



## Sumário

### 1. Fatoração 2

Como resolver equações de graus maiores que 2 de modo mais simples? 2

Vários casos de fatoração 3

Exercícios 4

Desafios 5

### 2. Módulo de um Número Real 7

Função Módulo 10

Exercícios 10

### 3. Gráficos 13

Gráfico de Barras 13

Gráfico de Linhas 14

Caso Especial 19

Exercícios 20

### 4. Equação da Reta 25

Equação Geral da Reta 25

Equação Reduzida da Reta 27

Coefficiente Linear e Coeficiente Angular da Reta 30

Casos Especiais 34

Equação Fundamental da Reta 37

Inclinação da Reta e Fatores de Escala 37

Exercícios 39



# 1. Fatoração

## Como resolver equações de graus maiores que 2 de modo mais simples?

Decompor um número  $N$  em **fatores** é achar o conjunto de números que, multiplicados entre si, dão  $N$ . O processo de encontrar esse conjunto de números é o que chamamos de Fatoração e os elementos desse conjunto são os **fatores**. Se esses **fatores** não forem primos, poderão ser decompostos por sua vez, permitindo a construção de um jogo de cálculo mental.

Partindo dessas noções e desses procedimentos, podemos tentar fatorar o número 1.000, perguntando: Quais entre dois números multiplicados dão resultado igual a 1.000? Temos várias respostas, sendo uma delas  $100 \times 10$ .

Além de descobrirmos que o número 1.000 não é primo, podemos construir uma nova pergunta para os dois números que compõe a multiplicação do 1.000, que no caso são o 10 e o 100. Quais as multiplicações que dão como resultado o 100 e o 10? Para o 100, podemos responder que é  $10 \times 10$ . Para o 10, a resposta é  $2 \times 5$ . Esse jogo de cálculo mental permite escrever o número 1.000 em várias etapas, sendo a primeira  $1000 = 100 \times 10$ , a segunda como  $1.000 = (10 \times 10) \times (2 \times 5)$  e, continuando a brincadeira, finalizamos como  $1.000 = (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5)$ . O jogo termina quando todos os fatores forem primos. Neste exemplo, eles são somente o 2 e o 5. Escrever 1.000 sob a forma de  $2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5$  é escrevê-lo sob a forma fatorada.

A partir desse resultado, não custa recordarmos que toda multiplicação pode ser escrita, por sua vez, na forma de potência quando há repetição dos fatores. Assim, concluímos que o número 1.000 - ao ser fatorado em  $2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5$ , finalmente pode ser escrito como  $2^3 \times 5^3$ .

Mas você poderia ainda perguntar: não seria mais fácil escrever 1.000 na forma de  $10^3$ ? Sim, só que não será uma fatoração completa. O  $10^3$  é uma fatoração incompleta do número 1.000 porque a base não é um número primo.

Os casos comuns de fatoração e os **produtos notáveis** (fórmulas cuja fatoração é tão comum que precisamos identificá-los nas equações só de bater o olho) resultam da aplicação dos conceitos de fatoração numérica em polinômios. Essa técnica é indispensável na resolução de equações do segundo grau ou maior.



## Vários casos de fatoração

### 1) Fator Comum em evidência

Aplica-se quando os termos apresentam fatores comuns, como por exemplo, no polinômio:  $ax + ay$ . Ambos os termos apresentam o fator  $a$ , que pode ser posto em evidência:  $a(x + y)$ . As quantidades  $x$  e  $y$  podem ser expressões, por exemplo:

$$asenx + acosx = a(senx + cosx)$$

$$asenx + bsenx = (a + b)senx$$

### 2) Fatoração por agrupamento

Consiste em aplicar duas vezes o caso do fator comum em alguns polinômios especiais. Como por exemplo:

$$P = ax + ay + bx + by$$

Os dois primeiros termos possuem em comum o fator  $a$  os dois últimos termos, o fator  $b$ . Colocando esses termos em evidência:

$$P = a(x + y) + b(x + y) = (a + b)(x + y)$$

### 3) Fatoração por diferença de quadrados:

Consiste em transformar as expressões em produtos da soma pela diferença, simplesmente extraindo a raiz quadrada de cada quadrado. Assim:

$$x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$$

### 4) Fatoração do trinômio quadrado perfeito:

O trinômio que se obtém quando se eleva um binômio ao quadrado chama-se trinômio quadrado perfeito. Por exemplo, os trinômios  $(a^2 + 2ab + b^2)$  e  $(a^2 - 2ab + b^2)$  são quadrados perfeitos porque são obtidos quando se eleva  $(a+b)$  e  $(a-b)$  ao quadrado, respectivamente:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{e} \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

### 5) Equação do 2º grau:

Toda equação do 2º grau pode ser fatorada:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

em que  $x_1$  e  $x_2$  são as raízes, que podem ser calculadas pela fórmula de Báskara. Note o caso mais simples

$$x^2 + (w + z)x + wz = (x + w)(x + z)$$

### 6) Fatoração a partir dos Produtos Notáveis:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + a^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + a^2)$$



## Exercícios

1)  $x^2 + 8x + 15 =$

2)  $b^2 + 3b - 10 =$

Nos exercícios 3 a 5, considere  $(x + y)$  como um único número:

3)  $(x + y)^2 - 3(x + y) - 10 =$

4)  $(x + y)^2 - (x + y) - 12 =$

5)  $(x + 2)^2 - (x + 2) - 20 =$

Comece por fatorar a diferença de dois quadrados:  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

6)  $(x + y)^2 - 4 =$

7)  $4x^2(x - 2a) - 9a^2(x - 2a) =$

*Modelo:*

$$4xy^2(3y - x) - 2x^2(x - 3y)^2 = 2x(3y - x)[2y^2 - x(3y - x)]$$

8)  $6ba^2(2z - w) - 3b^2(w - 2z)^2 =$

9)  $x^2 - (2a + b)x + 2ab =$



**Modelo:**

$$x^2 + (3y + 5)x + (2y + 3)(y + 2) = \text{observe que } (2y + 3) + (y + 2) = (3y + 5) \\ [x + (2y + 3)][x + (y + 2)] = (x + 2y + 3)(x + y + 2)$$

$$10) x^2 + (2y + 5)x + (y + 6)(y - 1) =$$

$$\text{Use: } a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$11) 27x^3 - 64$$

$$12) 64x - x^4$$

**Modelo:**

$$x^4 - 6x^2 + 1 \text{ (decompondo o } 6x^2 \text{ em } 4x^2 - 2x^2)$$

$$x^4 - 2x^2 + 1 - 4x^2 =$$

$$(x^2 - 1)^2 - (2x)^2 = (x^2 - 1 + 2x)(x^2 - 1 - 2x)$$

$$13) x^4 - 11x^2 + 1 =$$

$$14) x^4 - 23x^2 + 1 =$$

**Desafios:**

$$15) 16x^4 - y^4 =$$

$$16) (x + y)^2 - (z + w)^2 =$$



17) Fatore a equação de modo a obter uma única função trigonométrica:

$$\text{sen}(x)^4 - \text{cos}(x)^4 =$$

18) Para pensar: qual a solução do sistema?  $\begin{cases} x - 3 = y \\ x^2 - 9 = y^2 \end{cases}$



## 2. Módulo de um Número Real ( $|x|$ ).

O conceito de módulo de um número real está associado à idéia de distância de um ponto de uma reta orientada à origem. Ou seja, independentemente do número ser positivo ou negativo, a sua distância em relação à origem será sempre representada por um número igual ou maior que zero.

Matematicamente, podemos expressar essa idéia da seguinte maneira:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

A figura 2.1, com uma reta orientada para a direita, ilustra a distância entre o ponto e a origem e serve para mostrar como a equação (2.1) funciona.



Figura 2.1

### Aplicando 1.1

$$\text{para } x = 6 \rightarrow |6| = 6$$

$$\text{para } x = -6 \rightarrow |-6| = -(-6) = 6$$



Assim, o módulo de 6 e de -6 são idênticos.

A raiz quadrada de um quadrado é um caso importante de aplicação do módulo. Definimos

$$\sqrt{x^2} = |x| \quad (2.2)$$

A fórmula (2.2) é uma definição mesmo. Por exemplo, note que a equação do 2º grau,

$$x^2 = 16$$

admite duas soluções,  $x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$ . Assim, é preciso ter uma convenção para o sinal que fica de fora da raiz na equação (2.2) e a escolha que todos fazem é deixar implícito que o sinal é +.

Assim, teremos

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

**Modelo:**

Se  $|x| < 7$ ,  $x \in \mathbf{R}$ , a qual intervalo  $x$  pertence?

Se há correspondência entre  $|7|$  e  $|-7|$ , aplicando (2.1) teremos

$$|7| = 7$$

$$|-7| = -(-7) = 7$$

Logo,  $x \in ]-7, 7[$

O módulo também pode ser aplicado a uma expressão do tipo  $|a - b|$ , com  $a$  e  $b$  números reais. Nesses casos, devemos substituir toda a expressão dentro do par de barras verticais por  $x$  e aplicar (2.1).

**Modelo:**

$$|a - b|$$





Chamemos  $|a - b|$  de  $x$ ,

$$|a - b| = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \rightarrow (a - b) \text{ se } (a - b) > 0 \rightarrow a - b \text{ se } a > b \\ -x, & x < 0 \rightarrow -(a - b) = b - a \text{ se } (a - b) < 0 \rightarrow b - a \text{ se } a < b \end{cases}$$

Dessa maneira, conseguimos as duas **possibilidades** para o valor de  $|a-b|$ :  $a-b$  **OU**  $b-a$ . Só uma pode ser verdadeira para cada par de valores  $a$  e  $b$ .

**Modelo:**

Encontre as duas soluções para  $|3 - x| = 6$ .

$$|3 - x| = \begin{cases} (3 - x) & \text{se } x < 3 \\ -(3 - x) & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

para  $x < 3$ :

$$3 - x = 6$$

$$x = -3$$

para  $x > 3$

$$-3 + x = 6$$

$$x = 9$$

Assim, a equação  $|3 - x| = 6$  tem duas soluções (-3 e 9), como pode ser verificado por substituição.

**Propriedades:**

a)  $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

b)  $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} = |a| \cdot |b|^{-1}$

c)  $|x| > \alpha$  se, e somente se,  $x > \alpha$  ou  $x < -\alpha$

d)  $|-a + b| \neq |-a| + |b|$



## Função Módulo

A função módulo é aquela que associa ao número  $x$  o módulo de  $x$ . O gráfico dessa função está na figura 2.2, junto com o gráfico da função  $y = x$ .

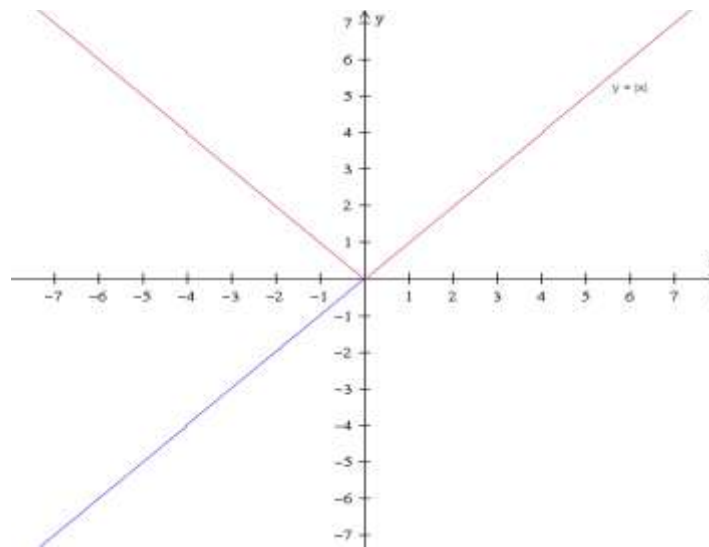


Figura 2.2

## Exercícios

Lembre que o módulo é definido por:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

1) Calcule os módulos abaixo, demonstrando cada passo:

a)  $|-4|$  ;       $|7|$  ;       $|-18|$  ;       $|a|$

b)  $|2 \cdot (-5)|$ ;     $|(-3) \cdot 4|$ ;     $|(-2) \cdot (-6)|$ ;     $|a \cdot b|$



c)  $\left| \frac{-3}{4} \right|$ ;  $\left| \frac{100}{-5} \right|$ ;  $\left| (-3) \cdot (6)^{-1} \right|$ ;  $\left| \frac{a}{b} \right|$

2) Calcule os possíveis valores de  $y$  se ele é  $y = \frac{|x-1|}{x-1}$ , com  $x \neq 1$ ;

3) Determine as duas soluções de cada uma das equações abaixo.

a)  $|5 - 3x| = 4$ ;  $|12 + 2x| = 4$

b)  $|5 - 3x| = |3x + 17|$ ;  $|x| + |x - 3| = 5$ ;  $|2x - 3| = |4x + 5|$

c)  $\left| \frac{1-x}{4} \right| = 6$ ;  $\left| \frac{x-2}{3} \right| = 5$ ;  $\frac{|2x-3|}{|4x+5|} = 1$

4) Simplifique

a)  $\frac{|x-3|}{x-3}$ , sendo  $x < 3$

b)  $\frac{|x|}{x} + \frac{|x-4|}{x-4}$ , sendo  $0 < x < 4$

c)  $1 + \frac{|x-2|}{x-2}$ , sendo  $x > 2$



O problema seguinte procura chamar a atenção para a importância do sinal das grandezas cinemáticas.

No jardim de um prédio, um físico vê um vaso, a 15 m de altura do chão, a 10 m de distância do prédio, movendo-se em uma velocidade de 15 m/s na direção horizontal, afastando-se em uma direção perpendicular à fachada do prédio, conforme a figura ao lado. O prédio tem 10 m de altura e o vaso foi lançado da laje do teto. As equações horárias que descrevem o movimento desse vaso, com  $g = 10 \text{ m/s}^2$  para a aceleração local da gravidade, no sistema de referência que tem origem no nível do chão junto ao prédio (ponto O da figura), são

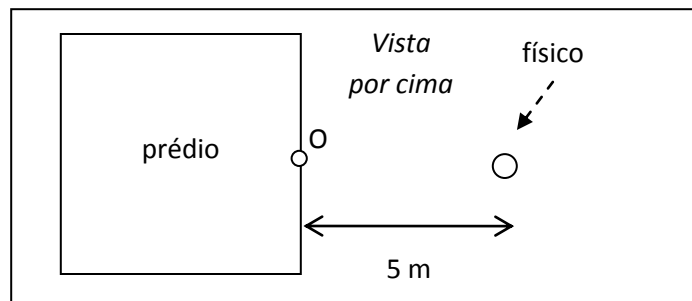
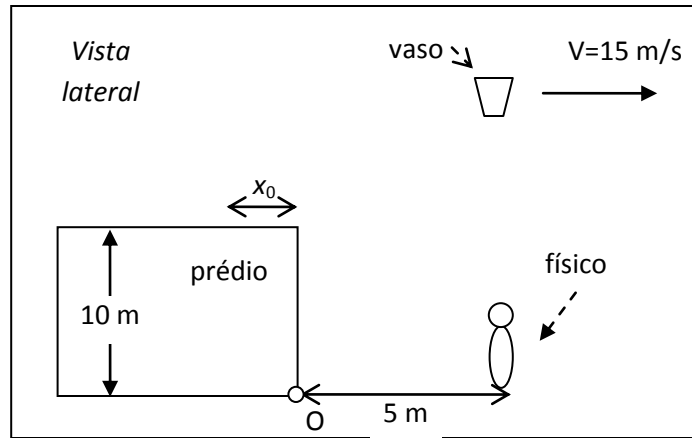
$$x(t) = 5 + 7t$$

$$y(t) = 15 - 5t^2$$

ambas as equações em m para  $t$  em s.

Determine:

- a que distância do prédio o objeto cai no chão.
- a que distância da parede do prédio o vaso foi lançado ( $x_0$  da figura).





### 3. Gráficos

Gráfico é uma maneira de expressar visualmente dados ou valores numéricos. A principal vantagem de um gráfico sobre uma tabela prende-se ao fato de que ele permite uma visualização imediata dos valores das grandezas envolvidas. Existem vários tipos de gráficos; os mais utilizados são os de colunas, os de linhas e os circulares.

Em física, o gráfico serve para visualizar o comportamento das grandezas físicas envolvidas de uma maneira mais rápida e que facilita sua compreensão. Através de um gráfico, podemos verificar como varia uma grandeza (por exemplo, *espaço*) em função de outra (por exemplo, *tempo*).

#### Gráfico de Barras

Temos abaixo um exemplo de gráfico de barras.



- Sobre o que tratam os dados representados no gráfico?
- Quais são os dois grupos distintos mostrados?



- c) A quantidade de idosos no mundo na década de 60 é comparável à população da cidade de São Paulo (11 244 369 hab), do estado de São Paulo (39 924 091 hab) ou com a do Brasil (190 732 694 hab)?
  
- d) O crescimento da população idosa com o tempo é maior nos países desenvolvidos ou em desenvolvimento? Em qual dos lugares a taxa de crescimento é mais constante?
  
- e) Qual o intervalo de tempo em que as informações são apresentadas?
  
- f) Qual conclusão você pode tirar, ao analisar o gráfico, em relação à expectativa de vida da população mundial?
  
- g) É possível que todos os dados apresentados sejam concretos, ou seja, que todas as informações apresentadas tenham sido retiradas de algum CENSO do período correspondente?

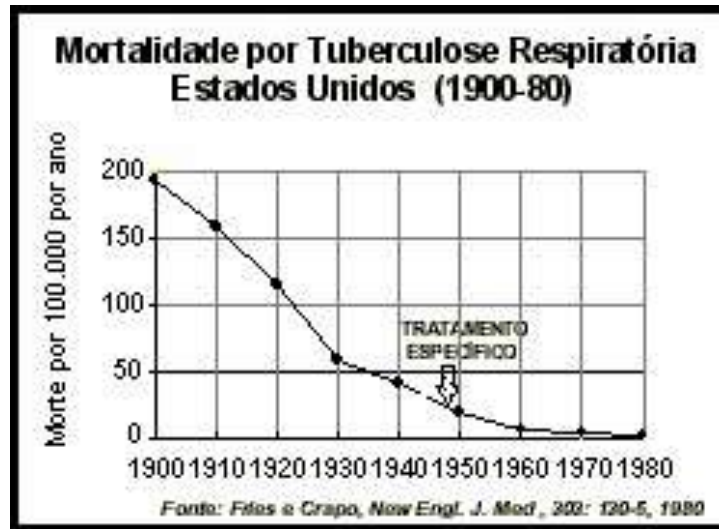
### **Gráfico de Linhas**

Um exemplo de outro tipo de gráfico é o de linhas, que será muito usado por nós. Nesse tipo, os pontos, descritos por coordenadas cartesianas, são ligados por curvas que descrevem o comportamento da grandeza.

Para a construção desse gráfico, utilizamos dois eixos, perpendiculares entre si. O eixo vertical é chamado de eixo das ordenadas e é representado pela letra  $y$ , enquanto o eixo horizontal é chamado de eixo das abscissas e é representado pela letra  $x$ .



Cada ponto do gráfico representa um par ordenado  $(x,y)$  – ano e mortalidade, respectivamente, e vice-versa.



Complete a tabela abaixo com base no gráfico acima.

Ano ( $x$ )	Mortes por 100 000 por ano ( $y$ )	Par ordenado ( $x,y$ )
1900	200	(1900; 200)
1930		
	1	
1910		
1950	25	
	110	
	45	
1970		
1960		

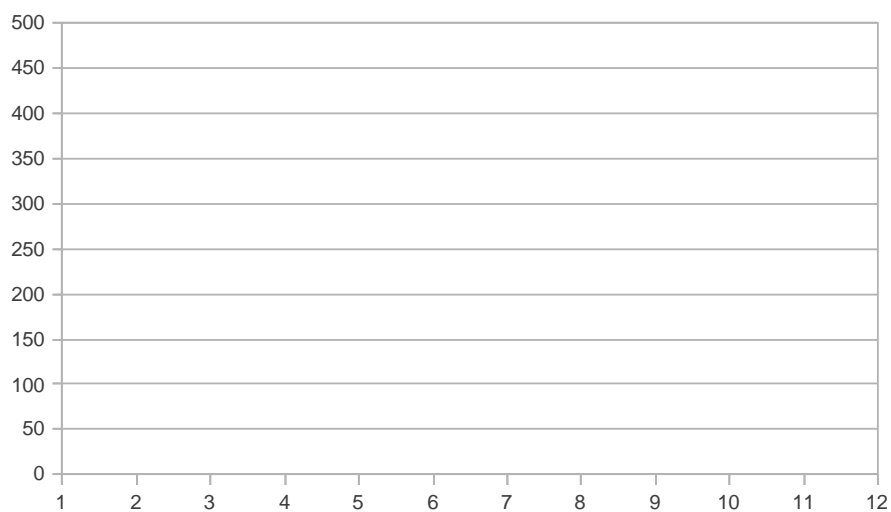
Podemos observar que há muitas informações nos gráficos além dos que se pode deduzir apenas dos valores, como, por exemplo: o título do gráfico; os títulos dos eixos; as escalas dos eixos e etc. Um gráfico de linhas *deve* conter as seguintes informações:



- Título.
- Identificação dos eixos, unidades físicas das grandezas representadas por eles e as escalas dos mesmos.
- Legenda, caso exista mais de um conjunto de dados.

Vamos supor agora que a empresa “XYZ” queira analisar o seu faturamento durante o ano de 2010. Para isso, faremos um gráfico das despesas e dos lucros nesse período, que estão relacionados na tabela seguinte, que você deve usar para esboçar o gráfico.

Mês	Despesas (R\$)	Lucro (R\$)
1	250 000	300 000
2	225 000	375 000
3	200 000	450 000
4	325 000	500 000
5	350 000	400 000
6	250 000	450 000
7	300 000	425 000
8	350 000	450 000
9	175 000	475 000
10	225 000	450 000
11	200 000	400 000
12	200 000	425 000



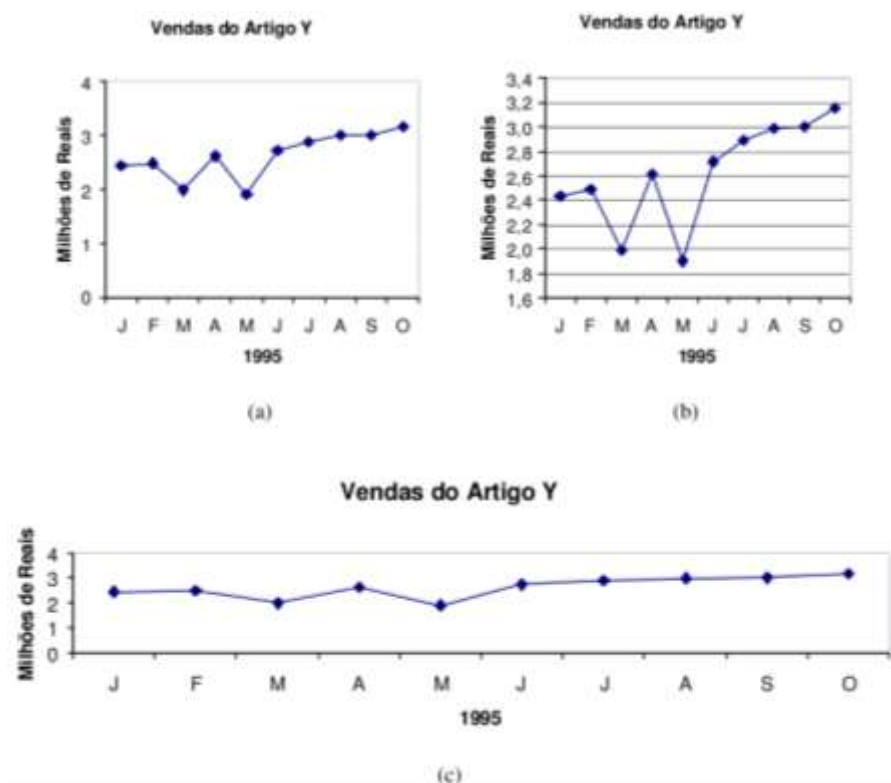




Muitas vezes, o uso indevido dos gráficos pode trazer uma idéia falsa dos dados que estão sendo analisados, chegando mesmo a confundir o leitor. Vejamos, através de um exemplo, como esse fato pode ocorrer. Os três gráficos apresentados a seguir representam o mesmo fenômeno através do mesmo conjunto de dados. A primeira impressão é a de que os três gráficos representam dados nitidamente diferentes.

No gráfico (a), as flutuações das vendas parecem ser moderadas, já no gráfico (c), tem-se a impressão de que a flutuação das vendas não manifesta praticamente tendência alguma, exceto leve flutuação. Trata-se, na realidade, de um problema de construção de escalas. Enquanto o gráfico (a) se apresenta com uma escala mais ou menos convencional, os demais revelam proporções consideravelmente diferentes para as escalas em que foram divididos os dois eixos.

Examinando superficialmente os três gráficos e não prestando muita atenção às escalas e a outros detalhes técnicos, o leitor certamente receberá impressões diferentes sobre a flutuação das vendas.



A tabela da próxima página nos mostra a taxa de analfabetismo no Brasil em porcentagem do grupo da população correspondente. Construa gráficos para descrever essas informações para cada uma das quatro categorias.



Categorias		1992	1993	1995	1996	1997	1998	1999	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
<b>15 anos ou mais</b>															
<b>Brasil</b>		17,2	16,4	15,6	14,7	14,7	13,8	13,3	12,4	11,8	11,6	11,4	11,1	10,4	10,0
Norte		14,2	14,8	13,3	12,4	13,5	12,6	12,3	11,2	10,4	10,6	12,7	11,6	11,3	10,9
Nordeste		32,7	31,8	30,5	28,7	29,4	27,5	26,6	24,3	23,4	23,2	22,4	21,9	20,8	20,0
Sudeste		10,9	9,9	9,3	8,7	8,6	8,1	7,8	7,5	7,2	6,8	6,6	6,6	6,0	5,8
Sul		10,2	9,8	9,1	8,9	8,3	8,1	7,8	7,1	6,7	6,4	6,3	5,9	5,7	5,4
Centro-Oeste		14,5	14,0	13,3	11,6	12,4	11,1	10,8	10,2	9,6	9,5	9,2	8,9	8,3	8,1
<b>Localização</b>															
Urbano Metropolitano		8,1	7,4	7,0	6,5	6,5	5,9	5,8	5,6	5,4	5,2	5,2	5,0	4,4	4,4
Rural		35,9	34,5	32,7	31,2	32,0	30,2	29,0	28,7	27,7	27,2	25,8	25,0	24,1	23,3
<b>Raça ou Cor</b>															
Branca		10,6	10,1	9,5	9,4	8,9	8,4	8,3	7,7	7,5	7,1	7,2	7,0	6,5	6,1
Negra		25,7	24,8	23,5	21,8	22,2	20,8	19,8	18,2	17,2	16,8	16,2	15,4	14,6	14,1
<b>Faixa Etária</b>															
15 a 17 anos		8,2	8,2	6,6	5,9	5,4	4,6	3,7	3,0	2,6	2,3	2,1	1,9	1,6	1,7
18 a 24 anos		8,6	8,2	7,2	6,5	6,8	5,4	4,9	4,2	3,7	3,4	3,2	2,9	2,4	2,4
25 a 29 anos		10,0	9,3	9,3	8,1	8,6	7,7	7,2	6,8	6,3	5,8	5,8	5,7	4,7	4,4
30 a 39 anos		12,0	11,6	11,0	10,2	10,3	10,1	9,6	9,0	8,4	8,3	7,9	7,7	7,2	6,6
40 anos +		29,2	27,8	26,1	24,9	24,8	23,3	22,8	21,2	20,4	19,9	19,6	19,0	17,9	17,2

Fonte: Microdados da Pnad (IBGE).

Elaboração: Theodora.

CEB: 1 A Pnad não foi realizada em 1994 e 2000.

1 Raça na grafia composta de quatro dígitos.

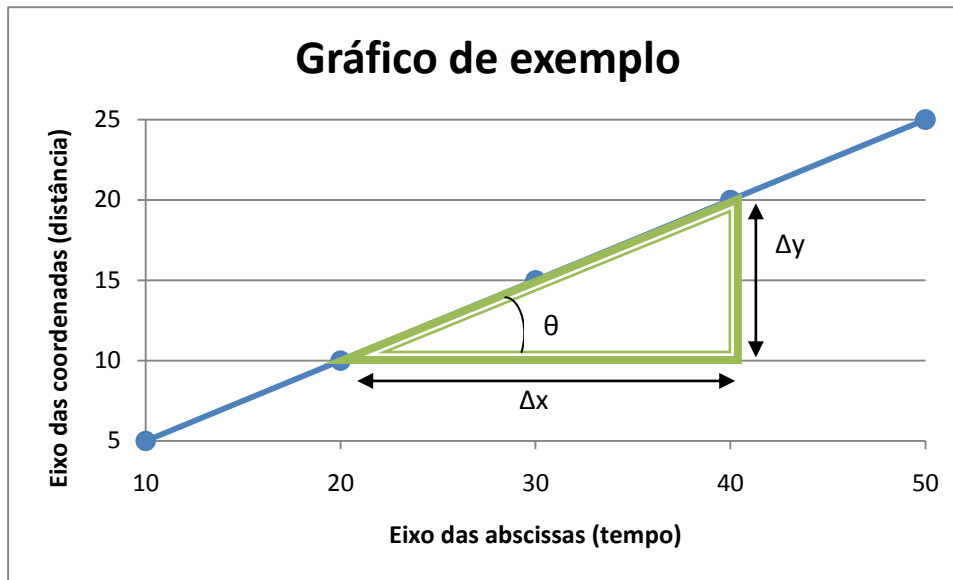
3 A partir de 2004 a Pnad passa a contemplar a população rural do Brasil, com: Amambay, Arara, Aruanã, Povoado, Povoado e Fazenda.



## Caso Especial

Um caso especial de gráfico de linhas acontece quando os dados apresentados se comportam de maneira tal que podemos traçar uma linha reta contínua para ligar os pontos do mesmo. Essa curva apresenta uma propriedade muito importante e nos traz uma informação valiosa, que é o coeficiente angular da reta.

O coeficiente angular da reta nada mais é do que a inclinação da reta em relação ao eixo horizontal. Podemos calculá-lo de forma geométrica, como no esquema abaixo.



Então, temos que o coeficiente angular da reta será dado pela razão  $\Delta y$  por  $\Delta x$ . Se usássemos uma régua para medir os tamanhos dos segmentos, obteríamos a razão  $2/5$ , ou seja,  $0,4$ , e o mesmo resultado seria obtido se usássemos um transferidor para medir o ângulo  $\theta$  e calculássemos sua tangente. Porém, temos que lembrar que as escalas dos eixos das coordenadas e das abscissas não são iguais, ou seja, existe um fator de escala entre eles e, por isso, é preciso levar em conta que os 2 cm da seta vertical equivalem a 10 unidades de distância, e que os 5 cm de seta horizontal equivalem a 20 unidades de tempo, portanto a razão será igual a 10 unidades de distância por 20 unidades de tempo, ou seja,  $0,5$  u. distância/ u. tempo.

Podemos perceber que os valores obtidos anteriormente são diferentes e concluímos que o coeficiente da reta não é a tangente do ângulo que a reta forma com eixo x, pois pode existir uma diferença entre as escalas, e esse coeficiente possui unidades intrínsecas a ele, diferente da tangente de um ângulo, que é adimensional.

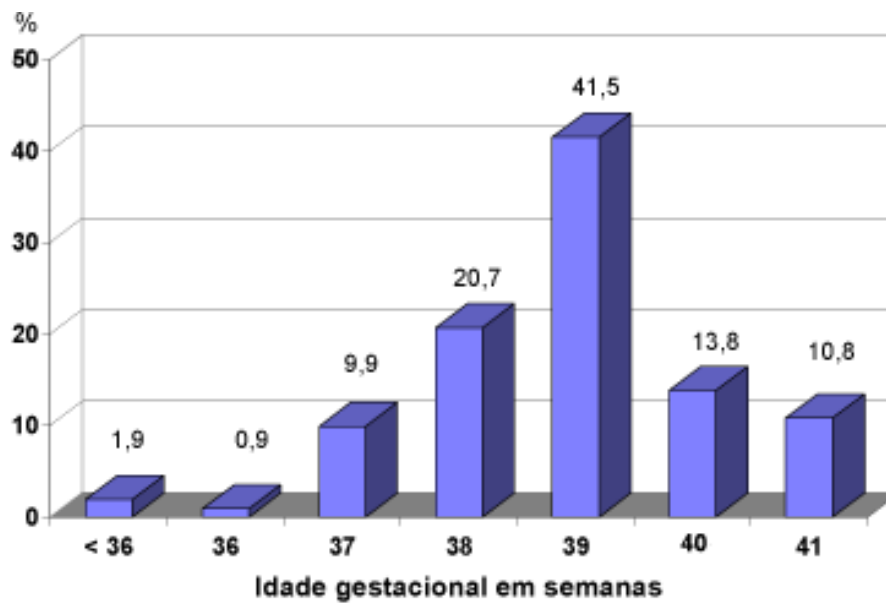


## Exercícios

- 1) Analise os gráficos abaixo:
  - a) Descreva-os em palavras, indicando regiões de crescimento ou diminuição.
  - b) Faça uma tabela, indicando, para cada um deles, a abscissa e a ordenada.
  - c) Se você tivesse que escolher quais gráficos são mais parecidos com parábolas e quais gráficos são mais parecidos com retas, como seria a sua classificação?
- i) Valor da ação da Vale do Rio Doce

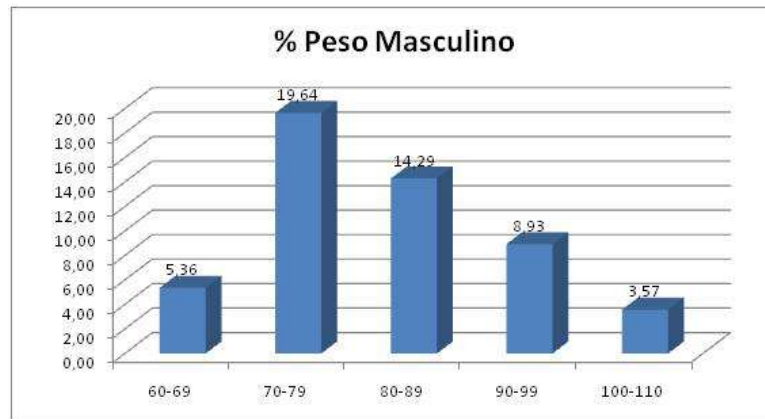


- ii) Tempo de gestação em porcentagem

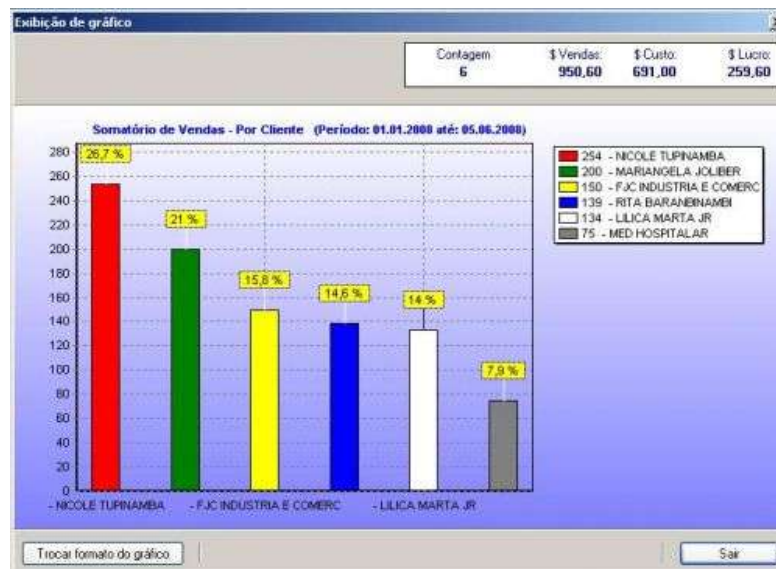




iii) Distribuição de peso da população masculina brasileira



iv) Índice de vendas por empresa

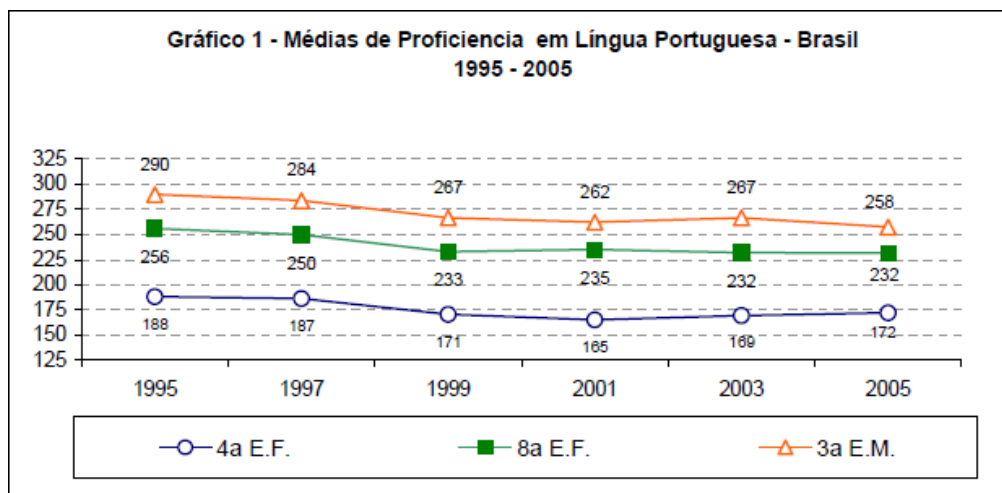


v) Distribuição da população analfabeta

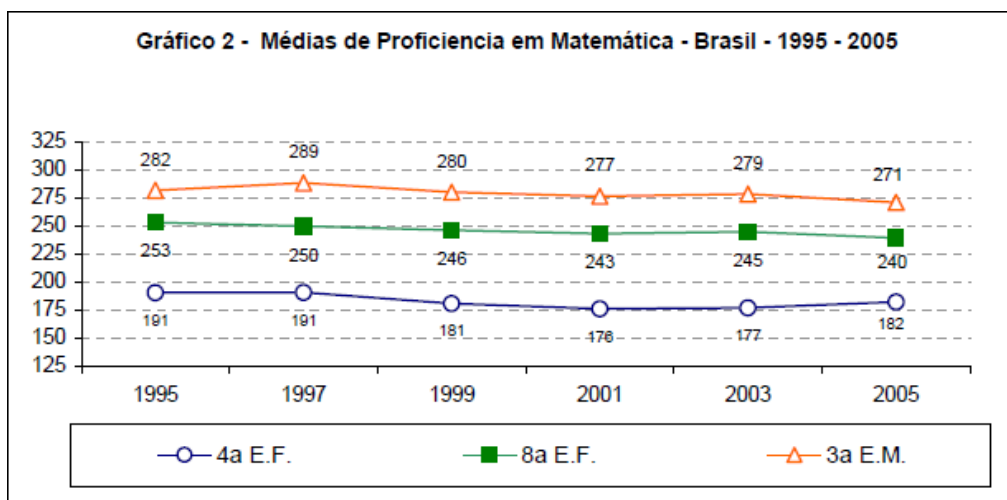




vi) Resultados de proficiência em português na prova Brasil.



vii) Resultados de proficiência em matemática na prova Brasil



viii) Escolaridade da população brasileira





2) Com as funções dos itens a) a g), que representam funções lineares, preencha a tabela abaixo e depois esboce (i) um gráfico *qualitativo* de cada uma, (ii) um gráfico *quantitativo* e compare com o item (i).

crescente	decrecente	Corta o eixo y em valor positivo	Corta o eixo y em valor negativo

- a)  $Y = 2x$ ;
- b)  $Y = x + 10$
- c)  $Y = -x + 5$
- d)  $Y = -5x$
- e)  $Y = 2 - x$
- f)  $R = 2t - 5$
- g)  $L = -p + 1$

3) Qual das funções acima tem crescimento mais rápido com a variável independente? Qual decresce mais rapidamente?

4) Siga as instruções abaixo:

- a) No gráfico que representa o analfabetismo na população rural brasileira acima, vemos que aproximadamente 5% da população de 15 anos é analfabeta, proporção que aumenta para aproximadamente 55% da população de 70 anos. Se tomarmos estes dados como exatos, teremos  $y(15) = 5$  e  $y(70) = 55$ . Supondo que o crescimento seja linear, escreva a equação da reta para estes dados. Desenhe um gráfico e compare com o gráfico que apresenta os dados.
- b) Repita o procedimento para a curva que representa a distribuição do analfabetismo na população metropolitana.



## Desafios

5) Preencha a tabela abaixo.

x	$y = 3x^2 - 4x + 1$	y
-3		
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		

Construa um gráfico de  $y(x)$  a partir da tabela acima. Qual é o menor valor de  $y$  para essa função?

6) Construa o gráfico da função  $y = x^3 - 4x^2 + 2$ . Quais são os pontos de inflexão da curva?





## 4. Equação da Reta

### Equação Geral da Reta

Em gráficos, retas representam a relação entre quantidades que variam *uniformemente* em função de alguma outra quantidade, por exemplo, o espaço percorrido por um móvel em determinado tempo à velocidade constante.

A **equação geral** de uma reta é representada por:

$$Ax + By + C = 0 \quad (4.1)$$

Vejam alguns exemplos de equações de uma reta e como cada termo pode ser interpretado.

Na equação (4.1), A, B e C são números reais chamados coeficientes; façamos, em nosso exemplo,  $A=B=C=1$ . Assim, a equação fica:

$$x + y + 1 = 0$$

Isolando  $y$  no lado esquerdo da equação, teremos:

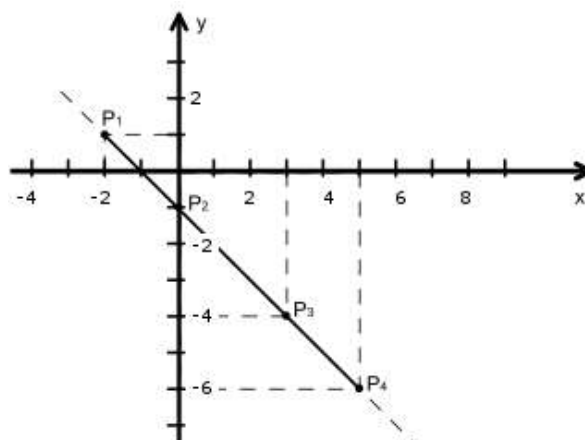
$$y = -x - 1 \quad (4.2)$$

Isso quer dizer que, para cada valor de  $x$ , a equação fornece um valor correspondente de  $y$ ; como vimos na seção sobre gráficos, em um plano cartesiano o par ordenado  $(x, y)$  é a localização de um ponto no plano. Veja na tabela abaixo as coordenadas de alguns pontos, obtidos com os valores de  $y$  calculados com a equação (4.2) a partir de valores de  $x$ .



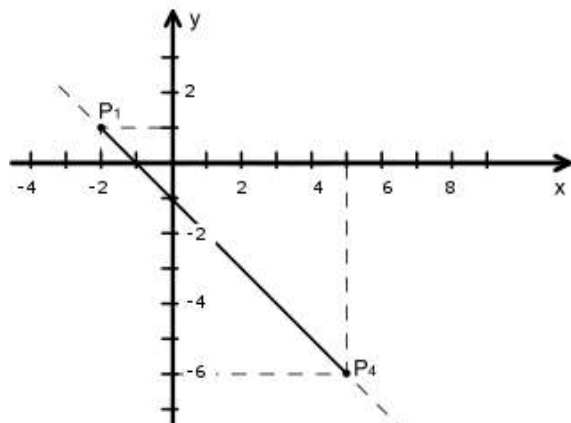
Valor de $x$	Calculando	Valor de $y$	Localização do Ponto P
-2	$y = -(-2) - 1$	1	$P_1 (-2,1)$
0	$y = -0 - 1$	-1	$P_2 (0,-1)$
3	$y = -3 - 1$	-4	$P_3 (3,-4)$
5	$y = -5 - 1$	-6	$P_4 (5,-6)$

Agora vejamos como esses pontos se comportam em um gráfico;



No gráfico acima, cada intervalo entre as marcações nos eixos corresponde a uma unidade. Portanto, o ponto  $P_1$  está nas coordenadas duas unidades no sentido negativo no eixo  $x$  e uma unidade no sentido positivo no eixo  $y$ ; os outros pontos seguem a mesma regra. Perceba que o valor de  $y$  obtido com a equação (4.2) para um valor de  $x$  sempre faz com que o ponto se localize sobre a mesma reta que liga os pontos. Note que o comprimento da reta desenhada no gráfico poderia ser maior ou menor, uma vez que não há nenhuma razão especial para que tenhamos escolhido os pontos mostrados. Isso quer dizer que, nesse caso, a reta existe para qualquer valor de  $x$ ; em princípio, trata-se de uma reta contínua de extensão infinita. Procuraremos dar idéia dessa continuidade pela linha pontilhada. Tente utilizar a equação (4.2) com outros valores de  $x$  e confira que os pontos encontrados sempre fazem parte da reta desenhada, embora possa ser necessário prolongar o segmento que está desenhado para ver isso.

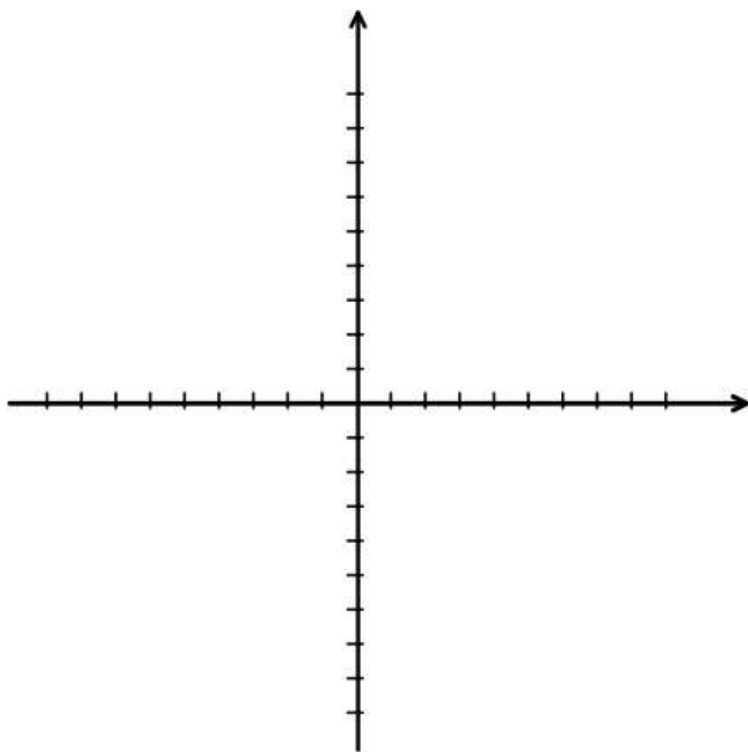
Note que não são necessários tantos pontos para descrever uma reta, bastam somente dois. No gráfico abaixo, usaremos somente os pontos  $P_1(-2,1)$  e  $P_4(5,-6)$ . O gráfico fica



exatamente a mesma reta, as regras para o uso da equação (4.2) continuam as mesmas e a reta pode ser descrita por qualquer outro par de pontos distintos.

### *Exercício 1*

Encontre dois pontos que pertençam à reta descrita pela equação  $y = 2x + 6$ , marque-os no sistema de eixos abaixo, trace uma reta entre eles e teste outros pontos, verificando que pertencerão à reta traçada. Marque valores de  $x$  e  $y$  nos eixos ordenados.





## Equação Reduzida da Reta

Vamos voltar agora para a equação geral da reta

$$Ax + By + C = 0 \quad (4.1)$$

Novamente atribuiremos valores para os coeficientes  $A$ ,  $B$  e  $C$  de forma arbitrária para mais um exemplo:  $A = 4$ ,  $B = -2$  e  $C = 6$ . Com esses valores, nossa equação fica:

$$4x - 2y + 6 = 0 \quad (4.3)$$

Como feito anteriormente, iremos calcular  $y$  usando essa equação. Isso quer dizer que isolaremos a incógnita  $y$  de um dos lados, para que o resultado fornecido pelo outro lado da equação dê seu valor. Assim, depois de multiplicar por  $(-1)$  para que os números fiquem positivos,

$$2y = 4x + 6$$

$$y = \frac{4}{2}x + \frac{6}{2} \quad (4.4)$$

Perceba que, se usarmos a equação (4.1) e isolarmos  $y$  literalmente (usando letras) a equação fica:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \quad (4.5)$$

Esses coeficientes em forma de fração dão origem a outros coeficientes com propriedades e nomes especiais. Teremos então que:

$$a = -\frac{A}{B} \quad e \quad b = -\frac{C}{B}$$

onde  $a$  é chamado **coeficiente angular da reta** e  $b$ , **coeficiente linear da reta**, e a equação (4.5) fica:



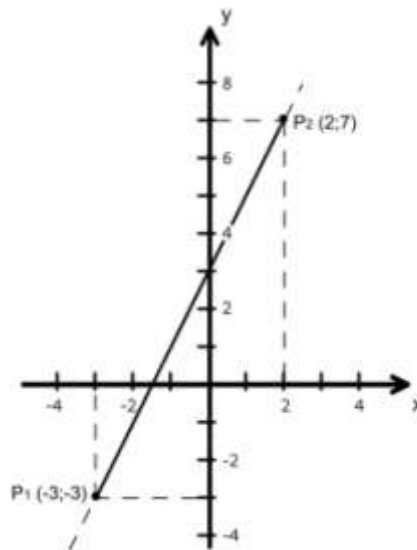
$$y = ax + b \quad (4.6)$$

que é a **equação reduzida da reta**, que nada mais é do que um polinômio de primeiro grau na variável  $x$ . Veremos as características de cada um dos coeficientes citados acima. Por agora, voltaremos ao nosso exemplo numérico a partir da equação (4.4), onde vemos que, calculando as frações dos coeficientes, obtemos a equação:

$$y = 2x + 3 \quad (4.7)$$

Como fizemos anteriormente, iremos escolher dois pontos quaisquer a partir de dois valores quaisquer de  $x$  e calculando com a equação (4.7) para estes valores, depois colocaremos esses pontos no gráfico e traçaremos a reta a qual pertencem os pontos obtidos.

Valor de $x$	Calculando	Valor de $y$	Localização do Ponto P
-3	$y = 2 \cdot (-3) + 3$	-3	$P_1 (-3,-3)$
2	$y = 2 \cdot 2 + 3$	7	$P_2 (2,7)$



Como já foi discutido anteriormente, os pontos  $P_1$  e  $P_2$  fazem parte da reta pontilhada no gráfico e a equação de onde os obtivemos prevê todos os pontos pertencentes a esta reta. Perceba o que ocorre quando o valor de  $x$  é nulo: o gráfico mostra que  $y = 3$ , que é exatamente o valor de  $b$ , o coeficiente linear da equação. A equação (4.7) concorda com o gráfico, já que, se inserirmos 0 como o valor de  $x$ , anularemos o primeiro termo do lado direito da equação, resultando  $y = 3$ .

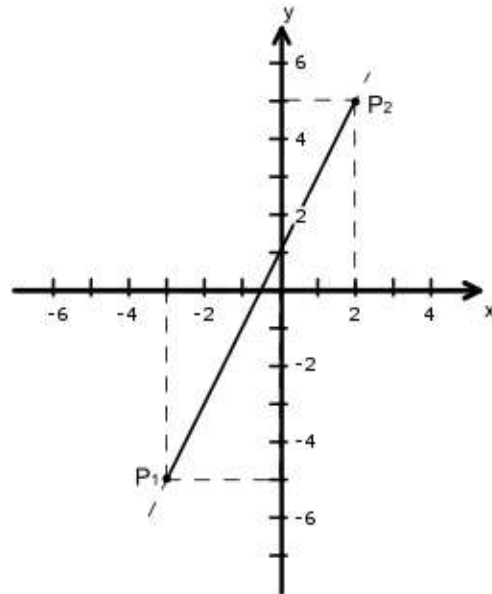


## Coeficiente Linear e Coeficiente Angular da Reta

O que acontece se alterarmos o valor de  $b$ ? Digamos que, agora,  $b = 1$ , de modo que nossa equação (4.7) se torna:

$$y = 2x + 1 \quad (4.8)$$

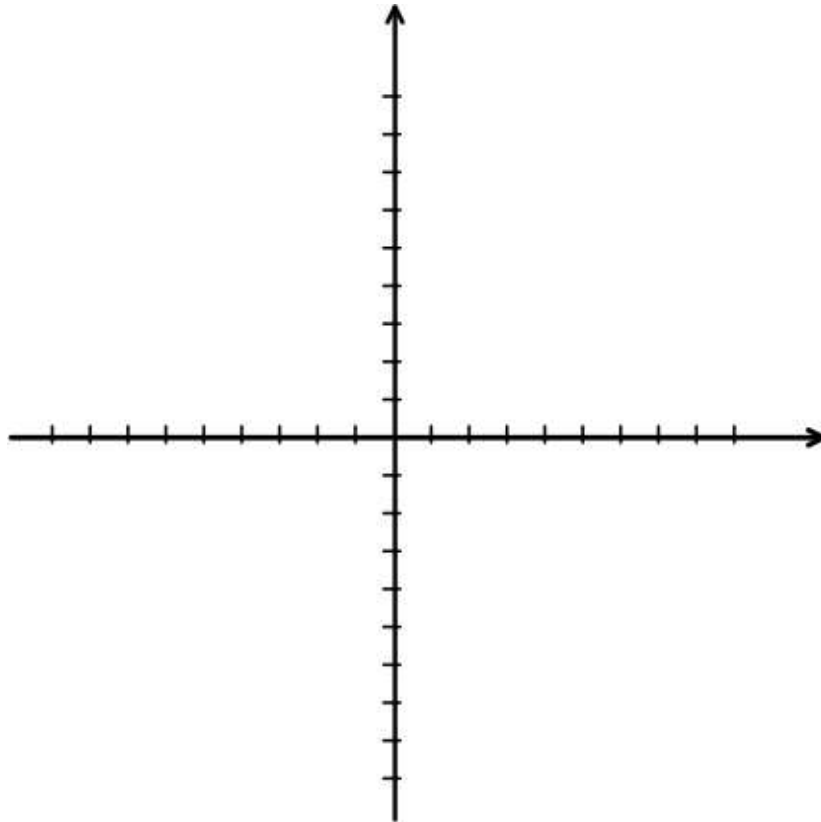
Nesse caso, o gráfico fica:



Perceba que a inclinação da reta continua a mesma, o gráfico parece ter o mesmo comportamento de variação, mas agora, quando  $x = 0$ , o gráfico mostra que  $y = 1$ , que é o valor do coeficiente linear da equação (4.8).

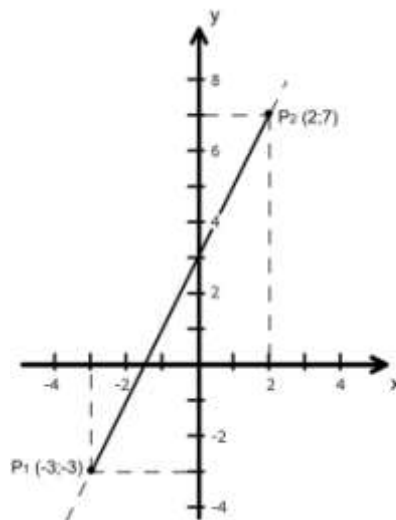
### *Exercício 2:*

Utilizando a equação (4.6), fixe o valor do coeficiente angular e altere somente os valores do coeficiente linear para mais três valores diferentes de 1 e trace as retas que essas novas equações descrevem no sistema de eixos abaixo. Discuta a mudança de comportamento dos gráficos quando o coeficiente linear é alterado.



Como você deve ter percebido, a alteração do coeficiente linear desloca lateralmente o gráfico: o coeficiente linear é o valor onde o gráfico cruza o eixo  $y$  quando  $x = 0$ .

Agora, vamos retornar à equação (4.7) e analisar o coeficiente angular  $a$  desta equação. Como vimos, o gráfico fornecido por (4.7) é





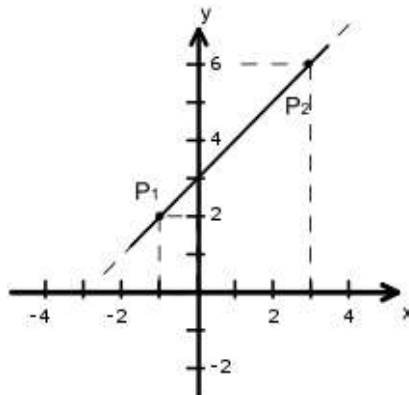
mas agora mudaremos o coeficiente angular para 1, o que nos fornece a equação

$$y = x + 3 \quad (4.9)$$

Preenchendo a tabela de pontos temos,

Valor de $x$	Calculando	Valor de $y$	Localização do Ponto P
-1	$y = -1 + 3$	2	$P_1 (-1,2)$
2	$y = 2 + 3$	5	$P_2 (2,5)$

o que nos dá o gráfico

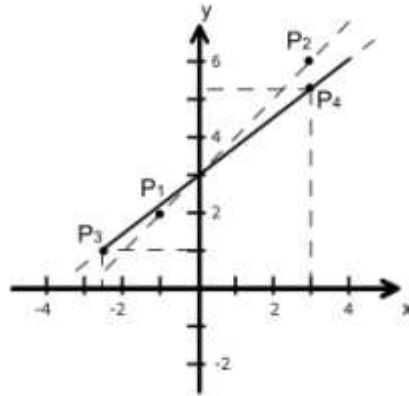


Agora, alteraremos novamente o coeficiente angular da equação para  $\frac{1}{2}$ . Teremos então a equação,

$$y = \frac{1}{2}x + 3 \quad (10)$$

A partir desta equação encontramos um novo par de pontos  $P_3$  e  $P_4$

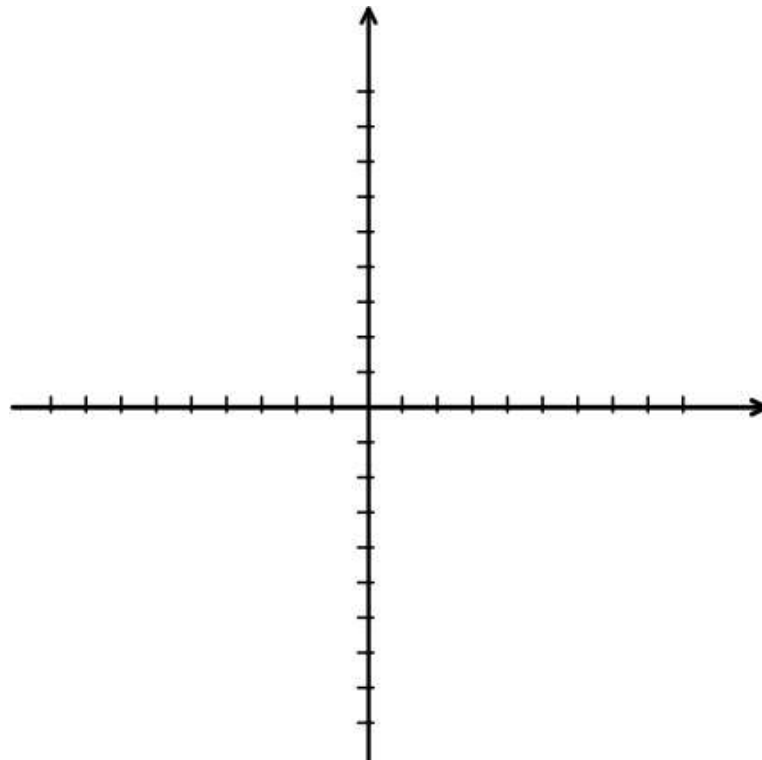




Perceba que, ao alterarmos o coeficiente angular da equação, a reta gira em torno do ponto que marca  $b$ , que é o coeficiente linear comum às duas retas. Note que um ponto pode fazer parte de duas (ou mais) retas, mas sozinho não descreve qualquer uma delas.

### *Exercício 3:*

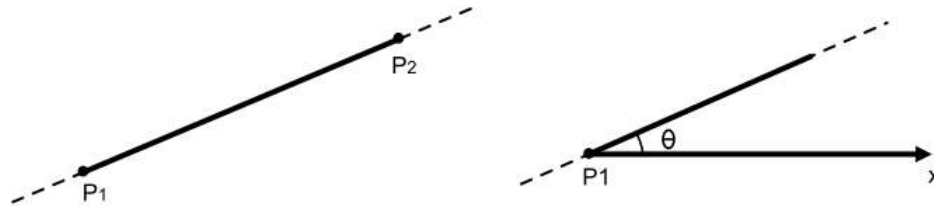
Utilizando a equação (4.6), fixe o coeficiente linear em 3 altere somente os valores do coeficiente angular para mais três valores diferentes de  $\frac{1}{2}$  e encontre dois pontos que satisfaçam cada uma dessas novas equações; marque estes pontos no sistema de eixos abaixo e trace a reta entre eles que corresponde à equação encontrada. Discuta a mudança de comportamento dos gráficos quando o coeficiente angular é alterado.





Como você deve ter percebido, o coeficiente angular relaciona-se com o ângulo que a reta do gráfico forma com o eixo  $x$  (atenção: o coeficiente angular relaciona-se com o ângulo, mas não é o ângulo).

Dissemos anteriormente que uma reta pode ser definida por dois pontos, mas agora podemos mostrar que também é possível defini-la por um ponto e o coeficiente angular da reta,



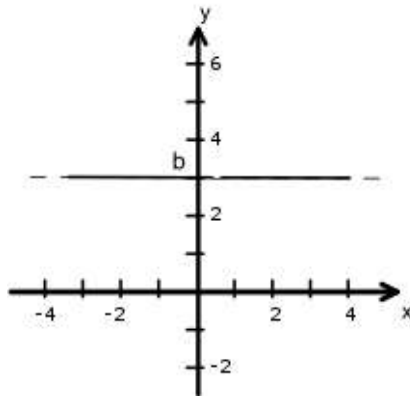
Em ambos os casos, temos informação suficiente para prever a localização de todos os outros pontos pertencentes à reta, com as coordenadas no plano cartesiano.

### Casos Especiais de Retas

Quando o coeficiente angular é nulo, temos a equação reduzida do tipo

$$y = b \quad (4.11)$$

ou seja, para qualquer valor de  $x$  a equação fornece sempre o mesmo valor para  $y$ , que é o valor do coeficiente linear, que é uma constante. O gráfico, portanto, se apresenta como uma reta horizontal paralela ao eixo  $x$ <sup>1</sup>.



Se o valor de  $b$  também for nulo, temos a equação que descreve o eixo  $x$ .

<sup>1</sup> Um pouco de nomes. Na relação  $y = ax + b$ , costuma-se identificar  $x$  como variável independente, por que ela costuma representar as causas do fenômeno físico estudado, já  $y$  é identificada como variável dependente, pois seu valor depende do valor de  $x$ .



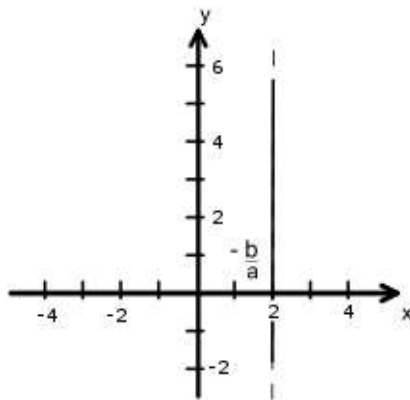
Quando o valor de  $y$  é nulo, temos a equação reduzida do tipo

$$ax + b = 0 \quad (4.12)$$

Resolvendo essa equação para  $x$  temos

$$x = -\frac{b}{a} \quad (4.13)$$

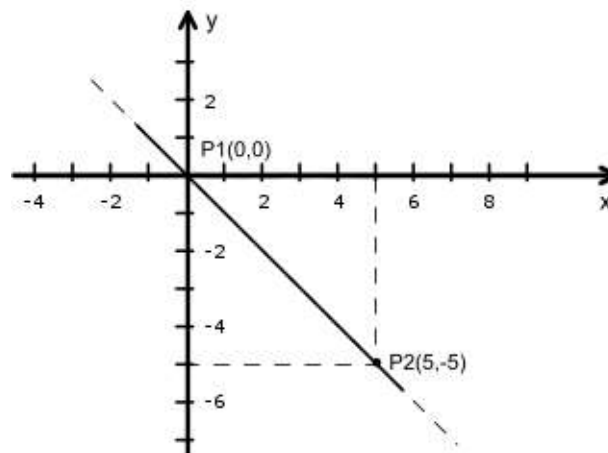
ou seja, o valor de  $y$  é indefinido (pode ser um valor qualquer). O gráfico, portanto, se apresenta como uma reta vertical paralela ao eixo  $y$ , mas  $x$  continua sendo um valor fixo e igual a  $-\frac{b}{a}$ .



Se o valor de  $b$  for nulo, temos a equação que descreve o eixo  $y$ .

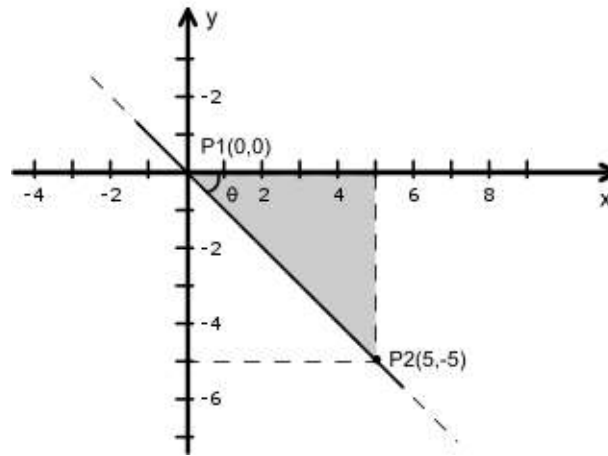
Agora vamos investigar um pouco mais o que é o coeficiente angular, no caso particular e pouco comum na física, que acontece se as quantidades  $x$  e  $y$  são representadas com escalas iguais.

Considere uma reta a qual pertencem os dois pontos  $P_1(0,0)$  e  $P_2(5,-5)$ , produzindo o gráfico,





o coeficiente angular dessa reta é  $a = -1$  e o coeficiente linear é  $b = 0$  (*use a equação reduzida da reta e verifique que isso é verdade*). Observe o triângulo (em cinza) formado entre a reta e o eixo  $x$ ,



Esse é um triângulo retângulo. Em trigonometria, vemos que o triângulo retângulo possui uma hipotenusa (sobre a qual passa a reta do gráfico no triângulo observado) e dois catetos (os seguimentos em  $x$  e em  $y$  entre os dois pontos) e que a tangente do ângulo  $\theta$  pode ser medida pela razão

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} \quad (4.14)$$

Podemos ver que, em nosso triângulo, cateto oposto a  $\theta$  é o segmento entre as coordenadas de  $y$  dos pontos P2 e P1, simbolizado por  $\Delta y$ . Assim,

$$\Delta y = -5 - 0 = -5 \quad (4.15)$$

O cateto adjacente é o segmento entre as coordenadas  $x$  de P2 e P1, simbolizada por  $\Delta x$ , e vale

$$\Delta x = 5 - 0 = 5 \quad (4.16)$$

Assim temos

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-5}{5} = -1 \quad (4.17)$$

que é o valor do coeficiente angular determinado anteriormente pela equação reduzida da reta. Portanto, neste caso, o coeficiente angular é igual à tangente do ângulo formado entre a reta e o eixo  $x$ ,  $a = \operatorname{tg}\theta$  (Atenção: essa relação só é válida quando tanto o eixo  $x$  quanto o eixo  $y$  estiverem expressos em escalas iguais).



## Equação Fundamental da Reta

Podemos generalizar esse resultado a partir da definição da variação das quantidades. Assim temos,

$$tg\theta = a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (4.18)$$

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1) \quad (4.19)$$

que é a **equação fundamental da reta**.

## Inclinação da Reta e Fatores de Escala

Em física, a maioria das grandezas envolvidas nas equações tem dimensão, isto é, são expressas em relação a uma unidade de medida. Isso faz com que a inclinação do gráfico que expressa um fenômeno físico tenha uma unidade e, na maior parte dos casos, não possa ser interpretada simplesmente como a tangente de um ângulo, necessariamente adimensional.

Mesmo assim, ainda podemos definir a inclinação da reta a partir de um par qualquer de pontos que pertencem a ela de modo que

$$inclinação = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a \quad (4.20)$$

O coeficiente  $a$  é uma grandeza com dimensão física quando as grandezas  $x$  e  $y$  não têm a mesma dimensão física. Por exemplo, se  $y$  mede posição em metros (m) e  $x$  mede tempo em segundos (s), a inclinação tem a dimensão de m/s.

É importante, ainda, ter atenção para o fato de que, apesar da reta que representa o gráfico  $y(x)$  formar um ângulo com o eixo  $Ox$  que pode ser medido, por exemplo, com um transferidor, não podemos dizer que o coeficiente  $a$  seja a tangente desse ângulo. *Isso ocorre porque este ângulo depende da maneira como você escolhe as escalas.* Contudo, é possível inserir um fator de proporcionalidade alfa nos dando a equação:

$$a = \alpha \cdot tg\theta \quad (4.21)$$

$a$  é igual a  $\alpha$ (alfa) vezes  $tg\theta$  onde  $\alpha$  possui dimensão física definida por



$$[\alpha] = \frac{[y]}{[x]} \quad (4.22)$$

O símbolo  $[\ ]$  indica que está sendo feita uma análise dimensional, assunto que será tratado em seu curso de mecânica.

#### *Exercício 4:*

Uma reta passa pelos pontos P1(2,4) e tem coeficiente angular  $a = 6$ . Escreva a equação fundamental desta reta, e a partir dela obtenha a localização do ponto P2 cuja coordenada  $x = 10$ .

Agora que deixamos claro que somente quando os eixos  $Ox$  e  $Oy$  estão na mesma escala a inclinação é a tangente do ângulo, vamos entender porque essa inclinação também atende pelo nome *coeficiente angular*. Vamos, então, recuperar a interpretação simples do caso isométrico (=que tem as mesmas dimensões), onde a tangente do ângulo é a inclinação.

Vamos lidar com um gráfico de posição por tempo, onde um carro desloca-se numa avenida congestionada entre  $x_i = 5$  m no instante  $t_i = 3$  s e  $x_f = 95$  m no instante  $t_f = 48$  s, com velocidade constante. Note que falamos até agora em gráfico de  $y$  por  $x$  ( $x$  costuma ser o eixo horizontal quando usamos esses dois nomes) e vamos fazer um gráfico  $x$  contra  $t$ , onde o  $x$  vai ser o eixo vertical. Exatamente para que o nome do eixo não importe, temos que adaptar todas as expressões aritméticas para os novos nomes. Assim, a inclinação, que era a razão entre  $\Delta y$  e  $\Delta x$ , agora será a razão entre  $\Delta x$  e  $\Delta t$ .

Para desenhar o gráfico num papel quadriculado de 10 cm por 10 cm, escolhemos uma escala em  $x$  tal que 100 m são representados em 10 cm do papel e uma escala de tempo em que 50 s são representados em 10 cm do papel. Os fatores de escala definidos são, portanto,

$$f_x = \frac{10 \text{ cm}}{100 \text{ m}} = 0,1 \frac{\text{cm}}{\text{m}} \quad \text{e} \quad f_t = \frac{10 \text{ cm}}{50 \text{ s}} = 0,2 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

Quando calculamos a inclinação da reta no intervalo [3 s, 48 s], encontramos



$$v = \frac{90 \text{ m}}{45 \text{ s}} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Se medirmos a tangente do ângulo no papel encontraremos, porém,

$$\tan(\theta) = \frac{9 \text{ cm}}{9 \text{ cm}} = 1$$

– note que o ângulo é mesmo  $45^\circ$ , que é o arco cuja tangente vale 1, portanto o cálculo está certo. A diferença das respostas vem das escalas, que não poderiam ser iguais uma vez que as dimensões físicas envolvidas nos dois eixos são diferentes. Assim, quando calculamos a tangente trigonométrica, usamos segmentos, portanto

$$\tan \theta = \frac{\Delta x f_x}{\Delta t f_t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \frac{f_x}{f_t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} 0,5 \frac{\text{s}}{\text{m}}$$

ou seja, a tangente do ângulo está relacionada com a inclinação por um fator que só depende das escalas usadas; no nosso caso, o valor numérico da tangente do ângulo é metade do valor numérico da velocidade do carro expressa em m/s.

Enfim, a inclinação da reta está relacionada com a tangente do ângulo, bastando incluir a razão dos fatores de escala e não nos confundirmos com as unidades. Na prática, nunca medimos o ângulo de inclinação da reta com transferidores, mas sim calculamos a inclinação com a razão  $\square x / \square t$ , inclusive porque sempre precisamos desse valor com as unidades de medida correspondentes, que não podem estar embutidas na tangente trigonométrica.

## Exercícios

1) Dentre os pontos  $P_1(3;1)$ ,  $P_2(2;3)$ ,  $P_3(6;3)$ ,  $P_4(-3,-3)$ ,  $P_5(3,-1)$  e  $P_6(-2,1)$ , determine quais pertencem e quais não pertencem à reta  $2x - 3y - 3 = 0$

2) Os pontos  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_4$  e  $P_5$  pertencem à reta  $3x - 2y - 6 = 0$  e suas coordenadas x são, respectivamente, 4, 0, 2, -2 e -6. Ache suas coordenadas y.



3) Ache os pontos de intersecção entre a reta  $2x - 3y - 12 = 0$  e os eixos coordenados e faça um gráfico dessa reta.

4) Os lados AB, BC e AC de um triângulo são dados, respectivamente, pelas equações  $4x + 3y - 5 = 0$ ,  $x - 3y + 10 = 0$ ,  $x - 2 = 0$ . Faça um gráfico com essas 3 retas e calcule a área do triângulo determinado por elas.

5) Ache a equação da reta e faça o seu gráfico, sabendo que seu coeficiente angular é  $a$  e o coeficiente linear é  $b$ , dados pelos valores:

a)  $a = 2/3$ ,  $b=3$

b)  $a = 3$ ,  $b=0$

c)  $a = 0$ ,  $b=-2$

d)  $a = -3/4$ ,  $b=3$





e)  $a = -2, b = -5$

f)  $a = -1/3, b = 2/3$

6) Ache o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos:

a)  $P_1 (2;-5)$  e  $P_2 (3;2)$

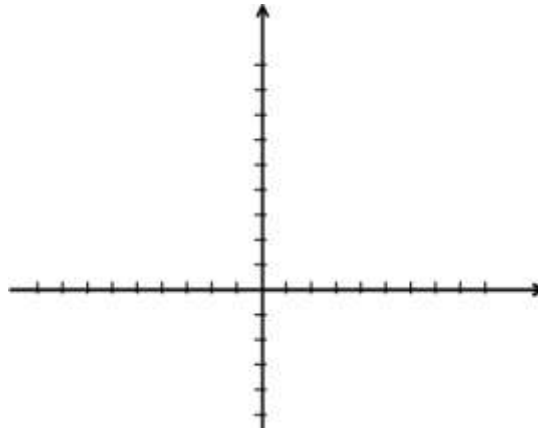
b)  $P_1 (-3;1)$  e  $P_2(7;8)$

c)  $P_1 (5;-3)$  e  $P_2 (-1;6)$

7) Uma reta  $s$  possui equação  $y = 3x - 5$  e outra reta  $r$  possui equação  $y = -5x + 11$ .  
Determine algebricamente o ponto comum às duas retas.



Represente as retas  $r$  e  $s$  no eixo ordenado abaixo, marque o ponto comum entre as retas e compare com o item a.



8) Ache o ponto de intersecção entre as retas  $3x - 4y - 29 = 0$  e  $2x + 5y + 19 = 0$ .