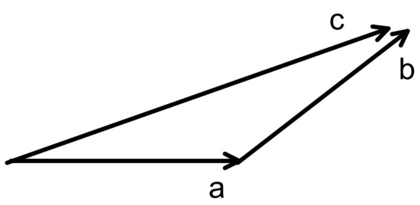


Figura 4.22:

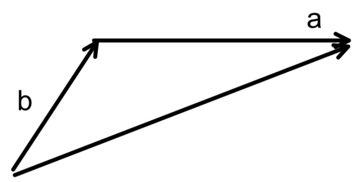


Figura 4.23:

6. Qualquer número de quantidades vetoriais pode ser adicionada por esse método. A Fig. 4.24 mostra que a extensão da regra anterior para 3 quantidades vetoriais; a soma intermediária $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ é mostrada por uma linha tracejada. (Note que agora denominaremos vetores os segmentos $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, etc.)

   Seguindo uma prática normal, representamos os vetores em negrito. Como não é possível escrevermos em negrito em cadernos, sugerimos que os vetores sejam representados como $\vec{a}$.

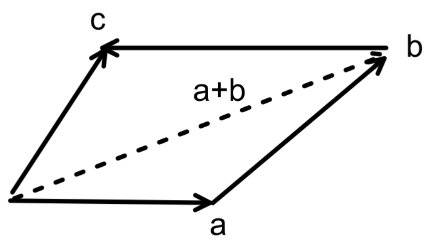


Figura 4.24:

7. **As componentes de um vetor**

   Na Fig. 4.25, os eixos cartesianos são colocados na cauda da quantidade vetorial $\vec{a}$.

   Se a é o comprimento de $\vec{a}$ e θ é o ângulo de inclinação de $\vec{a}$ em relação à parte positiva do eixo x (Fig. 4.26),
   OP tem comprimento $acos\theta$
   OQ tem comprimento $acos(90\,^{\circ} - \theta) = asen\theta$.
   $acos\theta$ é a projeção de $\vec{a}$ no eixo x; $asen\theta$ é a projeção de $\vec{a}$ no eixo y.

   Se $\mathbf{a_x}$ é uma quantidade vetorial de intensidade OP e direção ao longo da parte positiva do eixo x e $\mathbf{a_y}$ é uma quantidade vetorial de intensidade OQ e direção ao longo da parte positia do eixo y.

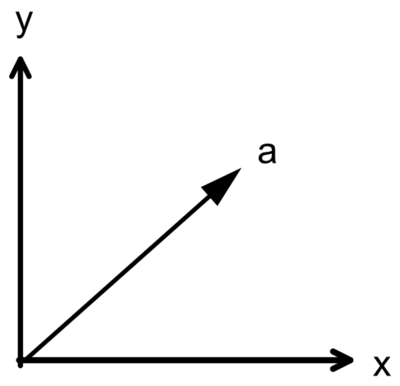


Figura 4.25:

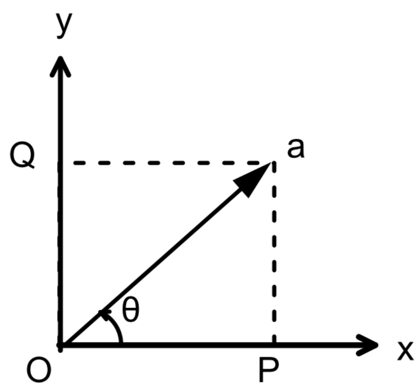


Figura 4.26:

(Fig. 4.27) Então

$\mathbf{a} = \mathbf{a_x} + \mathbf{a_y}$

$\mathbf{a_x}$ e $\mathbf{a_y}$ são chamadas de componentes vetoriais de **a** nas direções x e y.

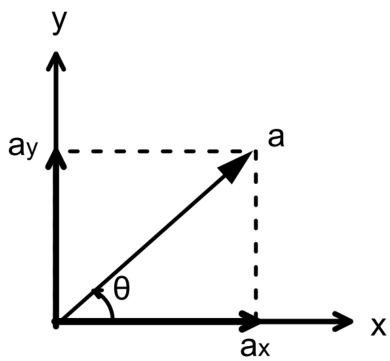


Figura 4.27:

A equação $\mathbf{a} = \mathbf{a_x} + \mathbf{a_y}$ é algumas vezes abreviada por $\mathbf{a} = [a_x,\ a_y]$

Então, por exemplo, o vetor $\vec{a}$ na Fig. 4.28 pode ser especificado por $\mathbf{a} = [4{,}3]$. Note que $\mathbf{b} = [3{,}4]$

[4,3] são as componentes de $\vec{a}$. Os colchetes são usadas para distinguir um vetor de um ponto no texto. Note que, pelo Teorema de Pitágoras $a^2 = a_x^2 + a_y^2$ e que se $\vec{a}$ é tal que $a = 1$ (Fig. 4.29)

$1^2 = a_x^2 + a_y^2$ ou $1 = cos^2\alpha + sen^2\alpha$, isto é, $1 = cos^2\alpha + cos^2\beta$

8. **Quantidades vetoriais em três dimensões**

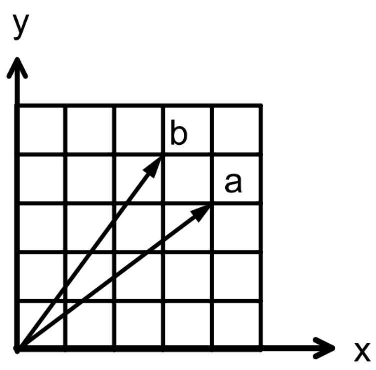


Figura 4.28:

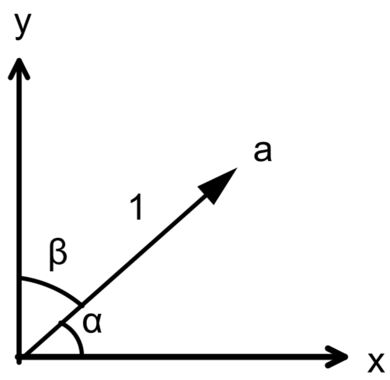


Figura 4.29:

A representação de quantidades vetoriais por segmentos de linhas se extendidas para três dimensões naturalmente.

$\vec{a} = [a_x, a_y, a_z]$ (Fig. 4.30) e da Fig. 4.31
$a_x = acos\alpha$
$a_y = acos\beta$
$a_z = acos\gamma$

onde,
α é ângulo entre $\vec{a}$ e O_x
β é o ângulo entre $\vec{a}$ e O_y
γ é o ângulo entre $\vec{a}$ e O_z

$\mathbf{a} = \mathbf{a_x} + \mathbf{a_y} + \mathbf{a_z}$

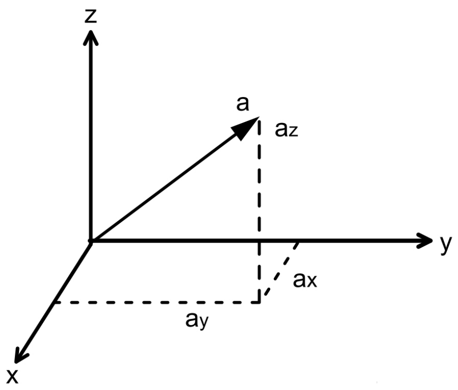


Figura 4.30:

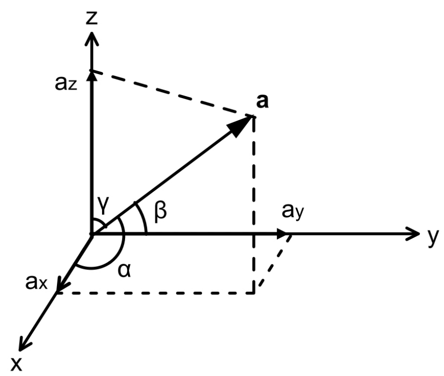


Figura 4.31:

$a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$ e se $a = 1$, $1^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$ ou $1 = cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma$

α, β e γ saão chamados de direções de **a**

Exemplo

Se conhecemos as componentes de $\vec{a}$, podemos calcular as direções do mesmo.

Se $\vec{a}$ = [4, -3, 7]

$cos\alpha = \frac{a_x}{a} = \frac{4}{\sqrt{4^2+(-3)^2+7^2}} = \frac{4}{\sqrt{74}} = \frac{2\sqrt{74}}{37}$

$cos\beta = \frac{a_y}{a} = \frac{-3}{\sqrt{74}} = \frac{-3\sqrt{74}}{74}$

$cos\gamma = \frac{a_z}{a} = \frac{7}{\sqrt{74}} = \frac{7\sqrt{74}}{74}$

Capítulo 5

Inclinação, Área e crescimento

5.1 A inclinação de uma curva

Introdução

Nesta seção, propomos uma definição para a inclinação de uma curva. Apresentamos alguns exemplos de gráficos de inclinações de algumas curvas muito simples.

1. Na seção 2 definimos a inclinação de uma linha reta. Estendemos aqui essas idéias e definimos a inclinação de uma curva em qualquer ponto da curva.

   Na Fig 5.1, $P(a, b)$ é um ponto fixo sobre uma curva. Queremos definir a inclinação da curva em P. $Q(x, y)$ é qualquer outro ponto da curva.

   Vamos supor que a curva não *volta* sobre si mesma, isto é, que $x \neq a$ para qualquer ponto Q diferente de P.

   A linha reta que liga P e Q é uma corda. Na figura, estendemos a corda alem de P e Q. A inclinação da linha reta PQ é

   $$\frac{y-b}{x-a} \quad . \tag{5.1}$$

   Agora imagine que Q rola para baixo, sobre a curva, na direção de P. Ou seja, x se aproxima de a e y se aproxima de b. A Fig. 5.2 mostra três posições da corda estendida Q_1P, Q_2P e Q_3P.

2. A linha reta que toca a curva em P é chamada de tangente à curva em P. Esta tangente tem uma inclinação, e denominaremos esta inclinação de m. Definimos a inclinação da curva em P como igual à inclinação da reta tangente à curva em P, isto é, m. A questão é: como podemos calcular m? É claro que podemos fazer um

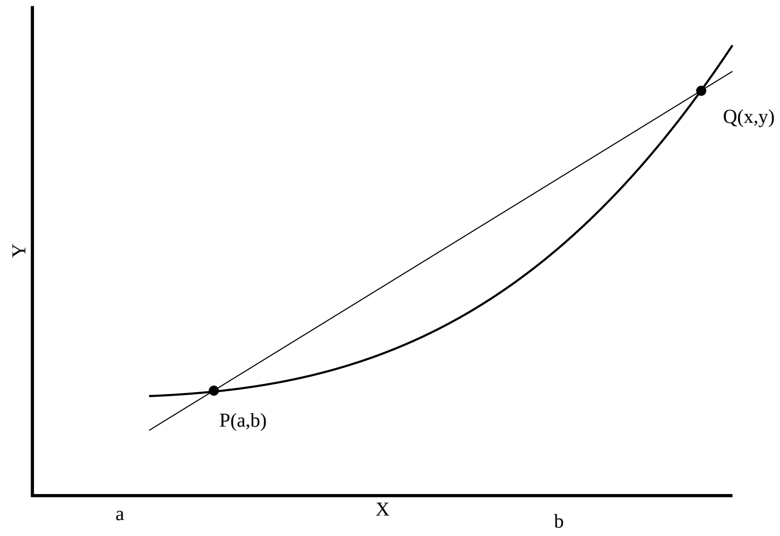


Figura 5.1:

cálculo aproximado, desenhando a curva da melhor maneira que conseguirmos, e, em seguida, desenhando a reta tangente da melhor forma possível.

3. Mas é possível desenvolver um procedimento algébrico para calcular m exatamente. Vamos mostrar este procedimento. Note que a tangente em P é o caso limite de uma corda estendida PQ, na medida em que Q tende a P (Fig.3). Podemos escrever isto através de símbolos da seguinte forma:

$$\lim_{Q \to P} (\text{corda}) = \text{tangente}. \tag{5.2}$$

Da mesma forma, para as inclinações podemos escrever,

$$\begin{aligned} \lim_{Q \to P} (\text{inclinação da corda}) &= \text{inclinação da tangente no ponto } P && (5.3) \\ &= \text{inclinação da curva no ponto} P && (5.4) \end{aligned}$$

Podemos utilizar apenas símbolos e escrever:

$$\lim_{x \to a} \frac{y-b}{x-a} = m \qquad \text{, inclinação da curva no ponto } P. \tag{5.5}$$

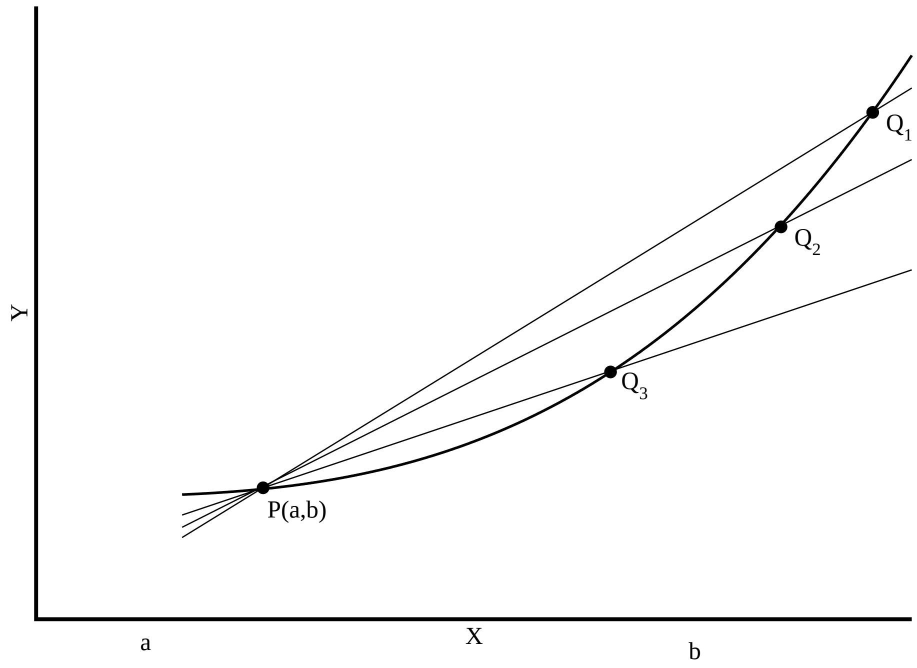


Figura 5.2:

4. Mas $(y-b)$ é uma variação das coordenadas y associada a uma variação nas coordenadas x de $(x-a)$. A diferença $(y-b)$ é representada por Δy (delta y) e a diferença $(x-a)$ representada por Δx (delta x). A notação que se usa para a inclinação de um gráfico de uma equação em x e y é $\frac{dx}{dy}$. Desta forma, a equação (1) pode ser escrita na forma
$$\lim_{\Delta x \to i0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} \tag{5.6}$$
O processo de cálculo do limite de determinadas equações é chamado de diferenciação.

5. As Figs. 5.1, 5.2 e 5.3 mostram curvas com tangentes de inclinação positiva, mas podem haver curvas com inclinações negativas.

6. Para a equação
$$y = x^2 + 2x - 1 \tag{5.7}$$
podemos calcular a inclinação m para qualquer valor de x. Assim, para cada ponto (x, y) da curva há um par de números correspondente, (x, m), que representam a coordenada x e a inclinação m da curva no ponto (x, y). O conjunto de pontos (x, m) pode ser colocado em um gráfico e desenhar uma curva que representa a inclinação da função $y(x)$.

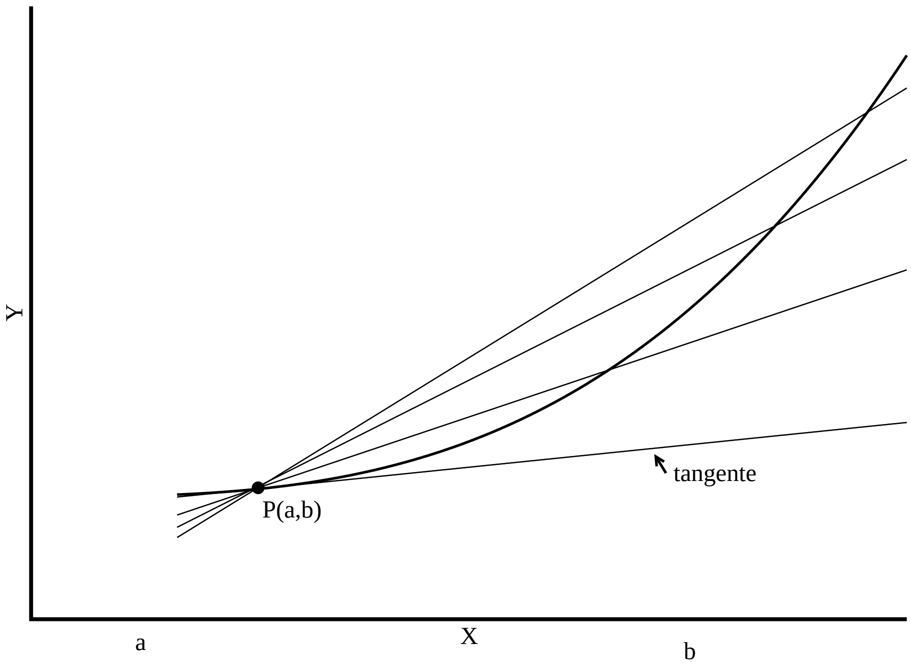


Figura 5.3:

7. *Exemplos*

Vamos examinar alguns gráficos simples de linhas retas e desenhar os gráficos de suas inclinações em função de x.

(a) $y = -\frac{2}{3}x + 2$ (Fig. 5.4) tem inclinação $-\frac{2}{3}$. A inclinação é representada pela linha reta $y = -\frac{2}{3}$ na Fig. 5.5.

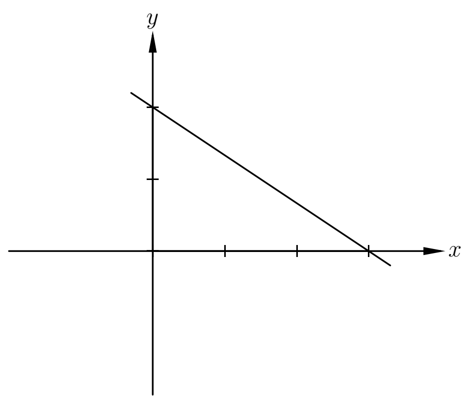


Figura 5.4:

(b) O gráfico de $y = x$ tem inclinação 1 e $y = -x + 2$ tem inclinação -1 (Fig. 5.6). As inclinações correspondentes são descritas pelas funções $y = 1$, para x entre 0 e 1, e $y = -1$, para x entre 1 e 2 (gráfico da Fig. 5.7).

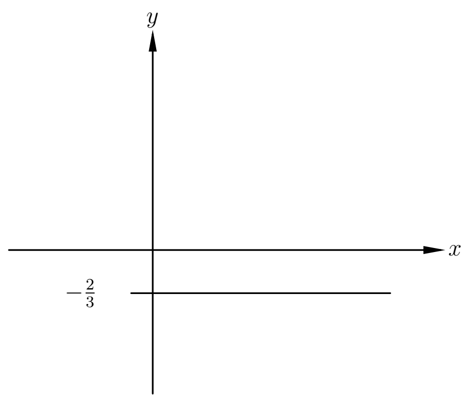


Figura 5.5:

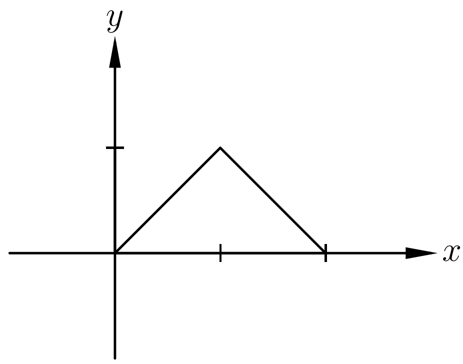


Figura 5.6:

Exercício

Desenhe os gráficos das inclinações das seguintes funções:

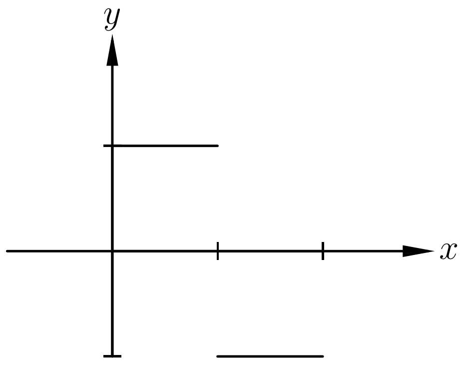


Figura 5.7:

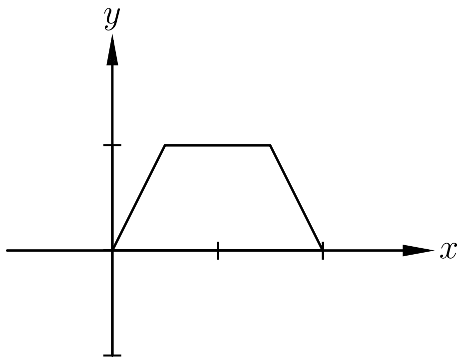


Figura 5.8:

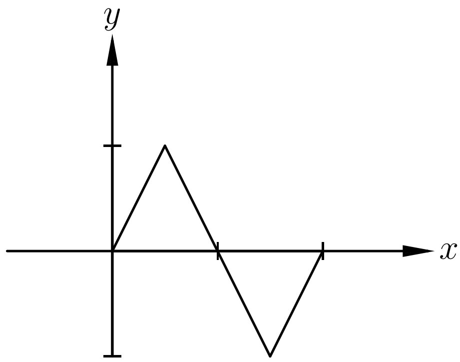


Figura 5.9:

5.2 Área sob a curva

Introdução

Nesta seção veremos uma forma de calcular aproximadamente a área entre uma curva e o eixo x, através da soma de retângulos. Também calcularemos as áreas entre algumas linhas retas e o eixo x e, portanto, estabeleceremos uma relação entre *inclinação* e *área*.

1. Sabemos como calcular a área delimitada por triângulos e quadriláteros. Como podemos calcular a área entre uma curva e o eixo x? Vamos propor uma forma de calcular a área entre a curva da Fig 5.10 e o eixo x. Vamos nos restringir a curvas em que y cresce quando x cresce.

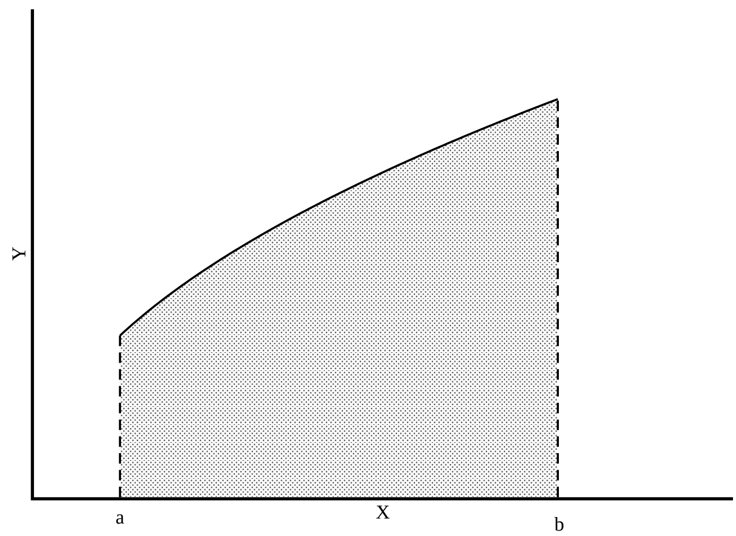


Figura 5.10:

A Fig 5.11 mostra a mesma curva desenhada duas vezes. Nos dois casos, o intervalo entre a e b está dividido em cinco partes. No caso da Fig 5.11-esquerda, a soma das áreas dos cinco retângulos, L_1, é **menor** que A, a área entre a curva e o eixo x. Por outro lado, na Fig. 5.11-direita, a soma das áreas dos cinco retângulos, U_1, é **maior** que A, a área entre a curva e o eixo x.

2. Imagine agora que o intervalo entre a e b seja dividido em dez retângulos, o dobro, em relação à Fig 5.11 (Fig. 5.12).

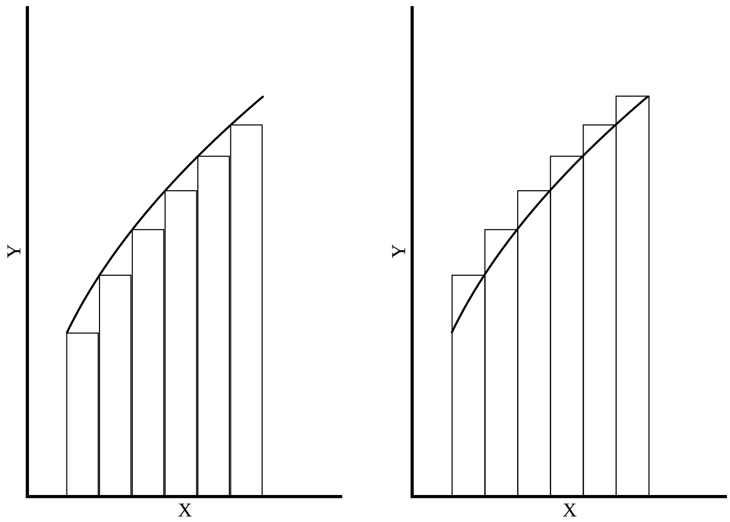


Figura 5.11:

Novamente, a soma das áreas dos dez retângulos, L_2, é **menor** que A, mas a aproximação parece ter melhorado (L_2 está mais próxima de A do que L_1). Da mesma forma, a soma das áreas dos dez retângulos, U_2, é **maior** que A, mas a aproximação parece melhor (U_2 está mais próxima de A do que U_1).

Imagine agora que vamos dividindo o intervalo entre a e b em intervalos cada vez menores. Para cada número de divisões escolhido, ganhamos duas aproximações para A, uma com retângulos maiores, outra com retângulos menores, como nas Figs 5.11 ou 5.12.

Podemos formar uma seqüência, L_1, L_2, L_3, L_4,..., L_n para a soma das áreas de retângulos, como as representadas nas Figs 5.11 e 5.12 à esquerda, com 5, 10, 15, 20, ..., $5n$ divisões. Todas essas áreas serão **menores** que A.

Também podemos formar uma seqüência, U_1, U_2, U_3, U_4,..., u_n , para a soma das áreas de retângulos, como as representadas nas Figs 5.11 e 5.12 à direita, com 5, 10, 15, 20, ..., $5n$ divisões. Todas essas áreas serão **maiores** que A.

Em geral, quanto mais subdivisões utilizarmos, isto é, quanto maior n, mais L_n e U_n se aproximam de A. Para uma curva qualquer, a seqüência de áreas menores, L_n, poderia ser 9,81; 9,9; 9,94; 9,97; 9,98; 9,99 e a seqüência de áreas maiores, U_n, poderia ser, 10,21; 10,13; 10,09; 10,07; 10,03; 10,02.

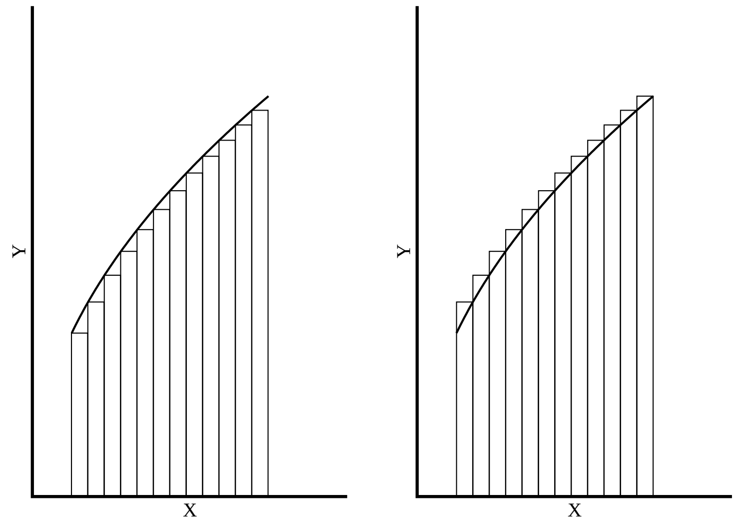


Figura 5.12:

Saberíamos então que a área A, entre a curva e o eixo x, terá algum valor entre 9,99 e 10,02.

3. Para uma curva qualquer, podemos calcular A exatamente. O processo de integração corresponde ao processo de subdivisões do intervalo entre a e b um número infinito de vezes, o que nos levará ao cálculo exato de A.

4. A seguir, vamos calcular as áreas entre duas linhas retas e o eixo x, para mostrar a relação que existe entre a integração (cálculo de áreas) e a diferenciação (cálculo de inclinações).

5. *Exemplos*

   (a) função $y = 2x$ e sua inclinação $y = 2$; área sob a curva $y = 2$

   Podemos verificar na Fig. 5.13 que a área entre $y = 2$ e o intervalo de 1 a 3 sobre o eixo é 4 unidades (contando os quadradinhos).

   Podemos verificar na Fig. 5.14, que a função que descreve a reta é $y = 2x$, que tem por inclinação $y = 2$ (Fig.5.13). Além disso, temos que a diferença entre os valores da função da Fig. 5.13, para $x = 3$ e $x = 1$, é $2 \times 3 - 2 \times 1 = 4$.

   Função original $FO(x)$ $\rightarrow$ Função inclinação $FI(x)$ $\rightarrow$ área entre a função inclinação $FI(x)$ e o eixo x no intervalo $a - b$ =função original $FO(x =$

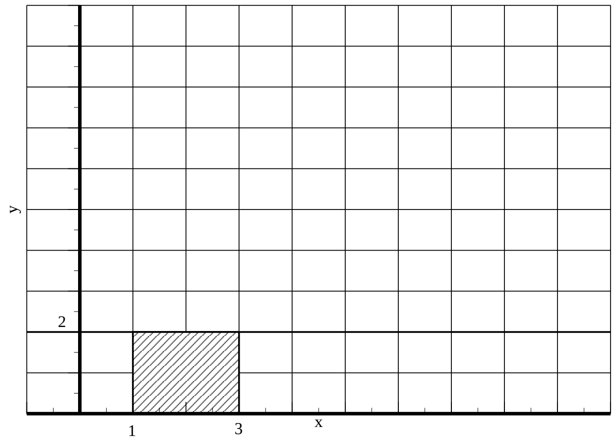


Figura 5.13:

$b) - FO(x = a)$.

(b) função $y = x^2$ e sua inclinação $y = 2x$; área sob a curva $y = 2x$.

Podemos verificar na Fig. 5.14 que a área entre $y = 2x$ e o intervalo de 1 a 3 sobre o eixo é 8 unidades (contando os quadradinhos e meios retângulos formados de 2 quadradinhos).

Podemos verificar na Fig. 5.15, que a função que descreve a curva parabólica é $y = x^2$, Além disso, temos que a diferença entre os valores da função da Fig. 5.15, para $x = 3$ e $x = 1$, é $3^2 - 1^2 = 8$.

Comparando o caso (a) com o caso (b) ficamos tentados a concluir que a função y=x^2 (Fig.6) tem por inclinação y=2x (Fig.5).

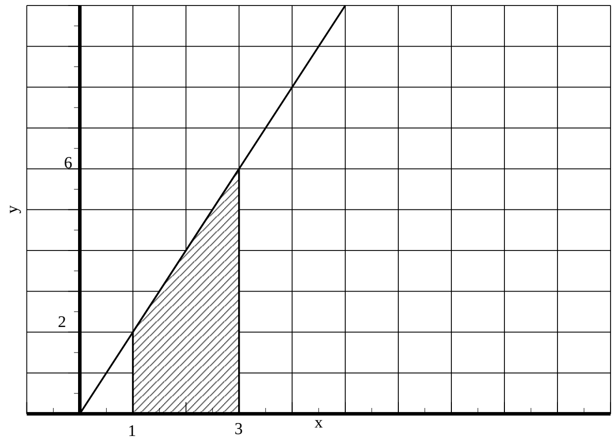


Figura 5.14:

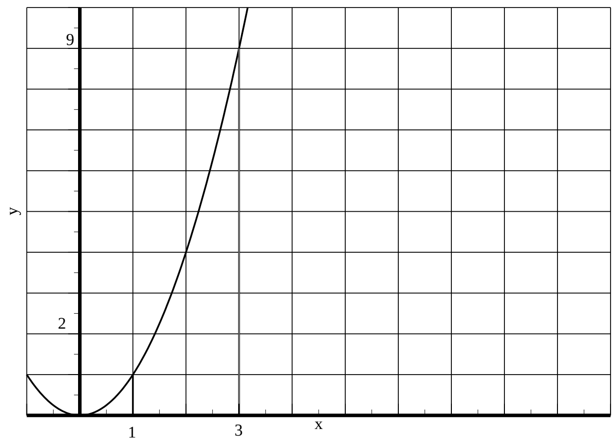


Figura 5.15:

5.3 Crescimento e decaimento exponencial

Introdução

Nesta seção, investigaremos as equações que representam crescimento e decaimento, respectivamente

$$y = e^{kt} \tag{5.8}$$

e

$$y = e^{-kt}. \tag{5.9}$$

Definimos logaritmos $\ln y$ e *meia-vida*.

1. Se a relação entre uma quantidade y e o tempo t pode ser representada por uma equação que envolve y e t, então a **taxa de crescimento de** y em **um ponto** t do

ɔ)

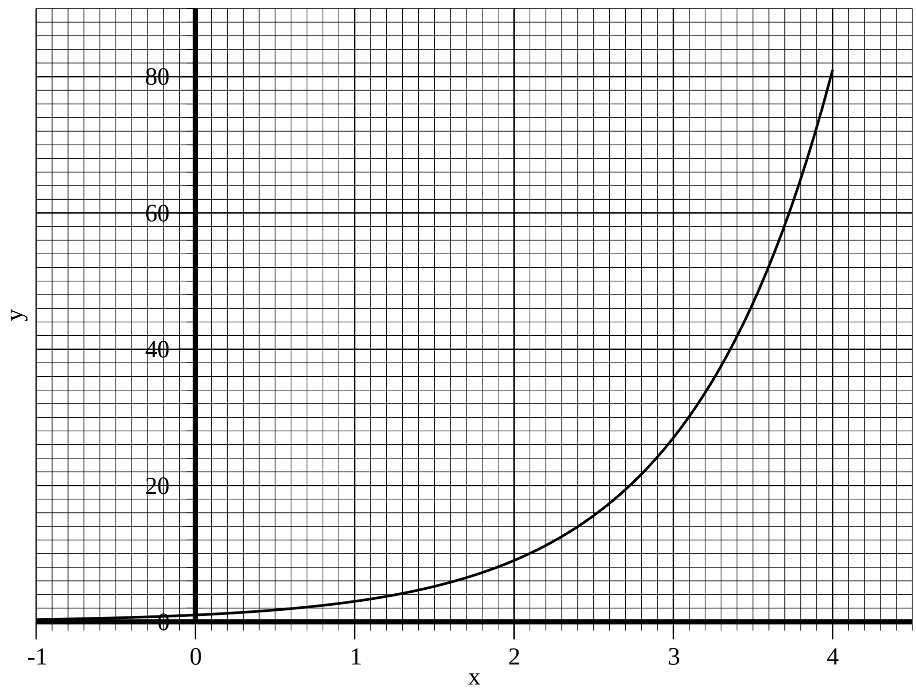


Figura 5.16:

As Figs 5.16 e 5.17 apresentam os gráficos das equações $y = (2.5)^t$ e $y = (3)^t$, respectivamente. Note que as escalas para y e t são diferentes, pois y cresce muito mais rápido que t.

Na Fig. 5.16 $y = e^{kt}$ estimamos a inclinação de y (ou taxa de crescimento de y) em dois pontos: $y = 6$ e $y = 38$. Nos dois pontos a inclinação é **menor** que y. Na verdade, em qualquer ponto a inclinação de y será sempre **menor** que y.

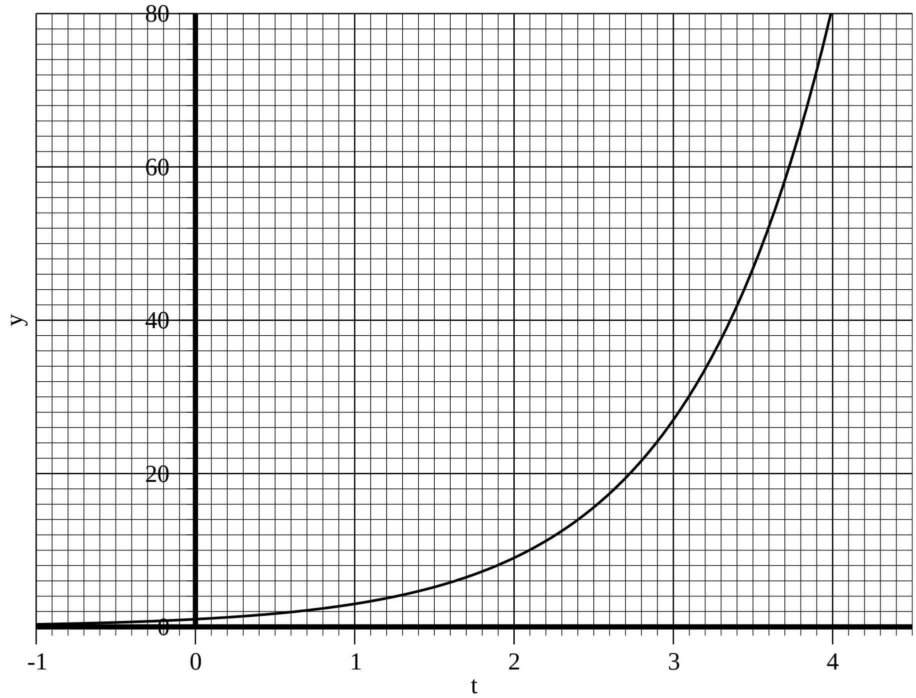


Figura 5.17:

Na Fig. 5.16 $y = e^{-kt}$ estimamos a inclinação de y (ou taxa de crescimento de y) em dois pontos: $y = 14$ e $y = 60$. Na verdade, em qualquer ponto a inclinação de y será sempre **maior** que y.

Comparando os dois casos, podemos suspeitar que exista um número entre $2,5$ e 3 para o qual a taxa de crescimento de y, ou sua inclinação, seja igual a y. Em outras palavras, queremos um número e, tal que $2.5 < e < 3$, de maneira que a inclinação de $y = e^t$ seja igual a y.