Universidade de São Paulo
Instituto de Física

FEP113 - FÍSICA EXPERIMENTAL 1

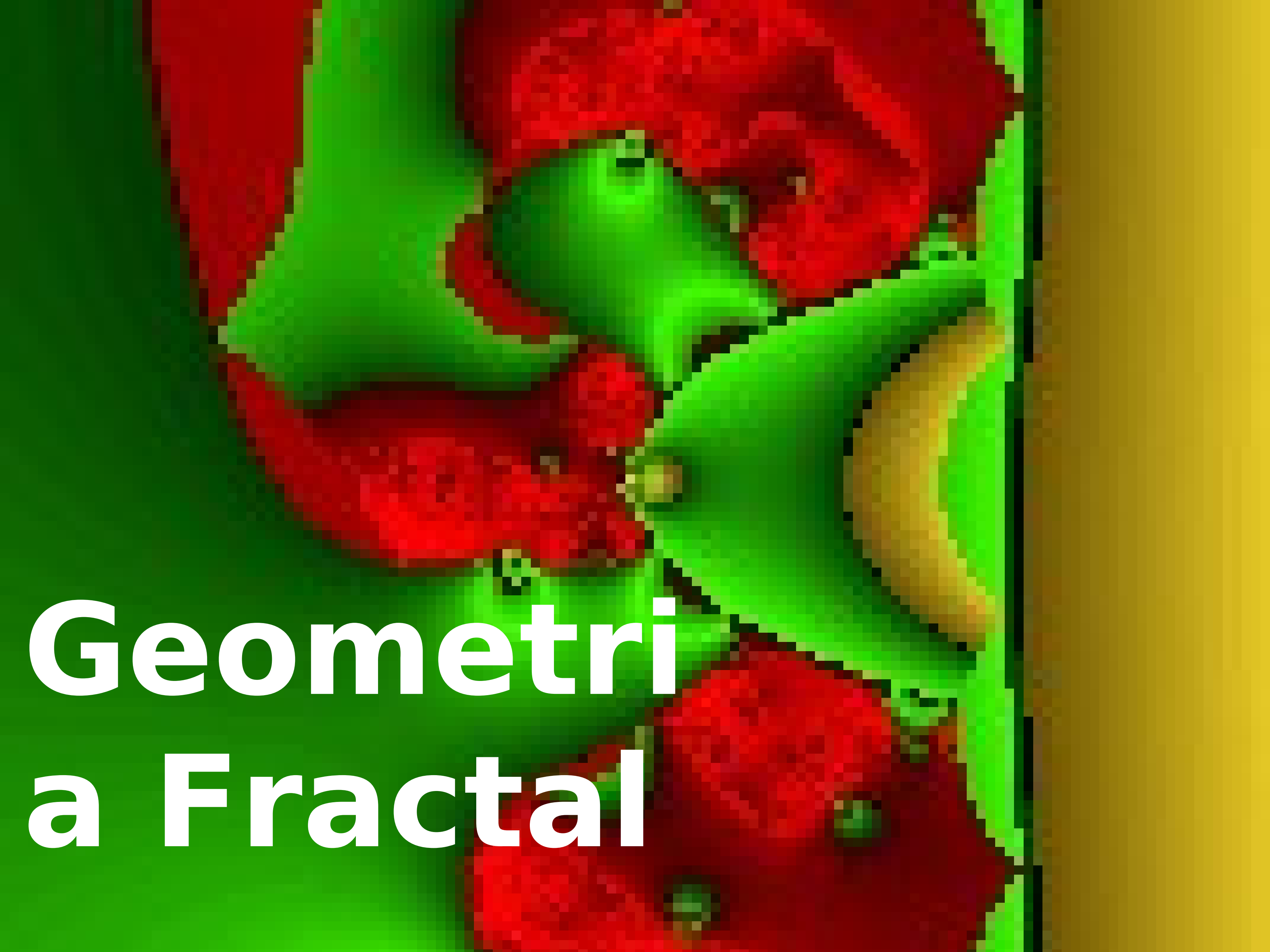
Aula Sínteste - Dimensões Fractais

Prof. José Fernando Diniz Chubaci

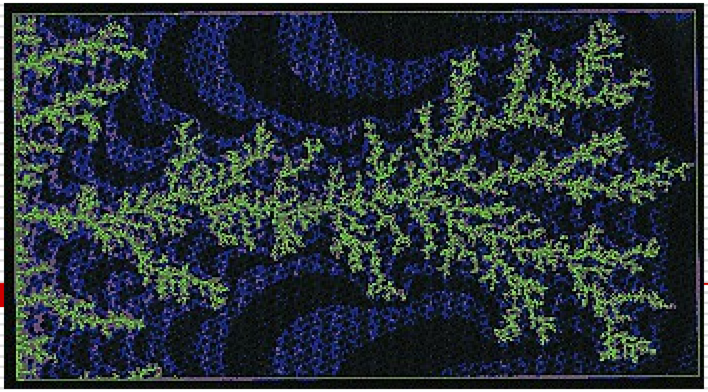
Prof. Alexandre de Lima Correia

Abril - 2010

Agradecimentos especiais ao Prof. Dr. Paulo Pascholati, Prof. Dr. Alexandre Suaide e à Profa. Dra. Marcia Rizzutto por permitirem acesso às suas notas de aulas.


Geometri
a Fractal

- *A palavra fractal é derivada do adjetivo* ***fractus*** *e significa irregular ou quebrado.*
- *A palavra fractal foi originalmente adotada por* ***Benoit Mandelbrot*** *para descrever formas geométricas com padrões complexos que se repetem infinitamente, mesmo limitados a uma área finita.*



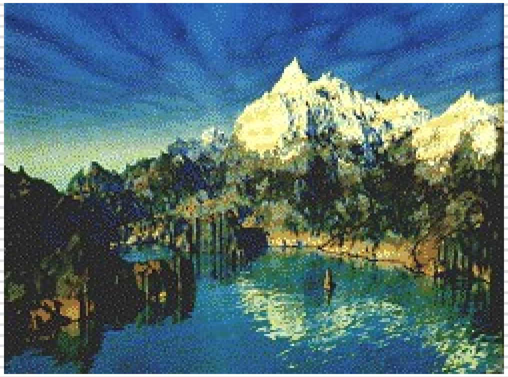
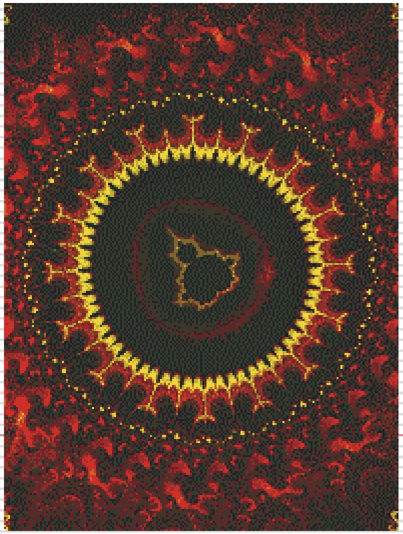
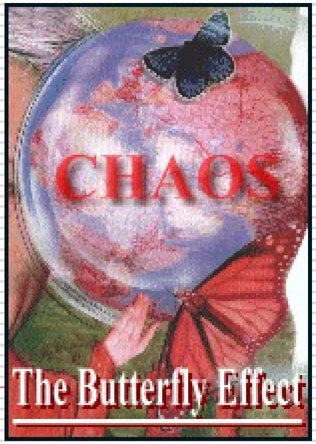
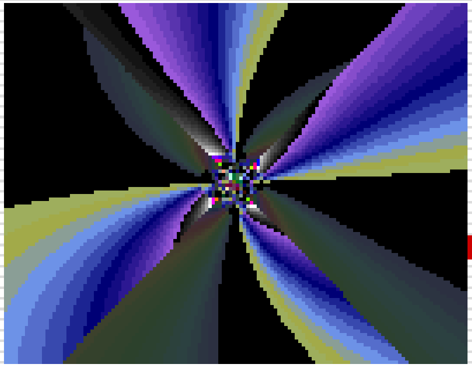


Figure 1 *Alchemy*, painted by Jackson Pollock in 1947. Drip paintings of this period are characterized by fractal dimensions close to 1.5. Reproduced by permission of ARS, NY and DACS, London, 1999.







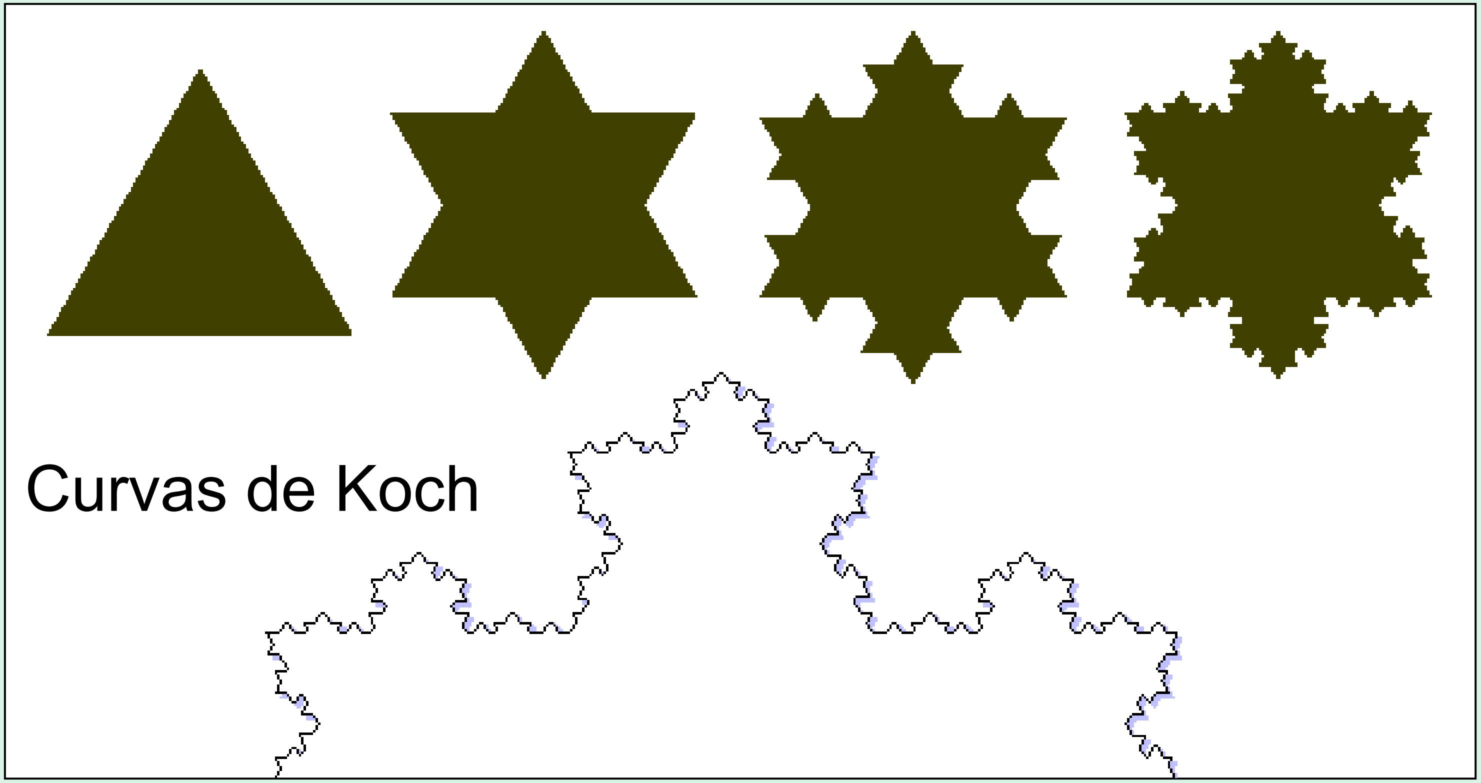
Afinal, o que é um fractal?

A palavra Fractal é derivada do adjetivo ***Fractus*** *e significa irregular ou quebrado.*

Propriedades dos Fractais

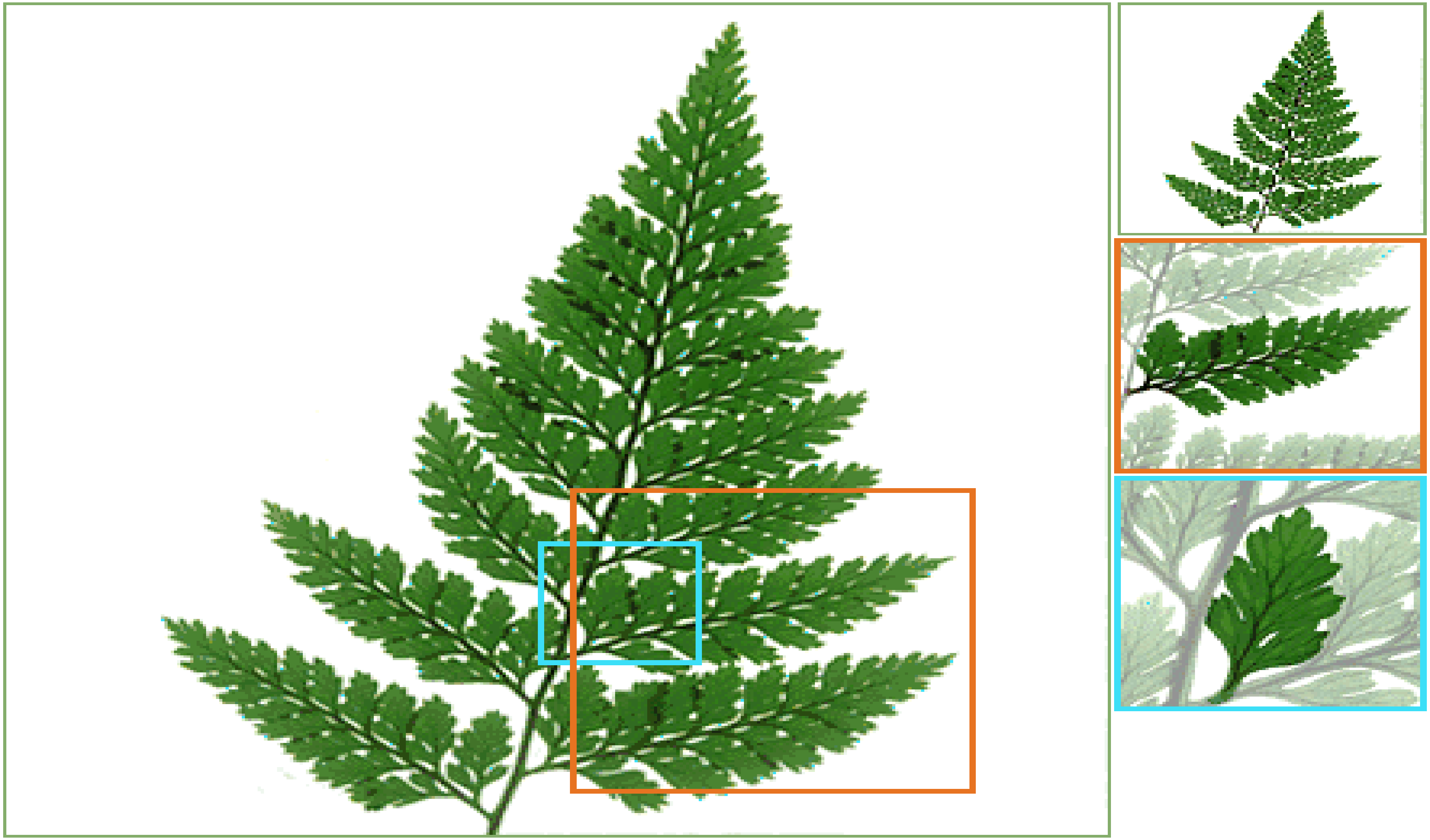
Auto-semelhança

- *É a simetria através das escalas;*
- *Um objeto possui auto-semelhança quando possui o mesmo aspecto em qualquer escala de observação.*



Propriedades dos Fractais

Auto-semelhança



Propriedades dos Fractais

Complexidade Infinita

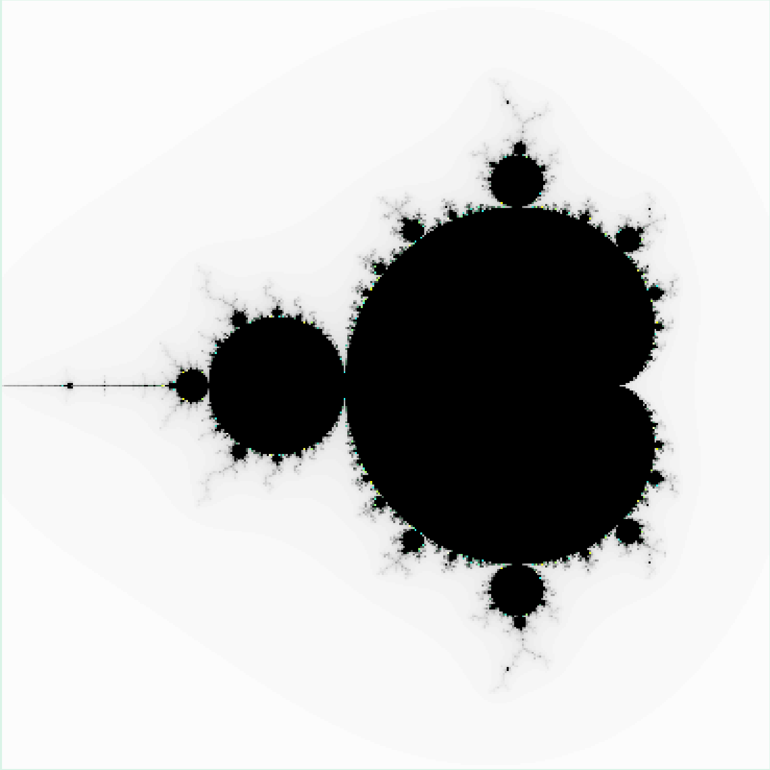
Entende-se por esta propriedade nos fractais que nunca conseguiremos representá-los completamente, restando sempre detalhes.

Inútil seria pensar que ampliações de um fractal vislumbrariam todos os seus detalhes, pois sempre existirão reentrâncias e saliências cada vez menores.

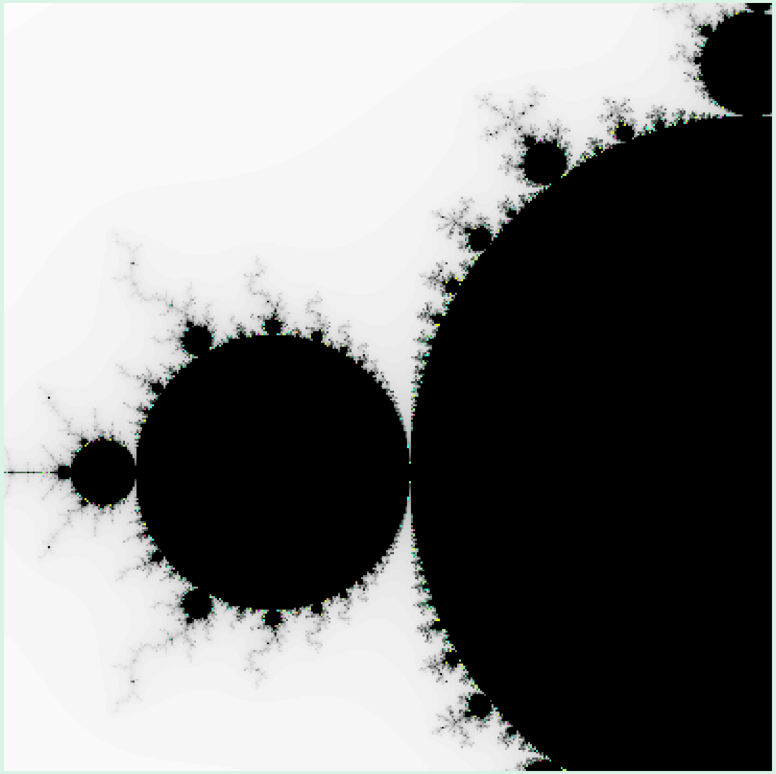
Propriedades dos Fractais

Conjunto de Mandelbrot

Figura original



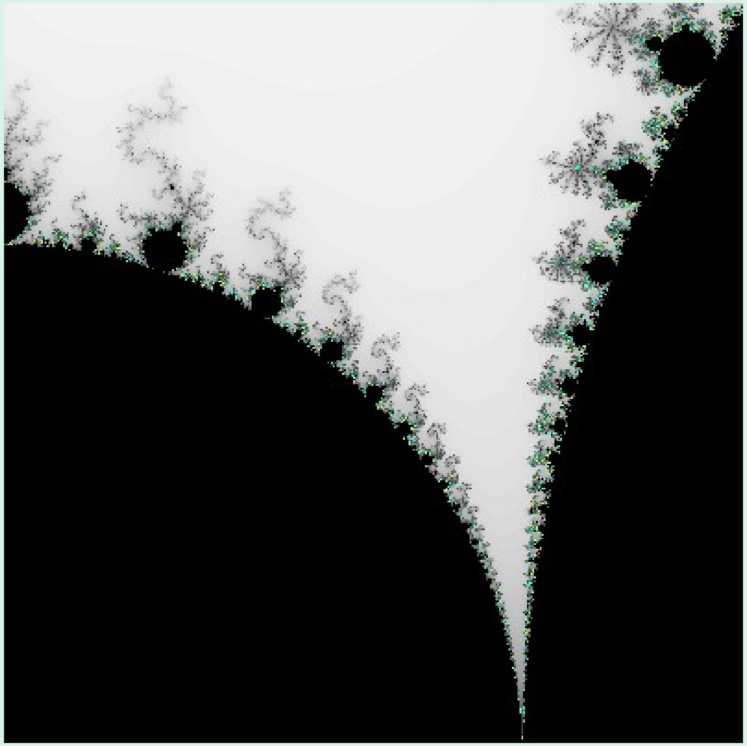
Primeira ampliação



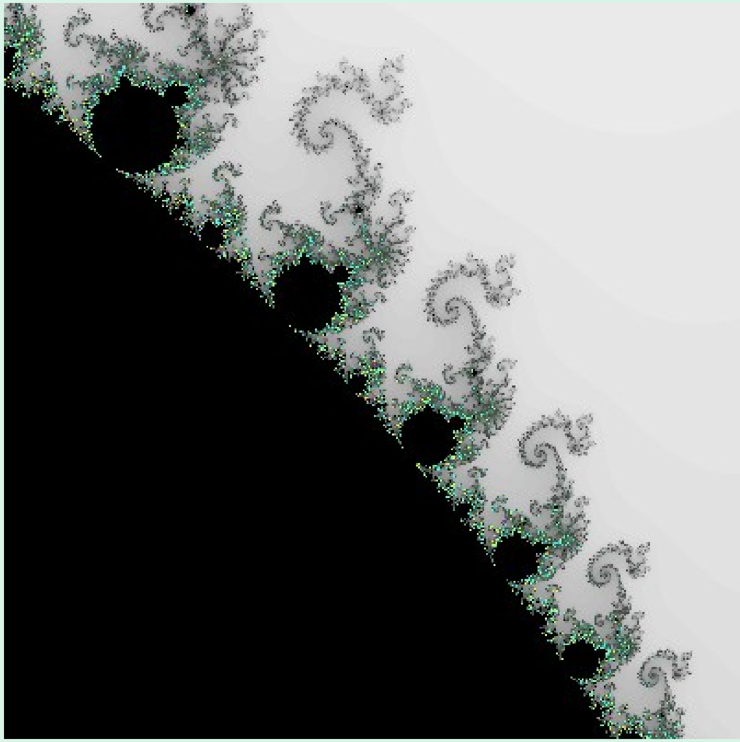
Propriedades dos Fractais

Conjunto de Mandelbrot

Segunda ampliação



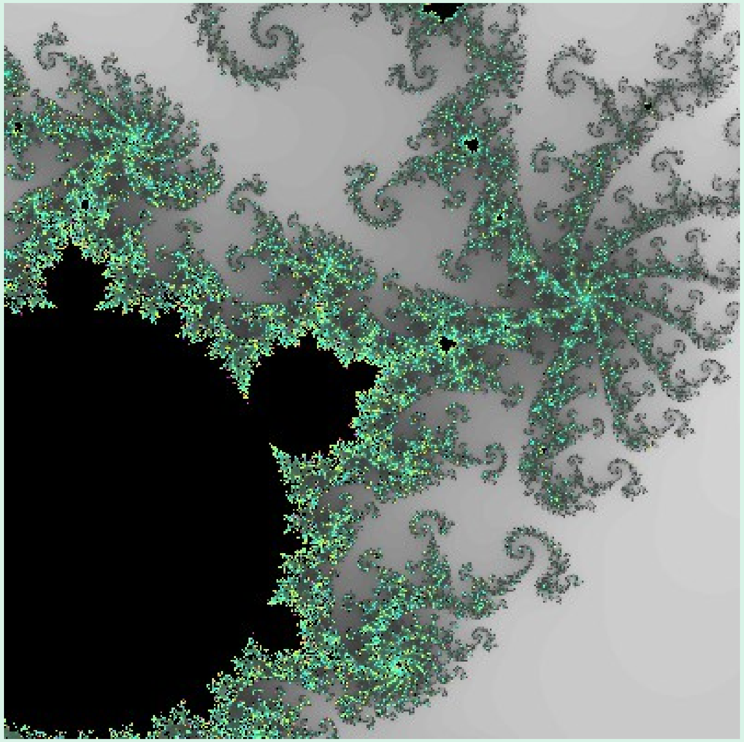
Terceira ampliação



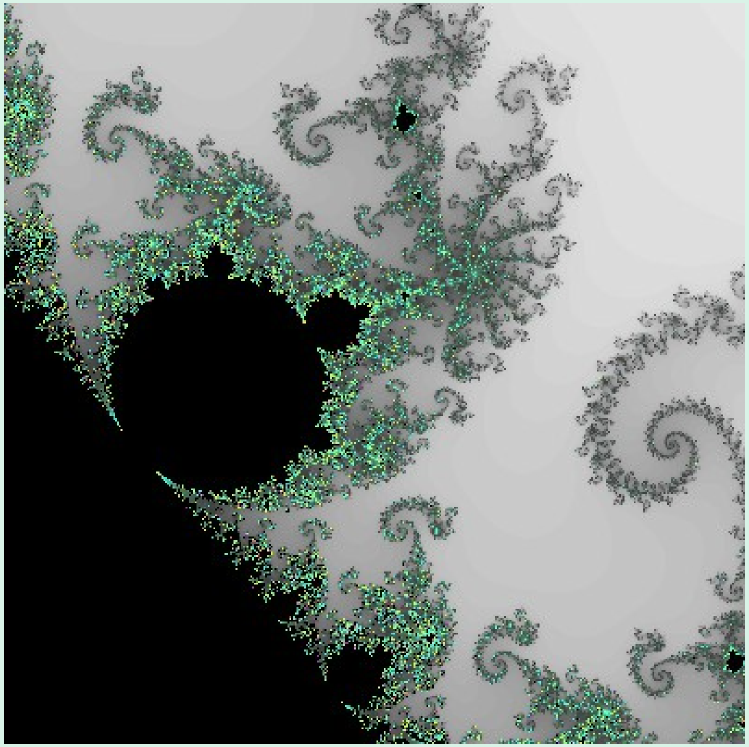
Propriedades dos Fractais

Conjunto de Mandelbrot

Quarta ampliação



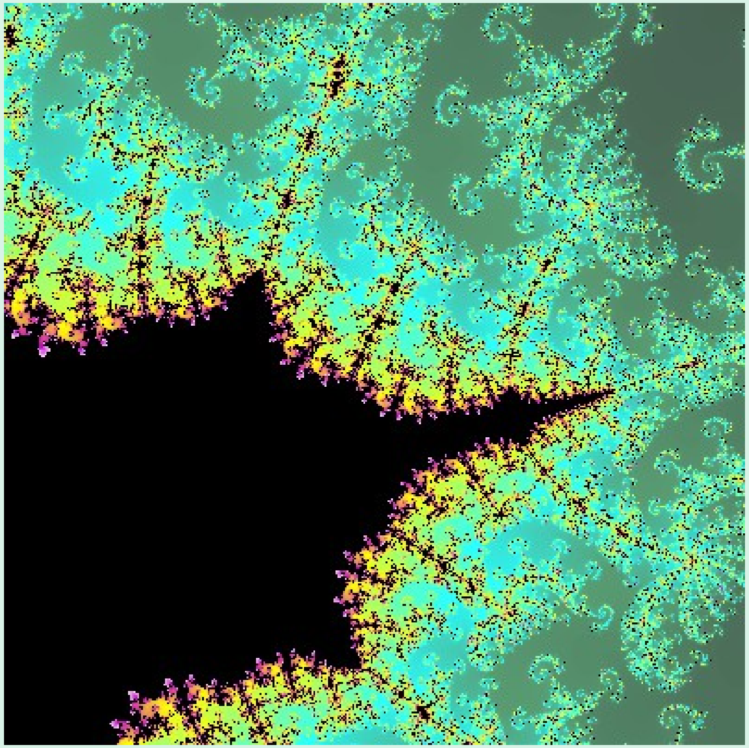
Quinta ampliação



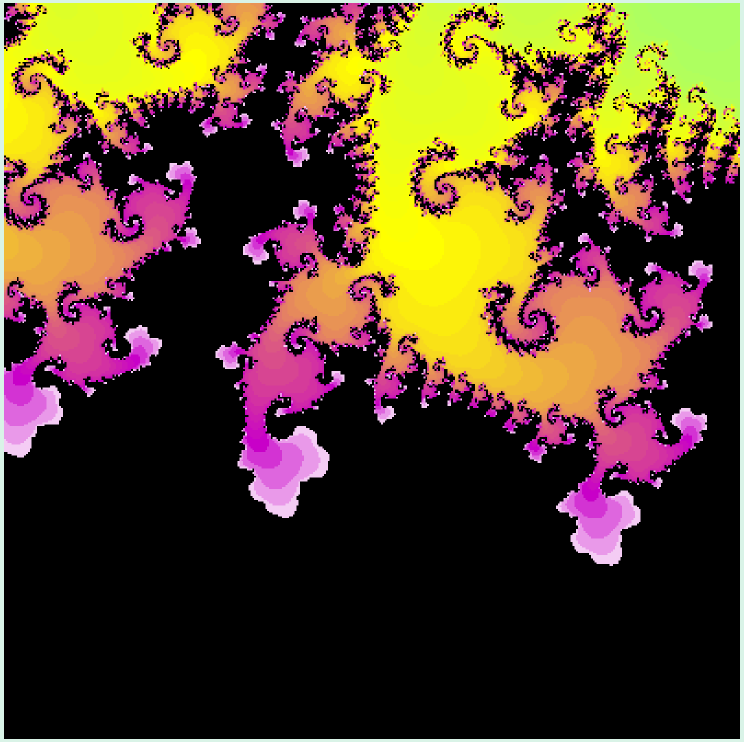
Propriedades dos Fractais

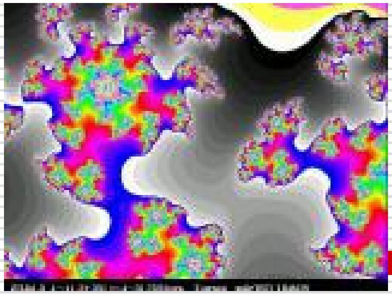
Conjunto de Mandelbrot

Oitava ampliação



Décima ampliação





Propriedades dos Fractais

A ***dimensão*** *dos fractais, ao contrário do que sucede na geometria euclidiana, não é necessariamente uma quantidade inteira.*

A dimensão de um fractal representa o grau de ocupação deste no espaço, e relaciona-se assim com o seu grau de irregularidade.

Da Geometria Euclideana

$$M = K_1 L \rightarrow tarugo$$

$$M = K_2 L^2 \rightarrow disco$$

$$M = K_3 L^3 \rightarrow esfera$$

- Portanto podemos escrever de forma genérica

$$M = K\ L^D$$

Objetivo da experiência

Pergunta à natureza: *qual a relação entre a massa e o diâmetro de uma esfera de papel amassada? Qual o valor de da dimensão (D)?*

Determinar a dimensão (D) de bolas construídas com folhas de papel amassado introduzindo as dimensões não-inteiras ou seja, as dimensões fractais.

Qual seria o valor previsto para D?

$2 < \text{Dimensão (D)} < 3$

Arranjo experimental

Divisão das folhas de papel

Objetivo da experiência

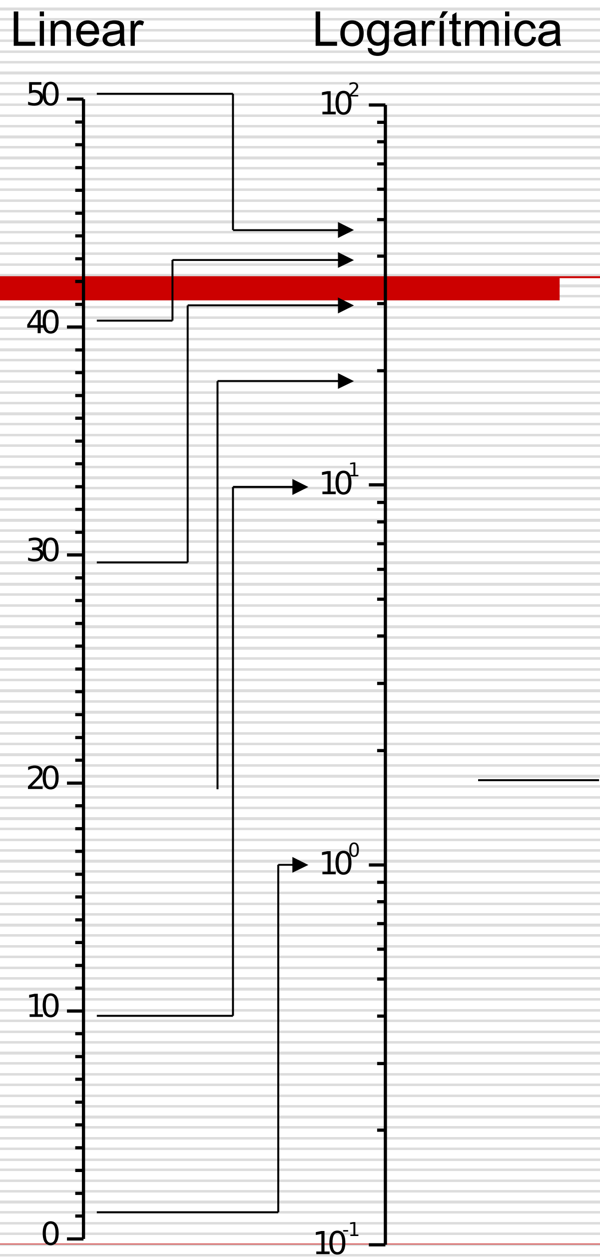
- Verificar a aplicabilidade da geometria fractal ao caso de bolas de papel amassados;

- Obter o valor da dimensão D dessas bolas;

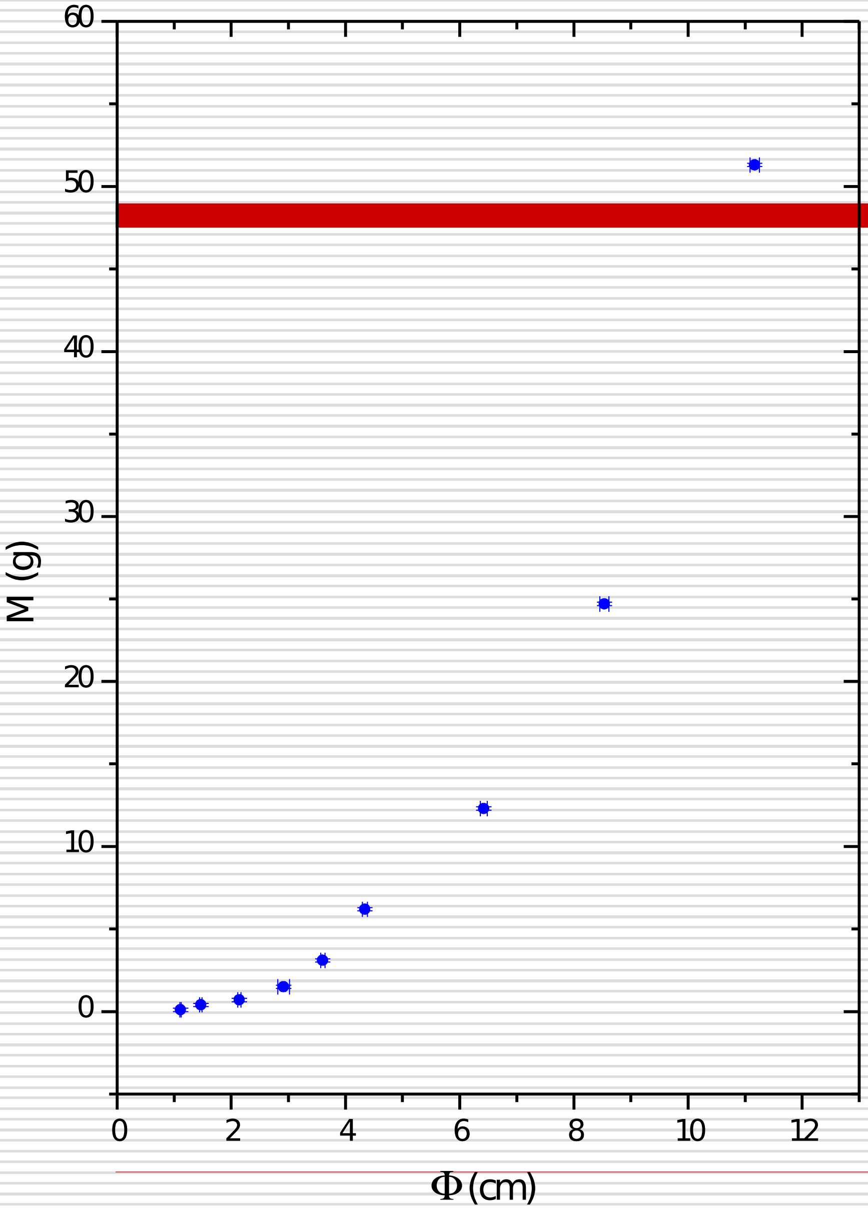
- Análise de dados:
  - Dispersão dos valores associados à grandeza
  - Gráficos – dilog

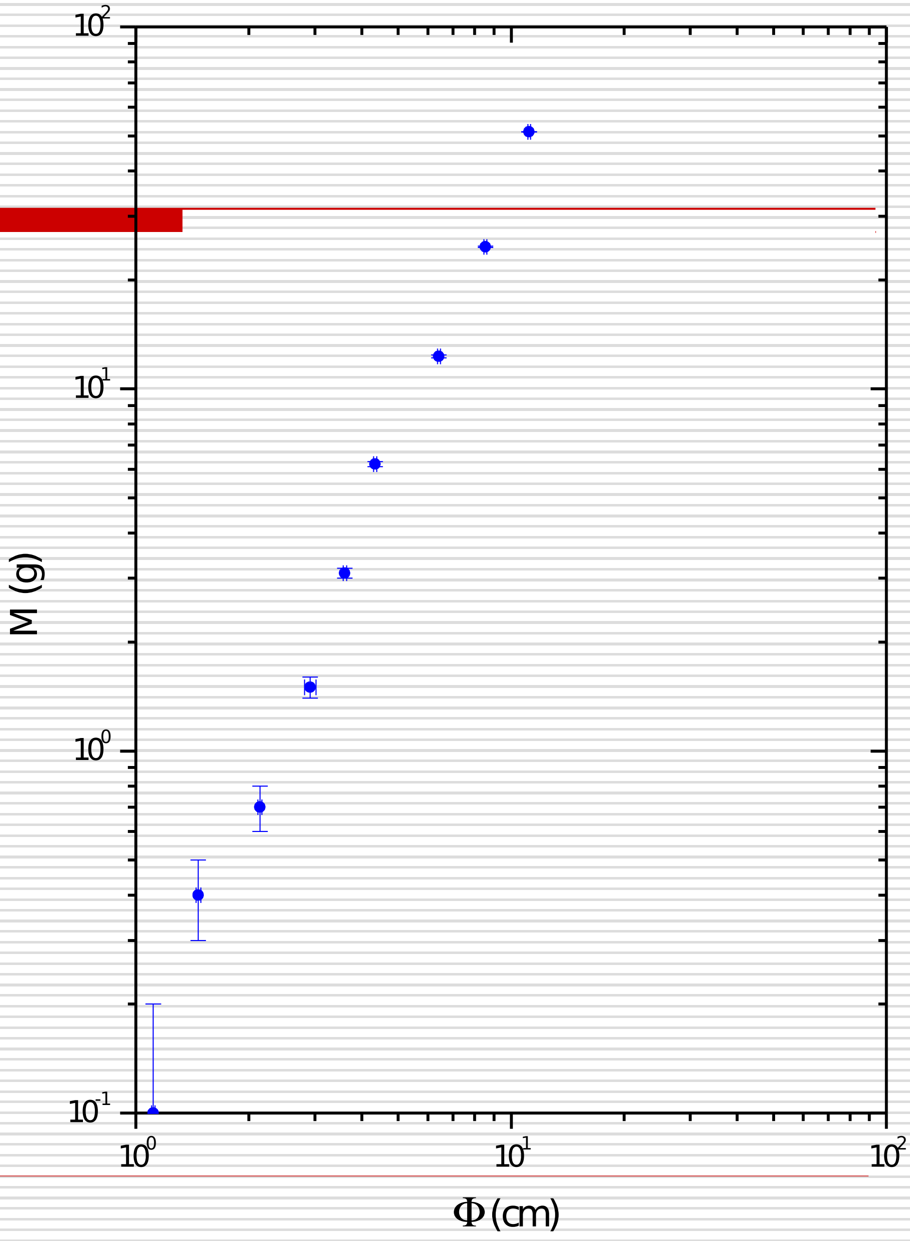
Procedimento experimental

- Amassar de modo semelhante todas as esferas;
- Medir os diâmetros (ϕ) com paquímetro;
- Calcular para os diâmetros de cada bola, a média, o desvio padrão, o desvio padrão da média e a incerteza final;
- Fazer a análise dos dados da massa e diâmetro por meio do gráfico dilog.


Linear
Logarítmica
50
40
30
20
10
0
10^2
10^1
10^0
10^-1

$$M = K\phi^{D} \longrightarrow \log(M) = \log(K) + D\log(\phi)$$





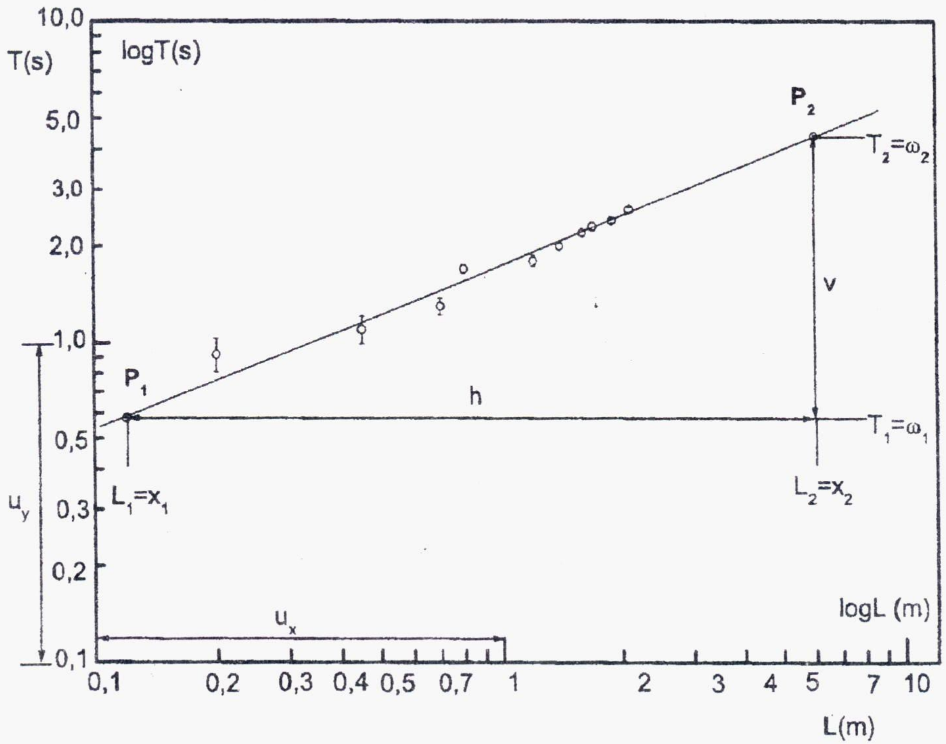


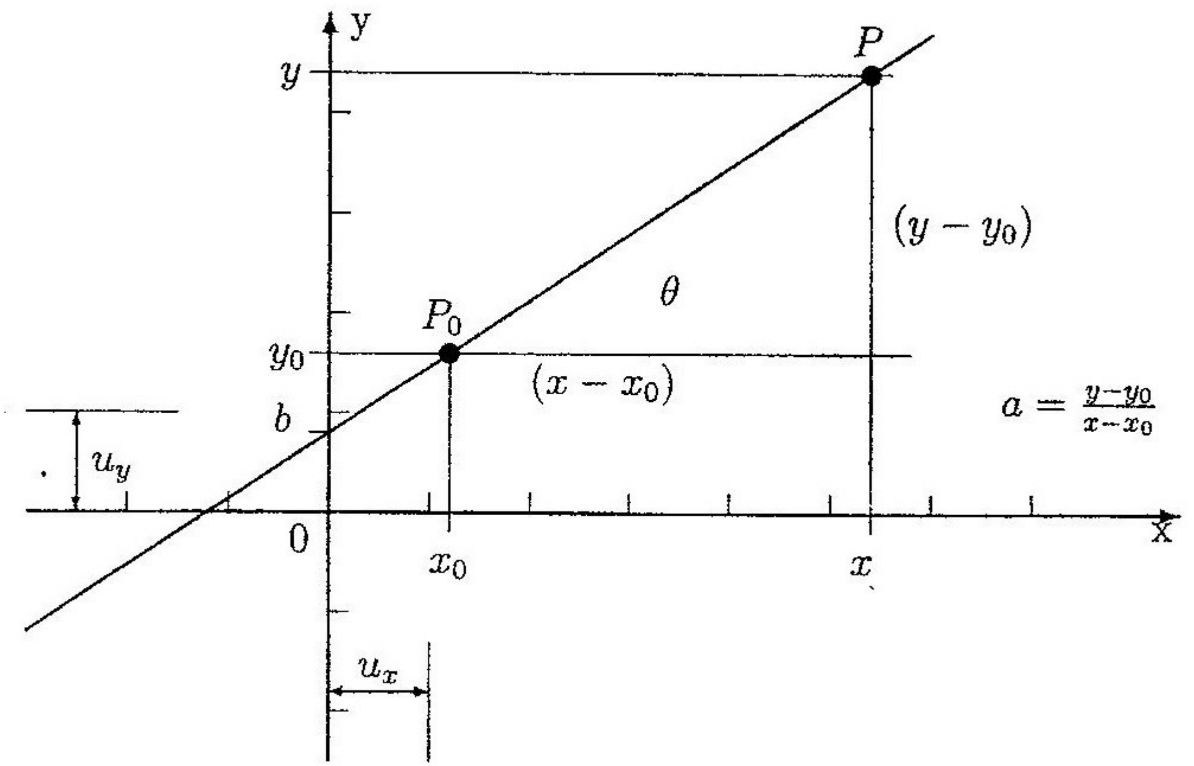
Figura III.8: Período T de um pêndulo simples em função do comprimento L em gráfico dilog

Figura III.8: *Período T de um pêndulo simples em função do comprimento L em gráfico dilog.*

$$a = \frac{\log(w_2) - \log(w_1)}{\log(x_2) - \log(x_1)}$$

$$a = \frac{\left(v/u_y \right)}{\left(h/u_x \right)}$$

Reta no plano x-y



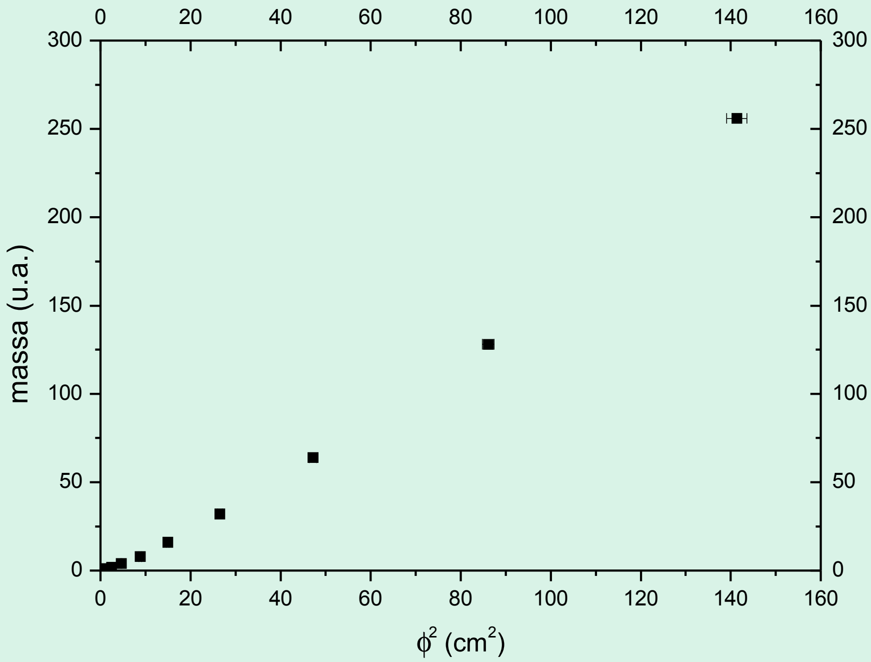
Dimensões inteiras

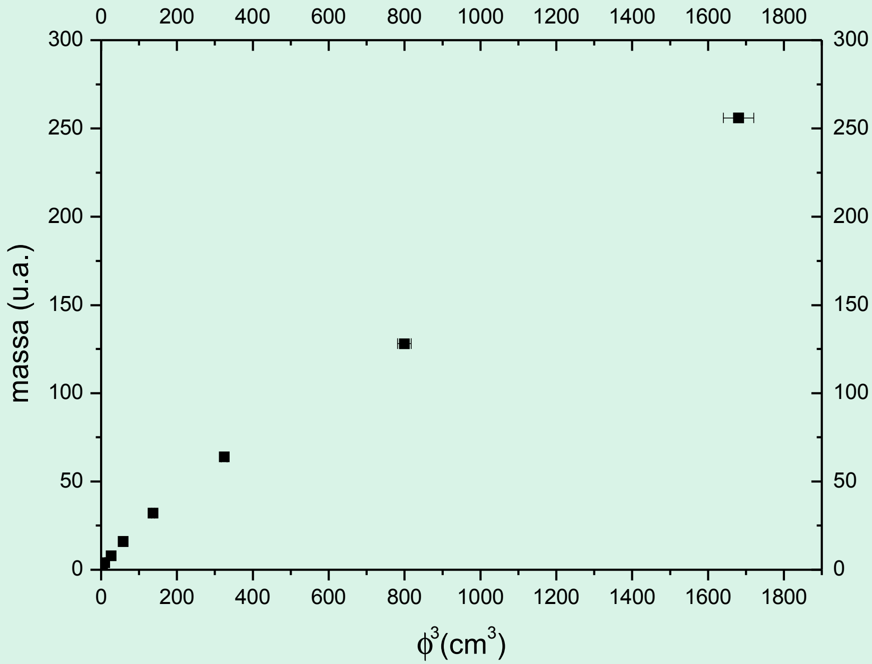
$$M = k \cdot \phi^1$$

$$M = k \cdot \phi^2 \text{ (disco)}$$

$$M = k \cdot \phi^3 \text{ (esfera)}$$

Testes





- A massa M das esferas relaciona-se com o diâmetro ϕ através da seguinte relação

$$M = k \, . \, \phi^{D}$$

- Essa relação pode ser linearizada por uma transformação logarítmica

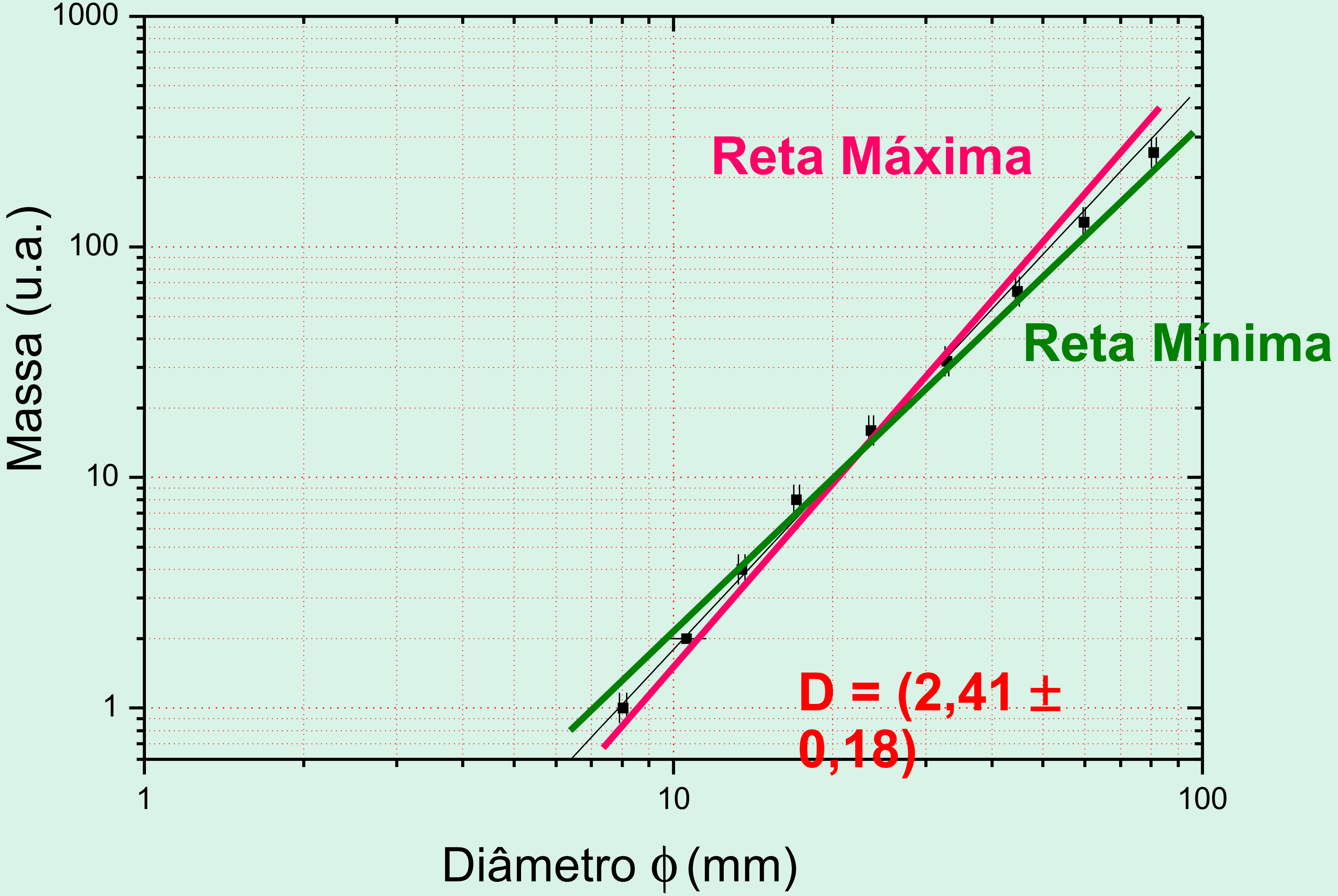
$$\log(M) = \log(k) + D \log(\phi)$$

- No papel dilog a dependência da massa com o diâmetro deve produzir uma reta

$$\log(M) = D \, . \, \log(\phi) + \log(k)$$

$$y = a \, . \, x + b$$

Gráfico: massa das esferas de papel amassadas em relação ao diâmetro.



Resultados de várias classes

D ± s_D		D ± s_D		D ± s_D		D ± s_D	
٢,٣٩	٠,٢٠	٢,٥٠	٠,٢٦	٢,٤٠	٠,١٧	٢,٣١	٠,١٩
٢,٣٦	٠,١٢	٢,١٩	٠,١٩	٢,٤٥	٠,٣٩	٢,٠٢	٠,١٨
٢,٤٤	٠,١٥	٢,٣٢	٠,١٦	٢,٥٠	٠,٢٠	٢,٣٠	٠,٣٠
٢,٥٦	٠,٠٩	٢,٤٢	٠,٢٣	٢,٦٠	٠,٧٠	٢,٣١	٠,٠٦
٢,٥٨	٠,٠٥	٢,٤٤	٠,١٦	٢,٦٠	٠,٥٠	٢,١٩	٠,٠٣
٢,٥٠	٠,١٩	٢,٥٢	٠,٤٦	٢,٦٠	٠,٥٠	٢,٥٥	٠,١٣
٢,٧٠	٠,١٥	٢,٣٤	٠,٠٥	٢,٤٠	٠,٦٠	٢,٢٨	٠,٠٥
٢,٥٢	٠,١٤	٢,٥٨	٠,٠٦	٢,٥٢	٠,٢٥	٢,٩٨	٠,٢٣
٢,٢٨	٠,٢٧	٢,٦١	٠,١٠	٢,٥٢	٠,١٦	٣,٠٥	٠,٣٦
٢,٢٠	٠,٢٧	٢,٤٦	٠,١٩	٢,٥٨	٠,٠٩	٢,٤٣	٠,٠٥
٢,٢٧	٠,٠٣	٢,٥٢	٠,٣٧	٢,٤٠	٠,٨٠	٢,٤٤	٠,٠٦
٢,٣٣	٠,٢٢	٢,٢٩	٠,٢٥	٢,٣٠	٠,٦٠		
٢,٣٦	٠,٠٦	٢,٣٧	٠,٠٣	٢,٣٣	٠,٢٧		
٢,٣٤	٠,٠٩	٢,٣٢	٠,٠٣	٢,٣٦	٠,١٠		
٢,٢٦	٠,٢٨	٢,٥٤	٠,١١	٢,٣٢	٠,٠٦		
٢,٣١	٠,١٢	٢,١٧	٠,٠٧	٢,٢٦	٠,١٥		
٢,٥٦	٠,٣٨	٢,٢٥	٠,١٤	٢,٥٦	٠,١٣		
٢,٦٠	٠,٠٧	٢,٣٢	٠,٠٤	٢,٤٠	٠,٢٢		
٢,٣٤	٠,٤٥	٢,٣٢	٠,٠٤	٢,٥٦	٠,١٦		
٢,٢٩	٠,٠٧	٢,٣٢	٠,٠٦	٢,٥٩	٠,١٦		
٢,٣٩	٠,١٨	٢,٣٣	٠,٥٢	٢,٧٣	٠,١٩		

Análise dos dados

Para facilitar a análise dos resultados utilizaremos o método gráfico

Gráfico: Resultados da Dimensão Fractal (D)

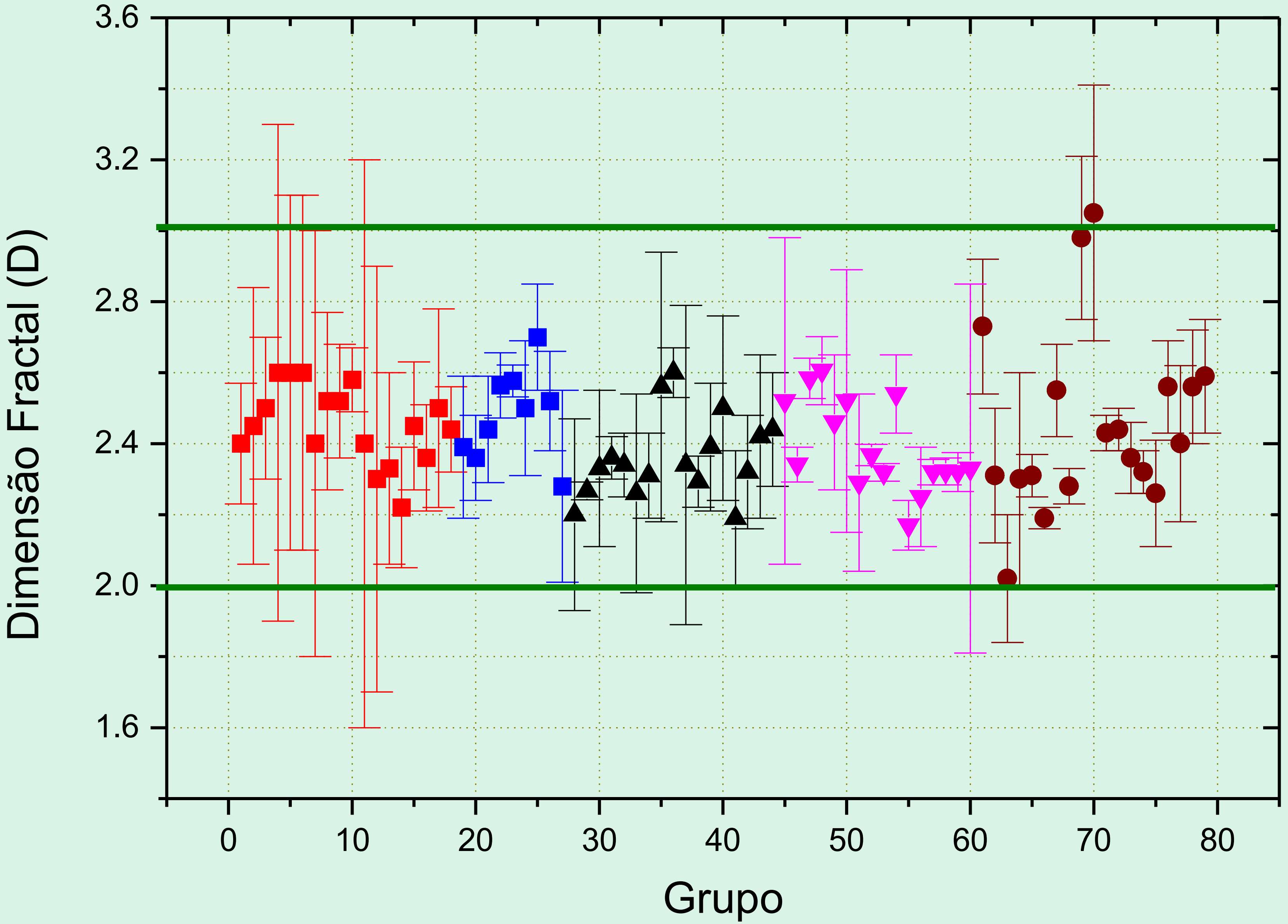
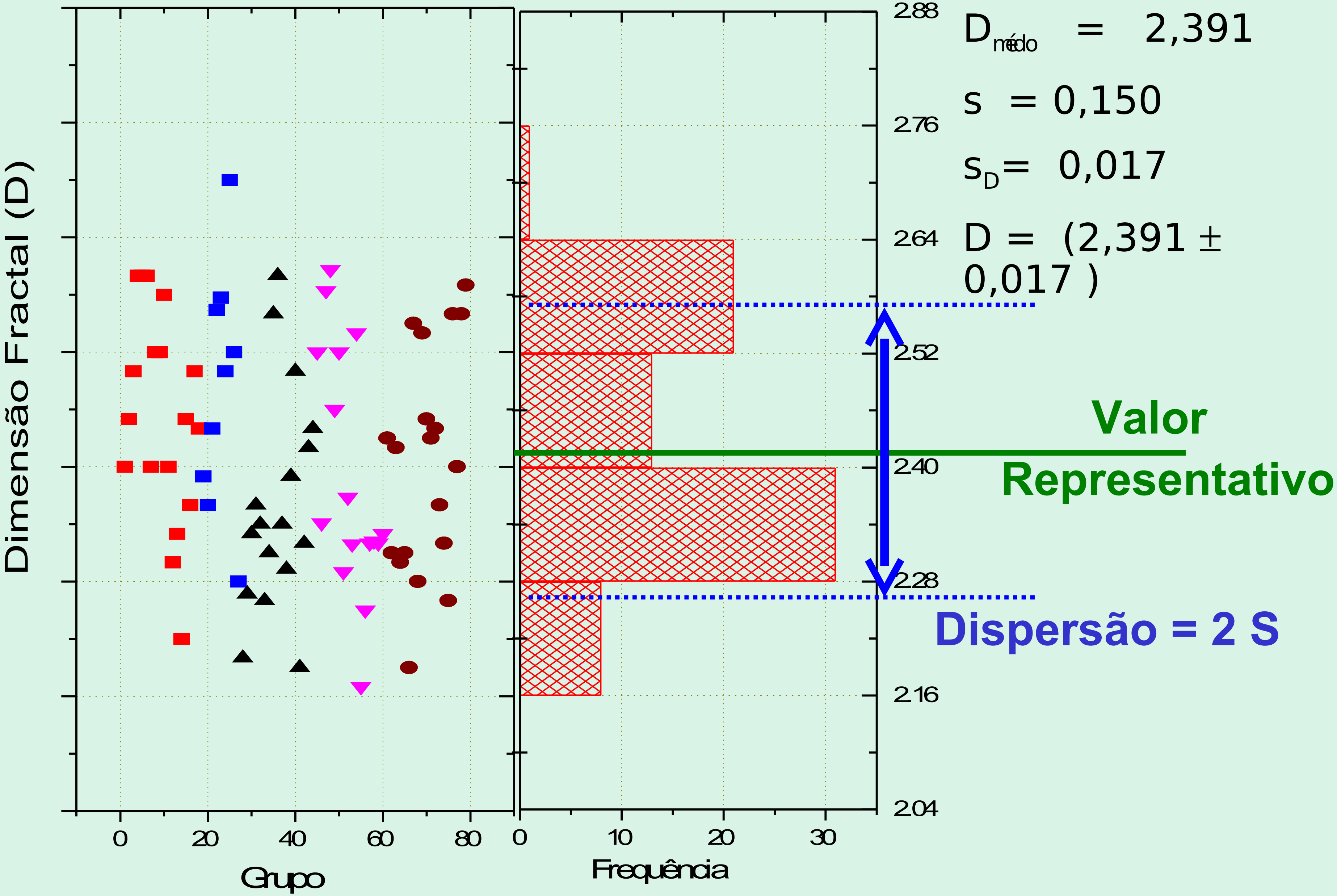


Gráfico: Dimensão Fractal e Histograma



$D_{médio} = 2,391$

$s = 0,150$

$s_D = 0,017$

$D = (2,391 \pm 0,017)$

Compatibilidade

- A distância entre D e 2, em unidades de incerteza, é

$$Z = \frac{D - 2}{\sigma_{f_D}} = 23$$

- A distância entre D e 3, em unidades de incerteza, é

$$Z = \frac{D - 3}{\sigma_{f_D}} = -36$$

Portanto:

- As rugosidades aumentam com ϕ, mas a rugosidade relativa cai.

- D é **incompatível** com 2 e com 3.

- D **não** pode ser 2 nem 3.

Gráfico: Diâmetro das bolas de papel amassados em em relação a sua respectiva Massa

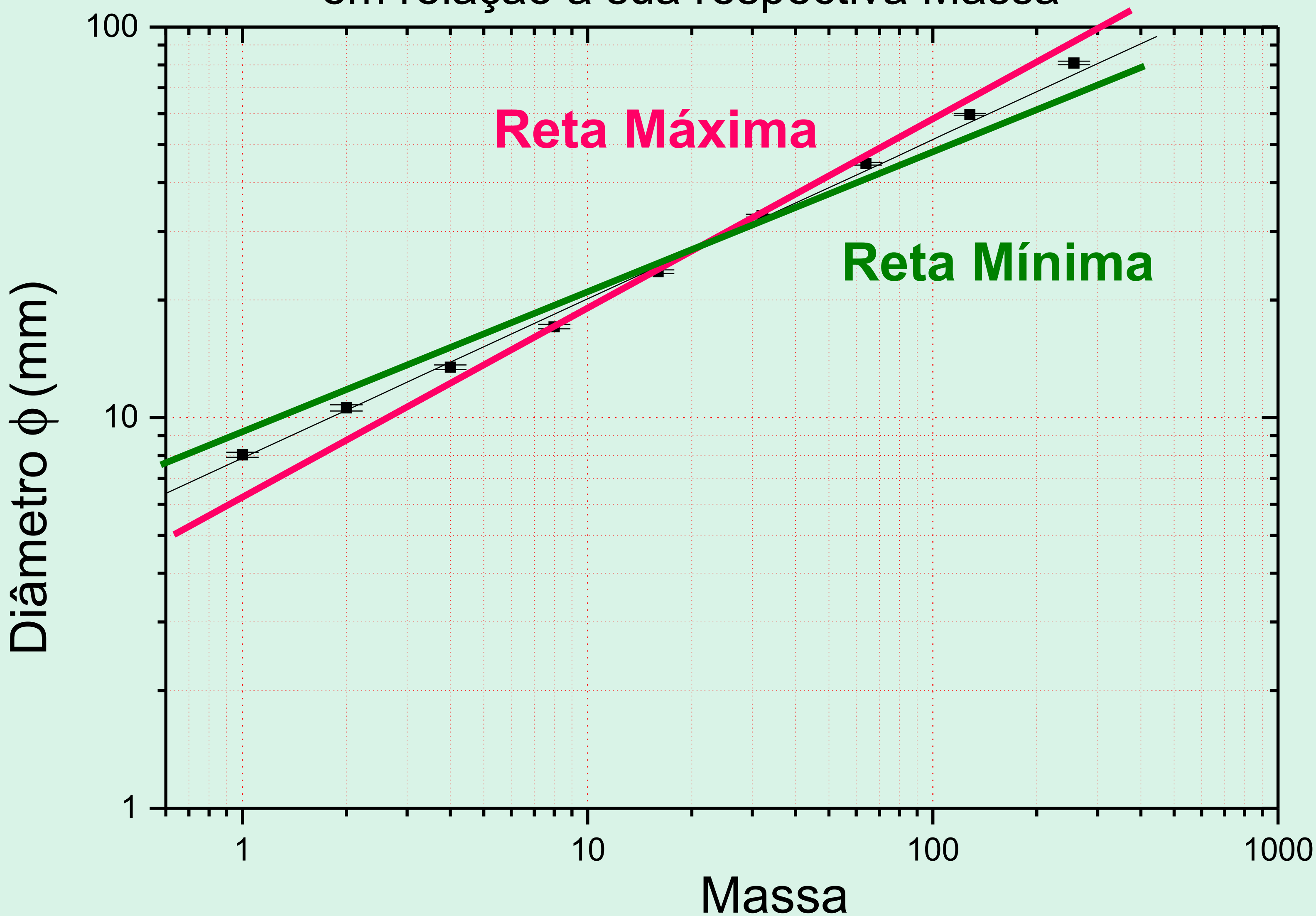
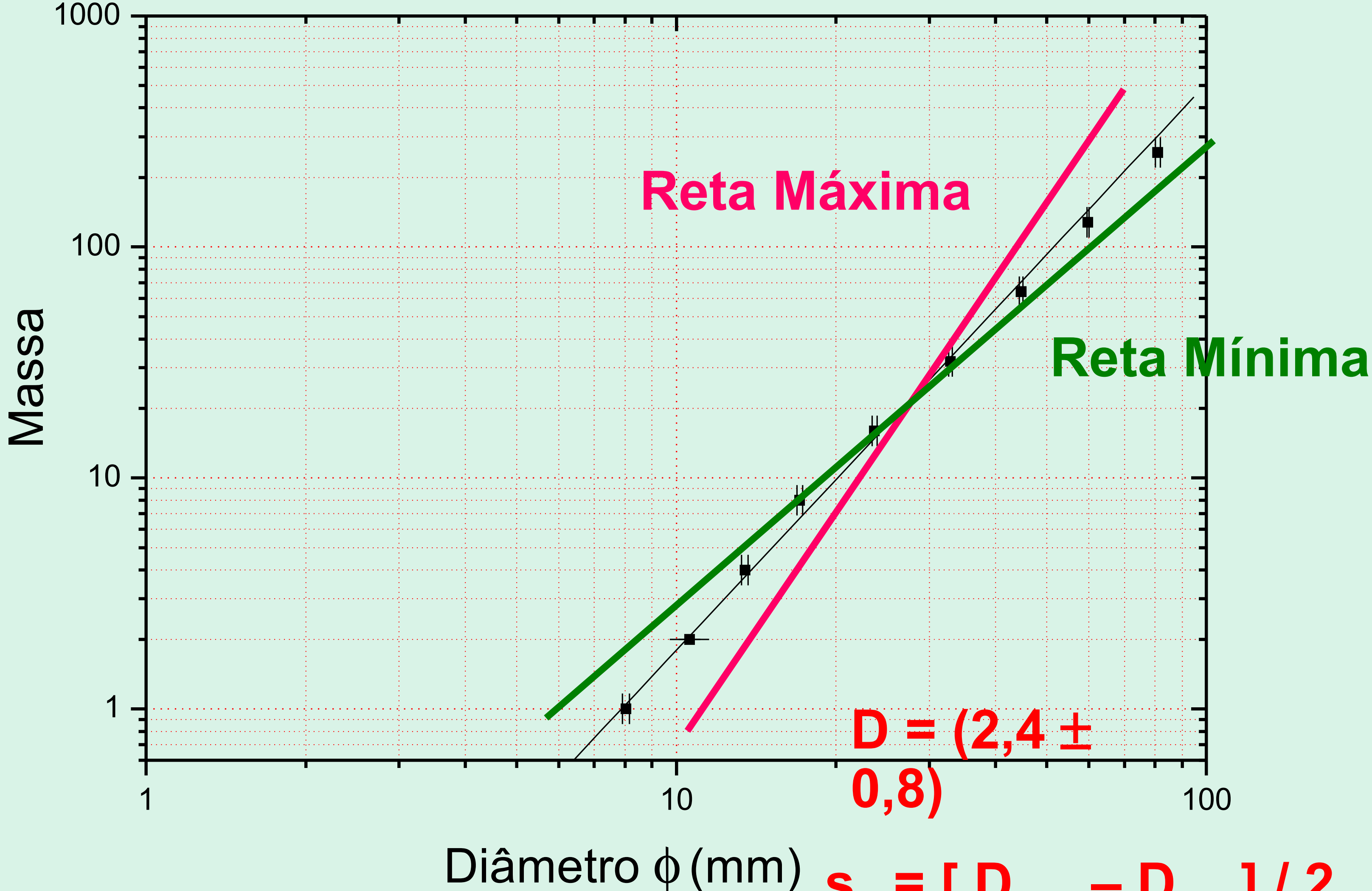


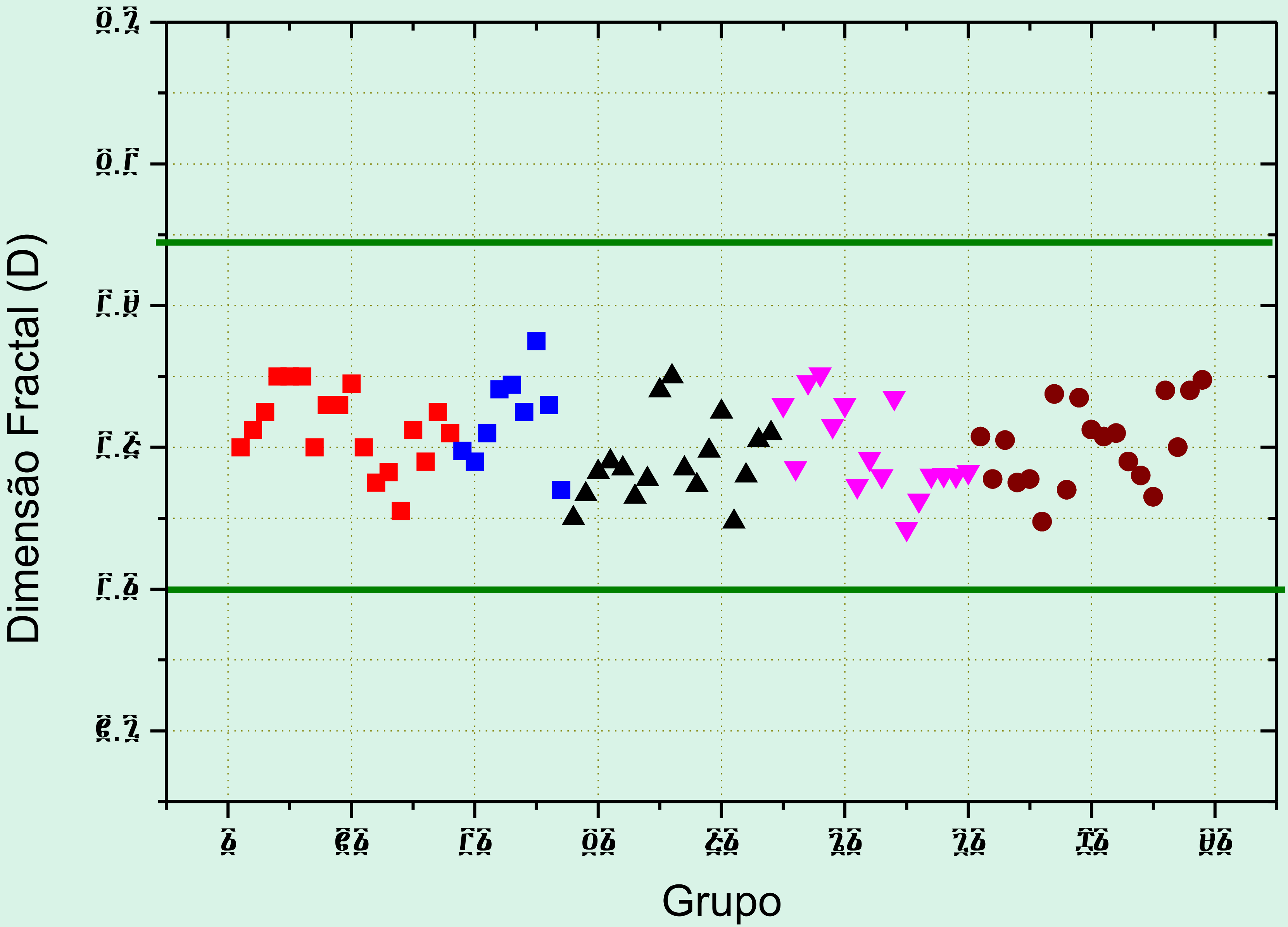
Gráfico: massa das esferas de papel amassadas em relação ao diâmetro.



D = (2,4 ± 0,8)

$s_D = [\, D_{max} - D_{min} \,] / 2$

Gráfico: Resultados da Dimensão Fractal (D)



Comparando resultados

Nossos resultados

$D_{\text{médio}} = 2,39$

$S_D = 0,15$

M.A.F. Gomes
(Am. J.Phys, **55** (7), 1987)

$D_{\text{médio}} = 2,51$

$S_D = 0,19$

Resultados Compatíveis

Geometria Fractal

“ Nuvens não são esferas, montanhas não são cones, continentes não são círculos, um latido não é contínuo e nem o raio viaja em linha reta.”

Benoit Mandelbrot