

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE FÍSICA

# Física Experimental 1

Bacharelado em Física, Geofísica e Meteorologia

Paulo R. Pascholati

Organizador

2 011

NOME : \_\_\_\_\_

# Conteúdo

<b>I</b>	<b>Física Experimental 1</b>	<b>1</b>
I.1	Proposta Didática . . . . .	1
I.2	Medições e seu Papel na Física . . . . .	2
I.3	Objetivos da Disciplina . . . . .	3
I.4	Avaliação de Desempenho e Critérios . . . . .	5
I.4.1	Folha de Dados . . . . .	5
I.4.2	Pré-Sínteses . . . . .	6
I.4.3	Sínteses . . . . .	7
I.4.4	Relatórios . . . . .	7
I.4.5	Questões/Reflexões . . . . .	8
I.4.6	Prova . . . . .	8
I.4.7	Entrevista . . . . .	8
I.4.8	Frequência . . . . .	8
I.4.9	Critério de Aprovação . . . . .	9
I.5	Tempo Dedicado à Disciplina . . . . .	9
I.6	Outras Observações Gerais . . . . .	10
I.6.1	Requisitos para a Disciplina . . . . .	10
I.6.2	Caderno de Laboratório . . . . .	10
I.6.3	Material Necessário . . . . .	10
I.6.4	Segurança Pessoal . . . . .	10
I.6.5	Plantão de Dúvidas . . . . .	11
I.6.6	Referências . . . . .	11
I.6.7	Informática . . . . .	11
<b>II</b>	<b>Corpo Docente, Colaboradores ...</b>	<b>13</b>
II.1	Professores e Responsáveis por Turma . . . . .	13
II.2	Estagiários e Monitores . . . . .	13
II.3	Técnicos do Laboratório Didático . . . . .	14

II.4	Apoio de Audio Visual . . . . .	14
II.5	Gráfica . . . . .	14
<b>III Cronograma</b>		<b>15</b>
<b>1</b>	<b>Introdução às Medições</b>	<b>20</b>
1.1	Objetivos . . . . .	20
1.2	Introdução . . . . .	20
1.3	Medições de Tempo . . . . .	21
1.3.1	Procedimento Experimental . . . . .	21
1.3.2	Análise dos Dados . . . . .	22
1.3.3	Pré-Síntese . . . . .	22
1.4	Medições de Comprimento . . . . .	23
1.4.1	Procedimento Experimental . . . . .	23
1.4.2	Análise dos Dados . . . . .	23
1.4.3	Discussão dos Resultados . . . . .	23
1.5	Síntese . . . . .	24
1.6	Reflexão . . . . .	24
<b>2</b>	<b>Dimensões Euclidianas</b>	<b>25</b>
2.1	Introdução . . . . .	25
2.2	Estimativas das Incertezas nas Medidas . . . . .	27
2.3	Análise dos Dados . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Geometria fractal</b>	<b>28</b>
3.1	Introdução . . . . .	28
3.2	Dimensões Fractais . . . . .	28
3.3	Análise dos Dados . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Caracterização de Sólidos</b>	<b>31</b>
4.1	Objetivos . . . . .	31
4.2	Introdução . . . . .	31
<b>5</b>	<b>Pêndulo Simples</b>	<b>33</b>
5.1	Objetivos . . . . .	33
5.2	Introdução . . . . .	33
5.3	Pequenas Oscilações de um Pêndulo . . . . .	33
5.4	Situação Experimental . . . . .	35
5.5	Questões . . . . .	35

<b>6</b>	<b>Oscilações</b>	<b>37</b>
6.1	Introdução . . . . .	37
6.1.1	Motivação . . . . .	37
6.1.2	Ressonâncias em Cordas Vibrantes com Extremos Fixos	37
6.1.3	Objetivo . . . . .	39
6.2	Procedimento Experimental . . . . .	39
6.2.1	Descrição do aparato . . . . .	39
6.2.2	Explorando o Experimento . . . . .	40
6.2.3	Realizando as Medidas . . . . .	41
6.3	Análise de Dados (Pré-síntese) . . . . .	41
6.4	Discussão (Síntese) . . . . .	41
<b>A</b>	<b>Histograma</b>	<b>42</b>
A.1	Exemplo 1 . . . . .	43
A.2	Exemplo 2 . . . . .	44
<b>B</b>	<b>Tabelas e Gráficos</b>	<b>46</b>
B.1	Tabelas . . . . .	46
B.2	Gráficos . . . . .	48
B.3	Equação da Reta num Plano . . . . .	51
B.4	Escala Logarítmica . . . . .	52
B.5	Gráfico Monolog . . . . .	53
B.6	Gráfico Dialog . . . . .	55
<b>C</b>	<b>Tratamento de Dados -</b>	
	<b>Introdução</b>	<b>57</b>
C.1	Valor Médio . . . . .	57
C.2	Variância Amostral . . . . .	57
C.3	Incerteza Instrumental . . . . .	59
C.4	Compatibilidade Entre Dados . . . . .	60
C.5	Média Ponderada . . . . .	60
C.6	Propagação de Incertezas - Caso Particular . . . . .	61
<b>D</b>	<b>Distribuição Gaussiana</b>	<b>66</b>
<b>E</b>	<b>Fenômenos Oscilatórios</b>	<b>70</b>
<b>F</b>	<b>Dimensões Fractais</b>	<b>72</b>

<b>G</b>	<b>Relatórios</b>	<b>76</b>
G.1	Objetivos do Relatório na Disciplina . . . . .	76
G.2	Organização do Relatório . . . . .	77
G.2.1	Resumo . . . . .	78
G.2.2	Introdução . . . . .	78
G.2.3	Descrição Experimental . . . . .	79
G.2.4	Resultados de Medições, Cálculos e Análise de Dados	79
G.2.5	Discussão Final e Conclusões . . . . .	80
G.2.6	Referências Bibliográficas . . . . .	80
G.2.7	Apêndices . . . . .	81
G.3	Regras Gerais para o Relatório . . . . .	82
G.4	Critério de Correção e Nota . . . . .	82
<b>H</b>	<b>Alfabeto grego</b>	<b>84</b>

# Prefácio

## 2011

A apostila de 2011 apresenta uma diferença em relação àquela de 2010. Ela refere-se a substituição da experiência Método dos Mínimos Quadrados pela atividade Oscilações de Cordas Vibrantes. Esta atividade foi elaborada por Cristiane Jahnke, Tatiane Sudbrack e Stefano Ivo Finazzo, então estagiários do Programa PAE da disciplina de Física Experimental 2 - 4300114 no ano de 2010.

Fevereiro de 2011  
Paulo Pascholati



# Capítulo I

## Física Experimental 1

*Os objetivos gerais da disciplina Física Experimental 1, os critérios de avaliação e outras informações gerais são reunidas aqui. É responsabilidade do aluno ler com atenção esta apresentação, procurando esclarecer quaisquer dúvidas com o professor. Não é aceitável alegação de desconhecimento dos critérios e informações aqui apresentadas.*

### I.1 Proposta Didática

A disciplina de Física Experimental 1 tem por proposta didática a introdução do aluno na *arte da experimentação*. Tal introdução é realizada de forma gradual por meio de um programa de experimentos, com uma sequência articulada de conteúdos, em que são exercitadas as habilidades e conhecimentos adquiridos. Em particular, tem-se o intuito de alertar o aluno para alguns cuidados indispensáveis na tomada de dados. De fato, é possível, por meio de uma análise de dados inadequada, deixar de explorar informações importantes contidas nos dados experimentais brutos (primários); por outro lado, não há sofisticação na análise de dados que resolva o problema de dados mal tomados, ou seja, não é possível resgatar, pela manipulação dos dados, informações não registradas ou registradas de forma inadequada durante as medições. Nessa proposta a disciplina Física Experimental 1 visa proporcionar ao aluno o instrumental teórico e prático para analisar de forma adequada os dados colhidos e torná-lo consciente da necessidade de manter uma atitude atenta e crítica durante o processo de obtenção dos dados, treinando-o para a observação científica. Por outro lado, a informação assim obtida precisa

ser comunicada de modo adequado para ser reconhecida pela comunidade de interesse, passando, então, a estar disponível como acréscimo de conhecimento. Neste contexto, é objetivo também desta atividade iniciar o aluno nos fundamentos da correta comunicação científica.

## I.2 Medições e seu Papel na Física

Medir significa quantificar uma grandeza com relação a algum padrão (medida), tomado como unidade. Os padrões recomendados são do Sistema Internacional de Unidades (SI)[1, 2]. O SI é baseado atualmente nas sete unidades de base, veja Tabela I.2. No entanto, ainda encontram-se em uso outros sistema mais antigos como, por exemplo, o CGS (centímetro, grama e segundo).

Tabela I.1: Sistema Internacional de Unidades - SI.

Grandeza	Unidade SI	
	Nome	Símbolo
Comprimento	metro	m
Massa	quilograma	kg
Tempo	segundo	s
Corrente Elétrica	ampére	A
Temperatura Termodinâmica	kelvin	K
Quantidade de Matéria	mol	mol
Intensidade Luminosa	candela	cd

O processo de medir apoia-se em instrumentos de medição calibrados segundo o padrão escolhido; em muitas situações, entretanto, a execução da medição não é automatizada e o observador é uma parte essencial do processo, contribuindo para a sua limitação. Este é o caso, em particular, desta atividade experimental, assim como de várias outras a serem executadas durante o semestre. No entanto, mesmo o instrumento mais moderno e sensível tem um limite de confiabilidade; saber avaliar este limite e incluir esta informação no resultado é uma das tarefas do treino a ser aqui iniciado.

Executar um experimento consiste em propor e aplicar um *procedimento experimental*, que inclui a escolha e manipulação dos instrumentos necessários

para a realização das medições de todas as grandezas relevantes frente aos objetivos propostos. Normalmente, são feitas algumas *medições exploratórias* em um experimento *preliminar*, onde as características do fenômeno a ser estudado são observadas atentamente. Em geral, como consequência da análise destes dados preliminares, de discussões com colegas e reflexões sobre a situação experimental, surgem propostas de procedimento que melhoram consideravelmente a qualidade dos dados.

Finalmente, estes dados devem ser analisados segundo procedimentos estatísticos universalmente aceitos na comunidade científica, os quais são também introduzidos, de forma gradual, na disciplina Física Experimental 1. De fato, assim como a humanidade aprendeu a se comunicar na vida cotidiana, por meio da linguagem falada e escrita, utilizando símbolos intercambiáveis (um lápis é um conceito praticamente universal; um lápis preto é uma subcategoria plenamente identificada), existe também uma linguagem científica, que abrevia e facilita a comunicação dentro de cada comunidade ou área científica, a qual está se tornando rapidamente universal.

### I.3 Objetivos da Disciplina

O objetivo mais geral das disciplinas sequenciais de Física Experimental é tornar o aluno apto a fazer julgamentos criteriosos sobre o conteúdo de informação num resultado experimental. Esta habilidade é construída a partir de outras, mais específicas, que pode ser assim relacionadas:

- a. Aprendizado de técnicas de *sistematização, tratamento e apresentação* de dados experimentais.
- b. Introdução à *teoria de incertezas* e sua aplicação no tratamento de dados experimentais.
- c. Desenvolvimento da *capacidade de expressão* na forma de relatório científico.
- d. Conhecimento de *instrumentos e técnicas de medição* e desenvolvimento de *habilidade* experimental.
- e. Demonstração e utilização prática de *conceitos e leis físicas*.
- f. Assimilação do importante papel do *modelo* na análise de experiências.

- g. Desenvolvimento de espírito crítico e clareza de pensamento na *confrontação entre resultados de modelos e resultados experimentais*.
- h. Desenvolvimento de *criatividade experimental* que permita aplicar conhecimentos adquiridos em novas situações.

Evidentemente, os objetivos acima relacionados apresentam uma grande superposição e interdependência entre si; são, também, objetivos amplos e irrestritos, sendo muita pretensão atingí-los em nível plenamente satisfatório, mesmo em todo o Curso de Graduação. Por outro lado, num mundo em que as tarefas rotineiras são aceleradamente assumidas por máquinas e robôs, saber extrair e apresentar informações relevantes, frente a um problema, provavelmente será a característica mais procurada num profissional, em qualquer área. Devido às especificidades dos Cursos de Física, estes podem ajudar neste tipo de capacitação profissional, também para áreas interdisciplinares.

Nesta disciplina, pretende-se colocar especial ênfase aos objetivos *a*, *b* e *c* acima mencionados, mas sem perder de vista os demais objetivos. Para isto, é feito um escalonamento de experiências e tópicos de forma que, no final do semestre, o aluno tenha um bom domínio de técnicas de tratamento de dados e apresentação de resultados experimentais. Mais especificamente, no final da disciplina, o aluno deverá ter um bom domínio dos seguintes tópicos:

- *conceitos e leis físicas* envolvidas nas experiências realizadas;
- *instrumentos e técnicas experimentais* utilizadas;
- elaboração de *relatório* formalmente correto, com resumo, introdução ao assunto, conceitos físicos envolvidos, descrição da experiência, resultados, discussões finais e conclusões;
- estimativa de *incertezas instrumentais*, *cálculo de desvio-padrão e propagação de incertezas* em casos simples;
- sistematização de resultados por meio de *tabelas*, com unidades, incertezas e legendas;
- elaboração de *gráficos* com barras de incerteza e legenda, observando tamanho, escalas e unidades adequados;
- utilização de gráficos, linear e dilog, na análise de dados experimentais;

- obtenção de *coeficientes linear e angular de reta* a partir de gráficos, relacionando-os com os parâmetros do modelo utilizado para representar o fenômeno estudado.

Os itens acima constituem um guia de estudo para a disciplina e servem como referência para a entrevista ou prova finais.

## I.4 Avaliação de Desempenho e Critérios

O acompanhamento dos alunos pelo professor será feito por meio de:

- Folha de Dados;
- Sínteses;
- Pré-Sínteses;
- Relatórios Bimestrais (com notas  $R_1$  e  $R_2$ );
- Frequência;
- Entrevista (com notas  $E$ );
- Prova (nota  $P$ ).

### I.4.1 Folha de Dados

**Ao final de cada aula, em que foram realizadas medições, deve ser entregue ao professor uma folha com os dados experimentais obtidos tabulados de forma adequada<sup>1</sup>. Esta folha é denominada **Folha de Dados**.**

Se possível, o professor deve verificar imediatamente se os dados são satisfatórios, apontando eventuais falhas graves nas medições. Uma cópia dos dados primários digitados devem ser enviada por correio eletrônico ao professor. O não envio desta cópia acarreta a não correção, pelo professor, da pré-síntese e da síntese, se esta for entregue.

---

<sup>1</sup>Os dados obtidos na atividade da disciplina são de propriedade intelectual dos alunos que o obtiveram e também do Instituto de Física, representando pelos membros da equipe que ministra a disciplina. Sempre que estes dados forem usados fora do ambiente da disciplina deve-se registrar o crédito de autoria dos mesmos.

O registro organizado da tomada de dados reduz o tempo dispendido na preparação da síntese e do relatório. A Folha de Dados entregue ao professor deve ser a *cópia* (podem ser usados papel carbono ou máquina fotocopadora) do registro de dados da equipe de alunos. Não há necessidade de *passar a limpo* ou *melhorar a estética* das anotações. Esta folha pode ser cópia das páginas do *CADERNO DE LABORATÓRIO* (veja subseção I.6.2).

Uma cópia dos dados primários, também chamados de dados brutos, digitados devem ser enviada por correio eletrônico ao professor. O não envio desta cópia acarreta a não correção da pré-síntese e da síntese, se entregue, pelo professor. O conteúdo, valores, devem na forma de tabela em formato “txt” separados por um espaço.

## I.4.2 Pré-Sínteses

A pré-síntese é uma tarefa a ser realizada entre a primeira e a segunda aula de cada experiência. A tarefa da refere-se à preparação dos dados colhidos para a sua **análise**, por meio de tabelas, gráficos e cálculos. A sua apresentação é condição **indispensável** para o bom rendimento da segunda aula. A cada experiência deve ser entregue uma *pré-síntese por grupo de alunos*, conforme prazo combinado com o professor, desde que os componentes da equipe tenham participado de todas as atividades correspondentes à experiência. Caso isto não tenha ocorrido, os alunos devem entregar pré-sínteses individuais. Na situação em que haja dificuldades para que os alunos da equipe realizem a pré-síntese *em conjunto*, podem ser entregues pré-sínteses individuais. **A entrega da pré-síntese é obrigatória.** As pré-sínteses serão corrigidas<sup>2</sup> e devolvidas, elas *devem ser anexadas ao relatório*. Não há atribuição de nota à pré-síntese. **No caso de não entrega de pré-síntese(s) no dia combinado, o aluno perde 1,0 ponto na nota do relatório para cada pré-síntese não entregue e ela(s) não é (são) mais recebida(s). Se a pré-síntese não entregue corresponder ao relatório sorteado, o relatório deverá ser baseado num conjunto de dados fornecido pelo professor.**

---

<sup>2</sup>Se os dados primários tiverem sido enviados ao professor conforme estabelecido na seção I.4.1.

### I.4.3 Sínteses

A síntese é um *relatório simplificado*, resumindo os resultados de medições e cálculos. A simplificação se refere mais à forma que ao conteúdo, já que todos os resultados de medições e cálculos devem ser apresentados. O trabalho de elaboração da síntese deve ser dividido entre o tempo das aulas e mais algumas horas extra-classe. A síntese deve conter :

- tabelas com resultados obtidos nas medições e cálculos;
- análise dos resultados, explicitando as fórmulas utilizadas;
- gráficos;
- conclusões fundamentadas, **indispensável!**

Para cada experiência **pode** ser apresentada *uma síntese* elaborada da mesma forma que a pré-síntese.

A síntese, caso entregue, será corrigida e devolvida, *devendo ser anexada ao relatório*.

### I.4.4 Relatórios

Cada aluno deverá entregar um relatório<sup>3</sup> sorteado entre as três primeiras experiências e um sorteado entre as duas seguintes<sup>4</sup>. O relatório será sobre um tema *sorteado* entre os temas correspondentes às experiências realizadas, devendo ser observado o seguinte:

- o prazo de entrega do relatório é de *uma semana*, a não entrega do relatório na data combinada acarreta a perda na nota do relatório de 1 ponto para o primeiro dia de atraso e depois 0,25 ponto por dia útil de atraso;
- alunos de mesmo grupo fazem relatório sobre temas diferentes;
- a síntese, se entregue, deve ser anexada ao relatório.

A forma, conteúdo e critério de correção do relatório serão discutidos separadamente (ver Seção II).

---

<sup>3</sup>No capítulo G há um roteiro de como fazer relatório.

<sup>4</sup>Isto é, 2 relatórios no semestre ( $R_1$  e  $R_2$ ).

### I.4.5 Questões/Reflexões

Diversas questões/reflexões são formuladas na apostila, ficando a critério do aluno resolvê-las ou não. A maioria delas é bastante simples e o aluno deve procurar resolver as mesmas se não se sentir seguro a respeito do assunto.

### I.4.6 Prova

Haverá uma prova ( $P$ ) como parte da avaliação da disciplina versando sobre os temas abordados nas aulas de laboratório. Durante a prova o aluno poderá consultar qualquer material escrito que dispuser (apostila, livros, caderno de laboratório, pré-sínteses, sínteses, etc.).

### I.4.7 Entrevista

A entrevista, realizada por um ou dois professores, é um instrumento adicional de avaliação da aprendizagem do aluno. A entrevista,  $E$ , tem por objetivo verificar a apropriação pelos alunos dos temas tratados no primeiro relatório<sup>5</sup>.

### I.4.8 Frequência

*Não há reposição de aulas de laboratório.* Em casos excepcionais, poderá ser feita reposição em horário normal de aula, mas em turma diferente daquela do aluno. Entretanto, **isto somente poderá ser feito com a anuência prévia do professor do aluno e do professor da outra turma**, por meio de comunicação eletrônica entre os professores.

*A tolerância para chegada na aula é de 20 minutos.* Após este tempo de tolerância, o aluno poderá participar da aula normalmente, mas será *anotada falta* na aula. O professor também poderá anotar falta no caso de abuso do tempo de tolerância.

Mesmo no caso em que houver reposição de experiência por motivo de falta, será anotada falta correspondente ao dia da aula.

---

<sup>5</sup>Veja Subseção I.4.9.

### I.4.9 Critério de Aprovação

Para aprovação na disciplina, a frequência deve ser 70 % ou maior e a média final,  $M_F$ , para aqueles que obtiveram na Prova nota maior ou igual a 3,0 é calculada pela expressão

$$M_F = \frac{0,7 \cdot R_1 + 0,3 \cdot E + R_2 + 1,5 \cdot P}{3,5} \geq 5,0 .$$

O aluno que tenha obtido nota menor que 3,0 na Prova é reprovado com média final

$$M_F = P$$

independente da frequência.

A critério do professor, a nota de entrevista  $E$  pode ser substituída pela nota do primeiro relatório  $R_1$ .

## I.5 Tempo Dedicado à Disciplina

O tempo de dedicação à disciplina deveria ser aproximadamente igual ao tempo de aula<sup>6</sup>. Esta dedicação extra-classe se distribui nos seguintes trabalhos:

- leitura de tópicos especiais apresentados nesta apostila;
- leitura prévia da apostila sobre a experiência a ser realizada;
- resolução das questões indicadas;
- elaboração das pré-sínteses e sínteses das experiências;
- confecção dos relatórios;
- pesquisa bibliográfica e leitura do material referente a tópicos relacionados com as aulas.

---

<sup>6</sup>Em média 4 horas por semana.

## I.6 Outras Observações Gerais

### I.6.1 Requisitos para a Disciplina

Esta disciplina foi estruturada de forma que seu pré-requisito é um curso colegial bem feito. Entretanto, é aconselhável que o aluno faça as disciplinas de Cálculo 1 e Introdução à Física, simultaneamente. Por outro lado, deve ser observado que para a disciplina de Física Experimental 2 será necessário que o aluno tenha sido aprovado na disciplina de Física Experimental 1.

### I.6.2 Caderno de Laboratório

O aluno deverá ter um *Caderno de Laboratório*<sup>7</sup>, no qual são anotados todos os resultados de medições e cálculos, gráficos preliminares e outras observações tais como data, hora, referências, etc. Não se justifica a frequente alegação de não poder fazer síntese ou relatório porque *os dados ficaram com o colega*. Cada aluno deve ter todos os dados em seu próprio caderno. **Na entrevista, o aluno deve ter em mãos o caderno de anotações, além do primeiro relatório. Na Prova será permitida a consulta a: Caderno de Laboratório, apostila, livros, pré-sínteses, sínteses e relatórios.**

### I.6.3 Material Necessário

Além, do material usual para aula (lápiz, borracha, régua, etc.), o aluno deve trazer papéis milimetrado e di-log para gráficos (tamanho A4) e calculadora com funções estatísticas.

### I.6.4 Segurança Pessoal e Cuidado com os Equipamentos

Experiências num laboratório de física sempre envolvem riscos de danos pessoais e também de danos aos equipamentos utilizados. O aluno deve seguir as *normas de segurança* para evitar danos a si *próprio, aos colegas e aos equipamentos* do laboratório. Em particular,

---

<sup>7</sup>Caderno comum de cerca de 100 folhas.

O aluno é responsável pelo equipamento colocado à sua disposição durante a aula e deverá *reparar o dano que tenha provocado devido a negligência.*

### **I.6.5 Plantão de Dúvidas**

Haverá um horário semanal em que o professor estará a disposição dos alunos de sua turma para resolver dúvidas. O horário será combinado de comum acordo entre o professor e o aluno. Haverá, também, monitores com mesmo objetivo em alguns dias da semana de 12:00 às 13:00 horas e de 18:00 às 19:00 horas.

### **I.6.6 Referências**

As referências a livros na apostila tem o objetivo de servir como um indicativo do assunto tratado. Sugere-se ao aluno que visite a estante na Biblioteca do IFUSP onde ficam as referências citadas. Nela podem ser encontrados outros livros que tratam do mesmo assunto e que algum/alguns deles possa/possam ser mais de seu agrado. De modo geral, todos os livros citados podem ser encontrados no acervo da Biblioteca, aqueles que, porventura, não existirem na acervo podem ser encontrados em outra biblioteca da Universidade e podem ser retirados utilizando o Cartão de Identificação de aluno da USP ou o empréstimo inter bibliotecas. As referências a artigos de revista podem ser encontradas tanto na Biblioteca do IFUSP como na pasta da disciplina de Física Experimental 1 na fotocopadora do CEFISMA. Nessa pasta também podem ser encontrados textos sobre determinados assuntos elaborados pelos professores.

### **I.6.7 Informática**

É muito útil para os alunos saber usar microcomputadores e conhecer programas de edição de texto, de planilha e de confecção de gráficos.<sup>8</sup> Na disciplina de Física Experimental 2, do segundo semestre, o conhecimento de um programa de planilha é imprescindível para o acompanhamento das atividades. As unidades da USP têm uma sala, denominada de Sala Pró-Aluno, com computadores a disposição dos alunos. Há, ainda, duas salas para aulas,

---

<sup>8</sup>Os monitores da disciplina estão capacitados para ensinar o básico desses programas.

com microcomputadores e projetor, e outras do Laboratório Didático com computadores que podem ser utilizadas durante as aulas de Física Experimental 1, porém de prioridade de outras disciplinas.

## Capítulo II

# Corpo Docente, Estagiários, Monitores e Funcionários

### II.1 Professores e Responsáveis por Turma

**Alexandre L. Correia**

**Felix G.G. Hernandez**

**Paulo R. Pascholati** (Coord)

**Rafael Oliveira Suigh**

**Edwin Hobi Júnior**

**José Fernando Chubaci**

**Philippe Gouffon**

**Wayne A. Seale**

### II.2 Estagiários e Monitores

**Cristiane Jahnke**

**Flávia M.R. Hirata**

**Jessica E.C. Niide**

**Stefano I. Finazzo**

**Thales B. dos Santos**

**Fabiana Rodrigues Arantes**

**Henrique J.C. Zanolli**

**Paula Feijó de Medeiros**

**Tatiane de Paula Sudbrack**

## II.3 Técnicos do Laboratório Didático

Adélio P. Dias (**Canela**)

**Carlos** A. Lourenço

**Cláudio** H. Furukawa (Coord.)

**Edelberto** J. Santos

**Manoel** M. Silva

**Ricardo** Ichiwaky

**Alvimar** F. Souza

Carlos **Eduardo** Freitas

**Dionísio** M. Lima

**Josiane** V. Martins

**Maria Cristina** S. Rosa

**Rodrigo** S. Viana

## II.4 Apoio de Audio Visual

**Agostinho** D. Bicalho

**Luiz César** Galizio

## II.5 Gráfica

**Edson** A. S. Moraes

**Waldemir** S. Lima

**Pedro** Rocha

**Wanderley** Alves(Supervisor)

# Capítulo III

## Cronograma

A seguir é apresentado o cronograma para a disciplina Física Experimental 1 - 4300113 e os responsáveis turmas para o ano de 2 011.

As aulas para a Turma 1, com duas subturmas, serão às segundas-feiras no diurno; para a Turma 2, com três subturmas, serão às quartas-feiras no noturno; para a Turma 3, com quatro subturmas, serão às quintas-feiras no diurno; e para a Turma 4, com duas subturmas, serão às sextas-feiras no noturno.

- **Turma 1** Paulo R. Pascholati e Philippe Gouffon
- **Turma 2** Felix G.G. Hernandez, José Fernando Chubaci e Rafael de Oliveria Suigh
- **Turma 3** Alexandre L. Correia, Edwin Hobi Júnior, Philippe Gouffon e Wayne A. Seale
- **Turma 4** Alexandre L. Correia e José Fernando Chubaci

## DATA      ATIVIDADE

### Turma 1   Segunda-Feira   Diurno

#### Fevereiro

21 - 25      Semana dos Ingressantes  
28            Experiência 1A - Introdução às Medições

#### Março

7 - 11        Carnaval - Não há aula  
14            Experiência 1B - Introdução às Medições  
21            Experiência 2 - Dimensões Euclidianas  
28            Síntese (Exp. 2)

#### Abril

04            Experiência 3 - Dimensões Fractais  
11            Síntese (Exp. 3)  
**Sorteio Relatório 1**  
18 - 23      Semana Santa - Não há aula  
25            Experiência 4 - Caracterização de Sólidos  
**Entrega do Relatório 1 até às 9:00 horas**

#### Maiο

02            Síntese (Exp. 4)  
09            Experiência 5 - Pêndulo  
16            Síntese (Exp. 5)  
23            Experiência 6 - Oscilações  
30            Síntese (Exp. 6)  
**Sorteio do Relatório 2**

#### Junho

06            Não há aula  
13            **Entrega do Relatório 2 até às 9:00 horas**  
15            **Prova Noturno - 19:10 horas**  
16            **Prova Diurno - 09:00 horas**

## DATA      ATIVIDADE

### Turma 2    Quarta-Feira    Noturno

#### Fevereiro

21 - 25      Semana dos Ingressantes

#### Março

02            Experiência 1A - Introdução às Medições

7 - 11        Carnaval - Não há aula

16            Experiência 1B - Introdução às Medições

23            Experiência 2 - Dimensões Euclidianas

30            Síntese (Exp. 2)

#### Abril

06            Experiência 3 - Dimensões Fractais

13            Síntese (Exp. 3)

#### **Sorteio Relatório 1**

18 - 23      Semana Santa - Não há aula

27            Experiência 4 - Caracterização de Sólidos

**Entrega do Relatório 1 até às 19:20 horas**

#### Maio

04            Síntese (Exp. 4)

11            Experiência 5 - Pêndulo

18            Síntese (Exp. 5)

25            Experiência 6 - Oscilações

#### Junho

01            Síntese (Exp. 6)

#### **Sorteio do Relatório 2**

08            Não há aula

15            **Prova Noturno - 19:20 horas**

**Entrega do Relatório 2 até às 19:20 horas**

16            **Prova Diurno - 09:00 horas**

## DATA      ATIVIDADE

### Turma 3    Quinta-Feira    Diurno

#### Fevereiro

21 - 25      Semana dos Ingressantes

#### Março

03            Experiência 1A - Introdução às Medições

7 - 11        Carnaval - Não há aula

17            Experiência 1B - Introdução às Medições

24            Experiência 2 - Dimensões Euclidianas

31            Síntese (Exp. 2)

#### Abril

07            Experiência 3 - Dimensões Fractais

14            Síntese (Exp. 3)

#### **Sorteio Relatório 1**

18 - 23      Semana Santa - Não há aula

28            Experiência 4 - Caracterização de Sólidos

**Entrega do Relatório 1 até às 9:00 horas**

#### Maio

05            Síntese (Exp. 4)

12            Experiência 5 - Pêndulo

19            Síntese (Exp. 5)

26            Experiência 6 - Oscilações

#### Junho

02            Síntese (Exp. 6)

#### **Sorteio do Relatório 2**

09            Não há aula

15            **Prova Noturno - 19:10 horas**

16            **Prova Diurno - 09:00 horas**

**Entrega do Relatório 2 até às 9:00 horas**

## DATA      ATIVIDADE

### Turma 4   Sexta-Feira   Noturno

#### Fevereiro

21 - 25      Semana dos Ingressantes

#### Março

04      Experiência 1A - Introdução às Medições

7 - 11      Carnaval - Não há aula

18      Experiência 1B - Introdução às Medições

25      Experiência 2 - Dimensões Euclidianas

#### Abril

01      Síntese (Exp. 2)

08      Experiência 3 - Dimensões Fractais

15      Síntese (Exp. 3)

#### **Sorteio Relatório 1**

18 - 23      Semana Santa - Não há aula

29      Experiência 4 - Caracterização de Sólidos

**Entrega do Relatório 1 até às 19:20 horas**

#### Maio

06      Síntese (Exp. 4)

13      Experiência 5 - Pêndulo

20      Síntese (Exp. 5)

27      Experiência 6 - Oscilações

#### Junho

03      Síntese (Exp. 6)

#### **Sorteio do Relatório 2**

10      Não há aula

15      **Prova Noturno - 19:20 horas**

**Entrega do Relatório 2 até às 19:20 horas**

16      **Prova Diurno - 09:00 horas**

# Experiência 1

## Introdução às Medições

### 1.1 Objetivos

Nesta experiência será explorado o efeito da repetição de medições no valor da grandeza (tempo e comprimento) observada, mantidas inalteradas as condições experimentais. Serão introduzidos critérios para a obtenção dos dados experimentais e da análise dos mesmos com a finalidade de obter o valor da grandeza com confiança.

### 1.2 Introdução

Na primeira parte da experiência, (experiência 1.A), a grandeza medida será o tempo de duração de um fenômeno oscilatório (veja o Apêndice E), tal como o período de um pêndulo simples. Um cronômetro digital será o instrumento utilizado para essas medidas, cuja menor divisão é 0,01s. Na experiência 1.B, o comprimento da aresta de um cubo pequeno será a grandeza medida utilizando-se instrumentos de diferentes precisões, tais como: régua (menor divisão 1mm), paquímetro (0,02mm ou 0,05mm) e micrômetro (0,01mm). Ao final desta experiência o aluno terá aprendido como o valor de uma grandeza deve ser apresentado, segundo as normas científicas, para possibilitar o seu uso pela comunidade, como organizar tabelas para apresentar os valores das medidas e como se faz o planejamento da realização de um experimento simples.

O paquímetro e o micrômetro são instrumentos para medição de pequeno comprimento com precisão maior que aquela da régua. O professor explicará,

durante a aula, como os mesmos são utilizados.

## 1.3 Medições de Tempo

A experiência consiste basicamente em obter o valor para o período de um pêndulo. Haverá necessidade de realizar medidas preliminares para decidir a melhor metodologia experimental para realizar, com o instrumental disponível, a medida do tempo de duração do período de oscilação do pêndulo utilizado. Nesta experiência é aconselhável que o ângulo de oscilação do pêndulo não ultrapasse  $10^\circ$ <sup>1</sup>.

### 1.3.1 Procedimento Experimental

A atividade experimental usualmente se compõe de duas fases: uma de observação e tomada de dados preliminares e, outra, após a decisão sobre a proposta de metodologia, da tomada e análise dos dados definitivos. Nesta experiência, em particular, passaremos pelas duas fases, valendo-nos, para a tomada de decisão, da discussão conjunta das informações colhidas pela classe toda.

Assim, formados os grupos de dois alunos, cada grupo obterá, inicialmente, o valor do período do pêndulo colocado à sua disposição. Estes valores devem ser colocados em uma tabela no quadro negro, para possibilitar a discussão dos resultados obtidos pela classe. Em particular, para verificar, com a ajuda do professor, se é possível distinguir alguma tendência nesses dados.

Mesmo, se ambos os alunos do grupo cronometrarem simultaneamente a mesma oscilação para obter o período, há grande possibilidade de obterem valores diferentes. A partir desta discussão será estabelecido o procedimento para as próximas etapas de medições. É importante que cada aluno sempre anote todos valores referentes aos dados experimentais no seu caderno de laboratório<sup>2</sup>. A organização dos dados é de fundamental importância em física experimental, pois possibilita ao experimentador acessar os dados obtidos até anos depois de realizada a experiência. A má organização da documentação da atividade realizada torna os valores obtidos, em questão de poucos dias, incompreensíveis mesmo para a pessoa que os anotou, obrigando, as vezes,

---

<sup>1</sup>Veja o motivo disso na seção 5.1.

<sup>2</sup>Veja a subseção I.6.2.

o aluno a refazer toda a experiência. Por organização entende-se também anotações com letra legível e armazenagem em meio adequado, como um caderno de laboratório, por exemplo.

A tomada de dados definitiva pelo grupo deve ocorrer, após decisão sobre a melhor metodologia, repetindo o processo de medição, nas condições escolhidas, por pelo menos  $N$  vezes<sup>3</sup>. Os valores obtidos pelas medidas muito provavelmente, flutuarão ao redor de um valor denominado valor médio<sup>4</sup>, isto é, alguns serão maiores e outros menores que o valor médio, aleatoriamente.

Em qualquer experimento é de suma importância anotar detalhadamente quais equipamentos foram utilizado na medição e o procedimento de realização das medidas de modo que, se necessário, o experimento possa ser repetido utilizando os mesmos equipamentos.

Inicialmente, cada dupla deverá medir o período de um pêndulo colocado à sua disposição. Após a medição do período do pêndulo individual, todos os grupos deverão medir o período de um único pêndulo, colocado à frente da sala.

### 1.3.2 Análise dos Dados

Cada componente do grupo fará o histograma (ver Apêndice A) dos respectivos dados e indicará, por meio de flecha vertical, neste histograma o valor médio que julgar representativo das medições feitas para o período do sistema.

### 1.3.3 Pré-Síntese

Na Experiência 1.A, a Pré-Síntese, uma por grupo, consiste de tabelas dos dados obtidos (dados primários)<sup>5</sup>, de histogramas feitos (com a indicação dos valores médios dos períodos e das larguras dos histogramas), da tabela dos valores médios e larguras de todos os grupos da classe, e das conclusões obtidas.

---

<sup>3</sup>O valor de  $N$  será estabelecido pelo professor durante a aula.

<sup>4</sup>Veja, por exemplo, o apêndice C.1.

<sup>5</sup>Dados primários ou dados brutos são aqueles que foram obtidos pelo instrumento de medida sem que tenha havido qualquer manipulação matemática dos mesmos.

## 1.4 Medições de Comprimento

A atividade consiste em determinar a distância entre um par de faces opostas de um cubo pequeno com diferentes instrumentos com o objetivo de responder a seguinte pergunta: a flutuação de medições repetidas depende do instrumento utilizado?

### 1.4.1 Procedimento Experimental

Utilizando sucessivamente uma régua, um paquímetro e um micrômetro meça a distância entre um par de faces opostas (1-6 ou 2-5 ou 3-4) de um cubo pequeno. Cada aluno do grupo deve repetir várias<sup>6</sup> vezes as medições com cada instrumento, variando a posição da medição mantendo sempre mantendo o mesmo par de faces (1-6 ou 2-5 ou 3-4). Em seguida, cada aluno deve medir algumas<sup>7</sup> vezes a distância entre um dos outros dois pares de faces com um instrumento a ser escolhido após discussão em classe.

### 1.4.2 Análise dos Dados

Para os três conjuntos (correspondentes aos três instrumentos) de medições, construa o respectivo histograma indicando o valor médio e a largura (ver Apêndice A) do histograma.

Obter a incerteza final (ver Apêndice C) para cada conjunto de dados e determinar se o dado pode ou não ser considerado um cubo (ver seção C.4 do mesmo Apêndice).

### 1.4.3 Discussão dos Resultados

Cada grupo deverá apresentar no quadro-negro o valor médio ( $\bar{x}$ ), desvio padrão amostral ( $s$ ), a largura do histograma,  $\ell$ , e o desvio padrão do valor médio ( $s_m$ ) obtidos para a distância entre as faces do cubo correspondente a cada instrumento.

Analisando os histogramas e os resultados apresentados na tabela colocada no quadro negro o que se pode afirmar sobre o uso de diferentes instrumentos nas medidas? E quando comparado ao pêndulo, o que pode ser dito sobre a influência da incerteza instrumental?

---

<sup>6</sup>O número de medidas deverá ser determinado em sala pelo professor.

<sup>7</sup>Novamente o número de medidas deverá ser determinado em sala pelo professor.

Comparando os resultados obtidos para a distância entre os três pares de faces, pode-se afirmar que o objeto tem forma cúbica? Justifique a sua resposta utilizando os conceitos apresentados nesta experiência.

## 1.5 Síntese

Anexar na Síntese, a Pré-Síntese corrigida pelo professor. Apresente uma tabela com os valores médios e os correspondentes desvios padrão amostral e incertezas da média da Experiência 1.A. Faça o mesmo para a Experiência 1.B e anexe os histogramas correspondentes a mesma.

Que conclusões podem ser obtidas destas duas experiências?

## 1.6 Reflexão

Os valores médios do período necessariamente seriam os mesmos se vocês fizessem um número maior de determinações para os períodos? E as larguras dos histogramas? O que você imagina que aconteceria com a flutuação dos dados colhidos para o período de oscilação se, em vez de ser feita uma cronometragem manual, esta fosse feita por um dispositivo eletrônico especial? O que você acha que aconteceria com o período se a amplitude de oscilação fosse aumentada? Você teve possibilidade de verificar isto experimentalmente? No caso do pêndulo (veja diagrama esquemático de pêndulo simples na Figura 5.1), quais são, na sua opinião, as grandezas físicas que poderiam aumentar a força restauradora ou diminuir a inércia e qual o efeito isto teria sobre o respectivo período?

# Experiência 2

## Dimensões Euclidianas

### 2.1 Introdução

Para materiais sólidos homogêneos, a massa  $m$  possui uma relação linear com o volume  $v$ , isto é:

$$m = d_3 v, \quad (2.1)$$

onde  $d_3$  é uma constante de proporcionalidade definida como a *densidade volumétrica* do objeto. O volume  $v$  é função de grandezas características  $L_1, L_2, L_3$  ( $v = f(L_1, L_2, L_3)$ ). É interessante observar a dependência da massa com as dimensões do objeto para objetos com forma geométrica mais simples em que as grandezas características podem ser comprimento, altura e largura, como para um paralelepípedo. Nesse caso podemos escrever a massa e sua proporcionalidade com  $L_i$  da seguinte maneira:

$$m = K_3 L_1 L_2 L_3, \quad (2.2)$$

onde  $K_3$  é a *densidade volumétrica*.

Em um caso particular de um determinado objeto para o qual as três grandezas características são iguais, como um cubo ou uma esfera, tem-se que  $L_1 = L_2 = L_3 = L$ , a equação 2.2 pode ser escrita como

$$m = K_3 L^3. \quad (2.3)$$

No caso do cubo  $K_3$  é a densidade volumétrica, enquanto que no caso da esfera  $K_3$  é igual a densidade volumétrica multiplicada por  $\frac{4}{3}\pi$ .

Para o caso em que uma das grandezas não varia, pode-se considerar apenas as duas dimensões que corresponderão à área  $A$  do objeto, então

$$m = d_2 A, \quad (2.4)$$

onde  $d_2$  é definido como a *densidade superficial* do objeto. Novamente a área  $A$  do objeto está relacionada às suas grandezas características, logo no caso de um paralelogramo podemos relacionar a massa com estas grandezas (comprimento e altura):

$$m = K_2 L_1 L_2, \quad (2.5)$$

$K_2$  é a *densidade superficial*. Se  $L_1 = L_2 = L$ , que é o caso de um quadrado ou círculo

$$m = K_2 L^2, \quad (2.6)$$

$K_2$  é a *densidade superficial*,  $d_2$ , para o quadrado e proporcional a ela no caso do círculo.

Finalmente, se somente uma destas grandezas varia e as outras duas são mantidas constantes, como é o caso de um fio de espessura uniforme, temos a relação

$$m = K_1 L, \quad (2.7)$$

sendo  $K_1$ , neste caso, a própria *densidade linear* do objeto ( $K_1 = d_1$ ).

Medidas de densidade são de extrema importância e podem trazer informações interessantes e surpreendentes, como por exemplo, no caso do sistema solar. A comparação entre massa e volume da Terra e dos planetas Vênus e Mercúrio mostra uma densidade volumétrica destes da ordem de  $5,4g/cm^3$  enquanto que o Sol, que tem uma massa 400 mil vezes maior que a da Terra, possui uma densidade bem menor ( $1,4g/cm^3$ ). Esta desigualdade entre as densidades pode indicar uma composição do Sol muito diferente daquela dos planetas citados.

## 2.2 Estimativas das Incertezas nas Medidas e Propagação de Incertezas

Como pode ser visto no Apêndice C, o procedimento básico para estimar a incerteza estatística consiste em *repetir medições*. A partir de  $N$  resultados  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_N$  de medições, executadas de forma similar, pode-se obter os *valores médios*,  $\bar{y}$ , o desvio padrão,  $s$ , e o desvio padrão da média,  $s_m$ .

A incerteza final  $s_f$  em cada resultado pode ser obtida como combinação da incerteza estatística  $s_m$  com a incerteza instrumental  $s_i$  que pode ser avaliada pela escala do instrumento.

As incertezas correspondentes ao eixo das abcissas deverão ser transferidas para o eixo das ordenadas para serem colocadas nos gráficos.

## 2.3 Análise dos Dados

A partir das medidas de massa e dimensões dos objetos é possível determinar as densidades volumétrica, superficial e linear dos objetos estudados que se relacionam por

$$m = K_n L^n, \quad (2.8)$$

onde  $n = 3$  para esfera (cubo),  $n = 2$  para disco (quadrado) e  $n = 1$  para bastão.

A partir desta equação podemos determinar o valor da densidade em cada caso por meio de análise gráfica. Para isto, é feita a linearização da equação 2.8 por substituição de variáveis, como por exemplo, adotando-se  $m = y$  e  $L^n = x$ , o que possibilita a representação dos dados por uma reta<sup>1</sup> do tipo  $y = ax + b$ , onde se espera que o termo linear  $b$  seja compatível com zero.

---

<sup>1</sup>Veja a Seção B.3 Equação da Reta num Plano no Apêndice B.

# Experiência 3

## Geometria fractal

### 3.1 Introdução

A relação entre a massa  $M$  de um objeto e seu comprimento característico  $L$  para os casos de um fio, uma placa e uma esfera foram vistos na Experiência 2 e eram matematicamente descritos por

$$\text{Linear (fio): } M = K_1 L ,$$

$$\text{Superficial (placa): } M = K_2 L^2 ,$$

$$\text{Volumétrico (esferas): } M = K_3 L^3 .$$

onde  $K_1$ ,  $K_2$  e  $K_3$  são constantes relacionadas às densidades linear, superficial e volumétrica, respectivamente. Todas as expressões acima correspondem a relações entre  $M$  e  $L$  que podem ser escritas de modo geral como

$$M = K L^D , \tag{3.1}$$

onde  $D$  é a dimensão do objeto e  $K$  uma constante. Se a dimensão  $D$  for desconhecida, é possível obtê-la a partir de dados experimentais para a relação entre a massa  $M$  e o comprimento característico  $L$ , usando a equação 3.1.

### 3.2 Dimensões Fractais

A natureza parece gostar de produzir formas com muitos graus de fragmentação, tanto no nível macroscópico quanto no microscópico. Quantificar

comprimentos, áreas e volumes de formas fragmentadas apresenta muitos problemas quando se utiliza a geometria euclideana. Verifica-se que medidas de distâncias em formas fragmentadas dependem da escala que se usa. Pode-se, por exemplo, medir a costa litorânea brasileira por três métodos: por meio de uma foto de satélite, por meio de fotos aéreas ou simplesmente caminhando-se pelas praias. Os resultados das três medições serão bem diferentes, pois quanto menor a escala, mais sensível a medida é aos contornos e, portanto, fornecerá um valor maior.

Na década de 60 encontravam-se enciclopédias com valores muito discrepantes de distâncias de fronteiras entre países. Um livro português apresentava que sua fronteira com a Espanha tinha 1 214 km, enquanto um livro espanhol citava 987 km para a mesma fronteira. O mesmo ocorria entre Holanda e Bélgica (380 km contra 449 km). Essas diferenças, da ordem de 20%, são justificadas quando se supõe que os países utilizaram escalas distintas nas medidas de suas fronteiras.

Fatos como estes chamaram a atenção de matemáticos que verificaram a inadequação da geometria euclideana quando aplicada a certos casos. Foi desenvolvida, então, a geometria de fractais, que se aplica a grandezas fragmentadas e envolve o conceito de dimensões não-inteiras. A dimensão fractal  $D$  quantifica o grau de fragmentação.

No experimento que propomos, é verificada a aplicabilidade da geometria fractal para o caso em que uma folha de papel (um objeto plano) é transformada numa bola de papel (um objeto espacial), depois de ser amassada. O ato de amassar o papel implica na fragmentação de uma área em áreas menores. O experimento envolve a medição de uma grandeza (diâmetro  $\phi$  das esferas de papel) e a verificação da dependência deste com a massa  $M$  da bola.

Verificar-se-á se a massa varia ou não com o cubo da dimensão linear, como ocorre com esferas maciças; ou se o expoente da relação  $M = K\phi^D$  apresenta dimensão não-inteira.

### 3.3 Análise dos Dados

De acordo com a geometria fractal, a dependência da massa da bola de papel com o diâmetro obedece equação 3.1. Esta relação pode ser linearizada por uma transformação logarítmica. Extraindo o logaritmo da equação 3.1, se obtém:

$$\log(M) = \log(K\phi^D) = \log(K) + \log(\phi^D) = \log(K) + D\log(\phi) . \quad (3.2)$$

Um tipo de papel especial, em que as dimensões lineares são proporcionais aos logaritmos dos números marcados em ambos os eixos (papel log-log ou di-log)<sup>1</sup>. No papel *log-log* a dependência da massa com o diâmetro deve, pois produzir uma reta. A equação (3.2) é da forma  $y = a + bx$ , onde  $a = \log(K)$  e  $b = D$  são as constantes a serem determinadas.

---

<sup>1</sup>Veja a seção B.6 do apêndice B.

# Experiência 4

## Caracterização de Sólidos

### 4.1 Objetivos

O objetivo desta experiência consiste em diferenciar o tipo de plástico que compõe objetos sólidos pela determinação de sua densidade. Ao mesmo tempo, discutiremos a importância em se adotar um determinado *modelo* e que sua inadequação ou mesmo problemas na execução das medições podem induzir *erros sistemáticos* no resultado final.

### 4.2 Introdução

A densidade de um sólido *homogêneo*<sup>1</sup> é definida por

$$d = \frac{m}{v} \quad (4.1)$$

onde  $m$  é a massa do sólido e  $v$  é o seu volume. Para identificação de um plástico, a *incerteza* na densidade é tão importante quanto o próprio valor obtido, pois a grande maioria dos plásticos têm densidades[3] entre  $0,9\text{ g/cm}^3$  e  $1,4\text{ g/cm}^3$ <sup>2</sup>. Portanto, se por exemplo, a densidade obtida

---

<sup>1</sup>Corpo homogêneo é aquele que tem as mesmas propriedades em todos os seus pontos ou seja, densidade constante. Para um corpo não homogêneo, a densidade pode ser diferente em pontos diferentes e a definição acima se aplica à *densidade média* do corpo.

<sup>2</sup>Entre os plásticos comuns, uma exceção é o **teflon** que tem densidade bem maior, de aproximadamente  $2,2\text{ g/cm}^3$ .

para um plástico X é  $d_X = 1,15 \text{ g/cm}^3$  e a incerteza correspondente é  $s_X = 0,20 \text{ g/cm}^3$ , o resultado é praticamente inútil para identificação do plástico. Se a incerteza é  $s_X = 0,05 \text{ g/cm}^3$ , então o número de possibilidades é bem menor e o plástico pode ser identificado com outros critérios mais simples, tais como transparência, consistência ou coloração. Assim, podemos perceber a necessidade de uma teoria para a *propagação das incertezas* das medidas primárias (geométricas e de massa) para se obter a densidade. Veja por exemplo a seção C.6 do apêndice C e em particular o *cálculo da incerteza* no resultado final. Um tratamento mais completo do assunto pode ser encontrado na referência [4].

# Experiência 5

## Pêndulo Simples

### 5.1 Objetivos

Nesta experiência será estudada a relação entre período  $T$  de um pêndulo e seu comprimento  $L$  e verificar se ele pode ser representado pelo modelo do pêndulo simples<sup>1</sup> para pequenas oscilações<sup>1</sup>.

### 5.2 Introdução

Toda haste, fio ou outro objeto qualquer, inextensível, suspenso por um de seus pontos e sujeito a ação da gravidade executará um movimento oscilatório, se for momentaneamente afastado do seu ponto de equilíbrio. O período deste movimento é uma grandeza física característica do sistema. A exemplo mais simples desse sistema é o um pêndulo, que consiste de um objeto de massa pequena suspenso por um fio inextensível e de massa desprezível.

### 5.3 Modelo para Pequenas Oscilações

Um modelo bastante comum, utilizado para relacionar o período  $T$  de um pêndulo com seu comprimento  $L$  é chamado de modelo do pêndulo simples e baseia-se nas seguintes hipóteses:

---

<sup>1</sup>Uma descrição mais ampla do pêndulo pode ser encontrada na referência [5].

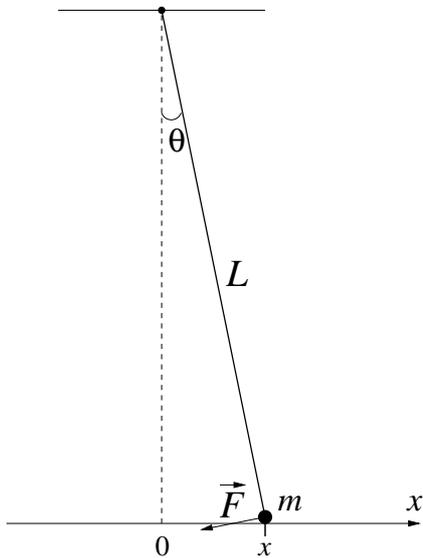


Figura 5.1: *Desenho esquemático de um pêndulo simples.*

- o pêndulo é constituído por um ponto material suspenso por um fio inextensível e sem massa;
- apenas as forças peso e tração agem sobre o ponto material;
- é válida a aproximação de  $\text{seno}(\theta) \approx \theta$ .

Baseado nestas hipóteses, pode-se deduzir a seguinte relação funcional<sup>2</sup> entre  $T$  e  $L$ :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad (5.1)$$

onde  $g$  é a aceleração da gravidade local.

---

<sup>2</sup>Veja Capítulo 15 da Referência [6].

## 5.4 Situação Experimental

Para que a Equação 5.1 seja aplicável, é necessário que as condições experimentais possam ser aproximadas pelas hipóteses e limitações do modelo. Assim, utiliza-se como ponto material uma bolinha de chumbo, e o fio de um material de baixa densidade e pouca elasticidade. Adota-se ainda, pequenos ângulos de oscilação máxima (no caso de  $\text{seno}(\theta) \ll \theta$ , o erro percentual da aproximação da hipótese c é menor que 1%, veja a Questão 1). é necessário ter em mente que, estritamente, o pêndulo simples não existe na natureza, porém as incertezas experimentais são muito maiores do que as envolvidas nas aproximações adotadas para o modelo do pêndulo simples, esta portanto não tendo influência na incerteza final.

## 5.5 Questões

1. Na aproximação  $\text{sen } \theta \cong \theta$  (radianos), o *erro* porcentual é

$$\varepsilon = 100 (\text{sen } \theta - \theta) / (\text{sen } \theta) \quad .$$

Fazer um gráfico  $\varepsilon \times \theta$  para valores de  $\theta$  de 0 a  $90^\circ$  e comentar os resultados.

2. O período do pêndulo é dado com melhor aproximação por (ver Referências 1 e 3)

$$T(\theta_{max}) = T_0 \left( 1 + \frac{1}{16} \theta_{max}^2 \right) \quad \text{onde} \quad T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (5.2)$$

sendo  $\theta_{max}$  o valor máximo do ângulo  $\theta$  (ver Figura 5.1). Percebe-se que  $T(\theta_{max}) \equiv T_0$  apenas para  $\theta_{max} = 0$ . Calcular o *erro* cometido ao se considerar  $T_0$  como período em lugar do valor mais exato  $T(\theta_{max})$ , quando a amplitude máxima  $x_{max}$  das oscilações é igual a  $L/10$ .

(O resultado permite concluir que para  $x_{max} = L/10$  a aproximação de *pequenas oscilações* é muito boa.)

3. No caso de pequenas oscilações, valem as aproximações

$$\text{sen } \theta \cong \theta \quad \text{e} \quad \cos \theta \cong 1 \quad (\theta \ll 1) \quad .$$

Considerando o pêndulo da Figura 5.1, mostrar que a força restauradora é dada por

$$F = -kx \quad \text{onde} \quad k = \frac{mg}{L} .$$

4. A solução  $x(t)$  para o pêndulo é obtida da Lei de Newton, para pequenas oscilações,

$$F = -kx = m \frac{d^2x}{dt^2} .$$

Mostrar, derivando duas vezes e substituindo, que  $x(t) = x_{max} \cos \omega t$  é solução desta equação e

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} .$$

O aluno interessado pode consultar as referências [5, 7, 8] e as referências lá citadas para se quiser avaliar possíveis limitações do modelo de pêndulo simples na presente situação experimental.

# Experiência 6

## Oscilações

### 6.1 Introdução

#### 6.1.1 Motivação

Um dos aspectos mais importantes de um experimento é a preparação e o planejamento adequados de um experimento. Se o papel de um experimento é o de realizar uma pergunta à natureza, o planejamento do experimento pode ser pensado como uma tentativa de formular a pergunta o mais claramente possível.

Esta experiência consiste em estudar as frequências de ressonância de uma corda vibrante com os extremos fixos, em função dos vários parâmetros físicos que caracterizam o sistema. Para realizar este objetivo, a preparação e planejamento prévios de como estudar experimentalmente este sistema serão cruciais.

#### 6.1.2 Ressonâncias em Cordas Vibrantes com Extremos Fixos

Consideremos uma corda fixa nas suas extremidades e sujeita a uma certa tensão. Se esta corda receber uma excitação senoidal com frequência bem definida, ela entrará em vibração em toda sua extensão. Existem certas frequências de excitação para as quais a amplitude é máxima. Este fenômeno é conhecido como ressonância. As frequências nas quais ocorrem este fenômeno são chamadas de frequências de ressonância ou modos normais de vibração.

O conjunto de frequências de ressonância é característico de cada sistema físico.

Num modo normal, o movimento da corda é o de uma onda estacionária. As ondas estacionárias numa corda são produzidas pela superposição de duas ondas harmônicas de mesma amplitude, mas se propagando em sentidos opostos. O resultado dessa superposição é uma configuração que não se propaga, com a formação de ventres e nós, como pode ser visto na Fig. 6.1. O movimento correspondente ao modo normal é uma oscilação harmônica do fio como um todo na frequência  $f_n$ , onde  $n$  é o número de ventres. Isto é, com exceção dos nós, os demais pontos realizam movimento harmônico simples na frequência  $f_n$ , sendo que o fio mantém a forma senoidal durante a oscilação. A importância dos modos normais de vibração é que uma vibração complexa na corda pode ser reduzida a uma soma de vibrações nos modos normais - este é um dos resultados mais importantes da teoria de Fourier.

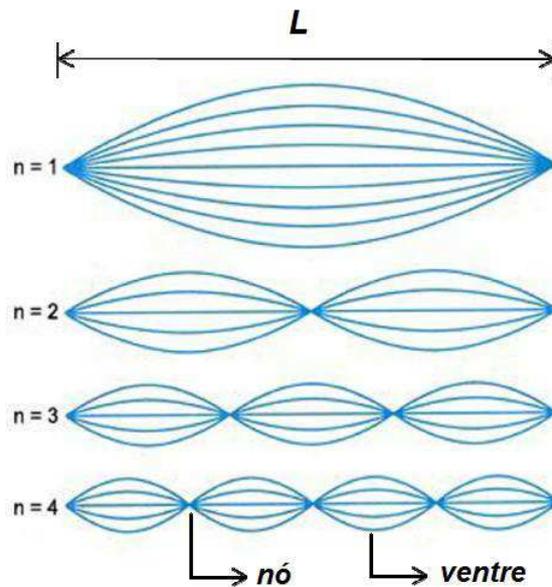


Figura 6.1: Modos normais de vibração de uma corda de comprimento  $L$ , com as extremidades fixas. Cada modo normal é caracterizado pelo número de ventres  $n$

No caso, estudaremos o sistema ilustrado pela Figura 6.2. Um dos extremos fixos é tensionado por meio de uma massa suspensa e no outro extremo

faz-se vibrar a corda. Um modelo possível para caracterizar as frequências de ressonância  $f_n$  de uma corda sob tensão em função do número de ventres ( $n$ ), do comprimento do fio ( $L$ ), da tensão aplicada à corda ( $T$ ) e da densidade linear da corda ( $\mu$ ) pode ser dado pela seguinte relação funcional

$$f_n = Cn^\alpha L^\beta T^\gamma \mu^\lambda \quad (6.1)$$

onde  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\lambda$  são expoentes a serem determinados e  $C$  é uma constante. Este será o modelo estudado neste experimento.

### 6.1.3 Objetivo

O objetivo do experimento consiste em estudar as frequências de ressonância  $f_n$  em função dos vários parâmetros que caracterizam o fio e assim verificar experimentalmente a validade da equação 6.1 e determinar os expoentes característicos  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\lambda$ .

## 6.2 Procedimento Experimental

### 6.2.1 Descrição do aparato

O arranjo experimental que será utilizado nesta experiência é ilustrado na Figura 6.2. Uma das extremidades de uma corda de nylon é presa a uma haste no centro de um alto-falante, enquanto a outra extremidade passa por uma roldana e sustenta uma massa  $M$ , fornece a tensão à corda. O gerador de áudio, que é responsável por produzir uma tensão senoidal de frequência ajustável, é ligado ao alto-falante. Como o gerador de áudio é usado para alimentar o alto-falante, o cone do alto-falante oscila na mesma frequência que o gerador de áudio e, conseqüentemente, a corda também oscila nesta frequência.

Dependendo do valor de frequência aplicado ao alto-falante, pode-se observar a formação de cristas e nodos na corda. A frequência de ressonância é determinada quando a corda oscila com máxima amplitude. A frequência correspondente é lida no gerador de áudio. A tensão aplicada à corda é dada por  $T = Mg$ , onde  $g$  é a aceleração da gravidade e  $M$  é a massa sustentada pela corda. O alto-falante fica numa plataforma móvel em relação ao restante dos objetos utilizados no experimento. Assim, torna-se possível variar o comprimento da corda  $L$ .

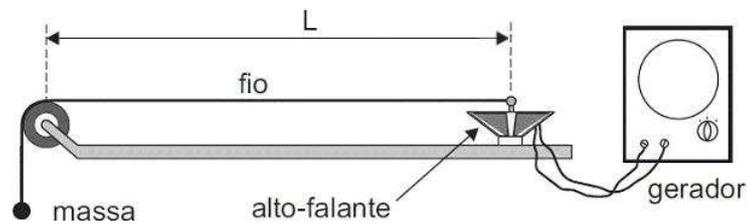


Figura 6.2: Arranjo experimental utilizado para estudar a ressonância de um fio sob tensão.

### 6.2.2 Explorando o Experimento

- Familiarize-se com o arranjo experimental. Em particular, explore o gerador de funções - lembre-se de utilizar ondas senoidais e a maior amplitude de saída possível. Procure os intervalos de frequência em que ocorrem as ressonâncias. Note as ordens de grandeza das variáveis envolvidas (comprimento da corda, massa do suporte, ...).
- Como para verificar a validade da equação e determinar os expoentes da equação 6.1 devemos manter todos parâmetros fixos menos um, temos de decidir quais valores dos parâmetros fixos utilizar - e para tanto é necessário um critério de escolha. Um procedimento para determinar este critério é pensar em qual é a variável que determina quando a corda esta na condição de ressonância.
- Neste experimento a corda utilizada será mantida fixa. Dentre as várias cordas disponíveis, com suas respectivas densidades, qual deve ser utilizada?
- Explore o comportamento da ressonância para cada uma das variáveis e determine quais valores atendem melhor o critério de escolha. Estes serão os valores fixos a serem utilizados.
- Estime as incertezas de cada uma das grandezas. Qual é a incerteza nas medidas de  $L$  e  $n$ ? Qual é a incerteza instrumental nas medidas de  $f$ ? É necessário realizar várias medidas de cada uma das grandezas?

### 6.2.3 Realizando as Medidas

- Para cada uma das variáveis independentes na equação 6.1, fixe todas as outras variáveis nos valores determinados e realize um conjunto de medidas das frequências de ressonância  $f_n$  em função da variável escolhida.
- No caso de a variável independente ser  $L$  ou  $M$ , quantos pontos medir?

### 6.3 Análise de Dados (Pré-síntese)

- Justifique o procedimento adotado para escolher os valores fixos das variáveis.
- Para cada um dos conjuntos de dados de  $f_n$  por uma variável independente, grafique os resultados num papel dilog. Discuta se o comportamento esperado pela equação 6.1 é razoável (note que o papel dilog é especialmente adequado para este fim). Estime o valor do expoente correspondente, com sua incerteza.

### 6.4 Discussão (Síntese)

- Se supormos que a frequência de ressonância não depende de mais nenhuma grandeza, é razoável supor que a constante  $C$  na equação 6.1) é adimensional. Se fizermos estas hipóteses, utilize *apenas* análise dimensional para fixar os expoentes da equação 6.1. Qual dos expoentes não pode ser determinado por este método?
- Os expoentes obtidos experimentalmente são compatíveis com os expoentes esperados pela discussão do item anterior?
- Discuta a possibilidade de estudar o comportamento de  $f_n$  em função da densidade linear  $\mu$  da corda.
- $\mu$  é uma variável independente das demais?

# Apêndice A

## Histograma

Quando uma variável qualquer é estudada, o maior interesse é conhecer o comportamento desta variável. O histograma é o gráfico de distribuição de frequência, onde os dados são dispostos em intervalos chamados canais ou bins, de largura conveniente, sendo representados ao longo da abscissa, enquanto nas ordenadas está representada a frequência ou frequência relativa de ocorrência dos valores correspondente a cada canal.

Para se construir um histograma é necessário obter a frequência com que o valor medido pode ser encontrado dentro de um certo intervalo.

Para se obter este valor deve-se determinar qual o intervalo desejado ( $x_i \leq x < x_{i+1}$ ) - intervalo fechado à esquerda - ou ( $x_i < x \leq x_{i+1}$ ) - intervalo fechado à direita -. Uma vez determinado o intervalo deve-se obter o valor  $n_i$  que, dentro do conjunto de valores experimentais, é o número de ocorrências de dados que estejam dentro do intervalo escolhido. Este valor  $n_i$  é chamado de frequência absoluta ou simplesmente frequência. Neste caso, o valor da ordenada será a frequência dos dados. Entretanto, para a maioria das aplicações práticas é mais interessante trabalhar com a frequência relativa<sup>1</sup>, que nada mais é do que razão entre a frequência e o número total de dados,  $N$ .

O histograma permite a visualização do comportamento dos dados, onde podem ser avaliadas o valor médio, a simetria da distribuição deles em relação ao valor médio, o valor da moda, o valor da mediana, a largura da distribuição (isto é, quão dispersos estão os resultados ao redor do valor médio) e distribuição ou flutuação dos valores medidos.

---

<sup>1</sup>Histograma com frequência relativa é importante quando se quer comparar conjunto de dados com diferentes  $N$ .

O tipo de distribuição dos dados é de suma importância em qualquer experimento, pois ela determinará toda a estatística a ser utilizada.

## A.1 Exemplo 1

A tabela A.1 apresenta as notas de 105 provas de alunos cujo pontuação máxima da prova é 11. O intervalo ou bin ou canal foi tomado como de largura 1,0, fechado a esquerda e iniciando no valor 0,0. A frequência de notas referente a tabela A.1 é apresentada na tabela A.1, onde na primeira linha é apresentado o início e o final do intervalo e na segunda os valores das frequências correspondentes. O intervalo é fechado à esquerda, por exemplo 4,0 é contado no intervalo de 4,0 à 5,0.

Tabela A.1: Notas de prova de 105 alunos. O valor máximo da nota da prova é de 11 pontos.

9,5	8,8	3,3	9,8	6,4	7,3	7,1	5,8	7	7,6
5,0	7,5	6,65	7,6	10,3	4,5	2,5	6,25	6,55	1,5
10,3	8,5	5,1	2,7	4,4	7,05	8,1	5,95	5,5	6,0
4,6	3,1	7,9	7,5	8,2	9,5	9,8	2,3	2,2	5,35
8,0	5,2	2,5	3,8	8,3	9,0	7,6	4,0	7,35	7,6
3,55	6,85	5,7	3,3	5,4	3,65	4,75	5,6	5,6	3,5
4,65	3,7	4,15	5,95	3,65	3,05	3,4	4,0	8,7	4,85
6,1	8,6	4,8	0,5	3,3	5,55	3,7	4,3	5	3,45
5,95	5,85	6,8	6,15	0,0	1,9	4,35	4,5	5,1	4,85
5,05	5,2	5,6	6,1	6,5	7,2	7,3	7,4	8,65	9,2
8,8	9,5	10,1	10,5	7,7					

Tabela A.2: Frequência de notas de prova de 105 alunos. O valor máximo da nota da prova é de 11 pontos.

intervalo	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
freqüência	2	2	5	14	14	20	11	16	10	7	4

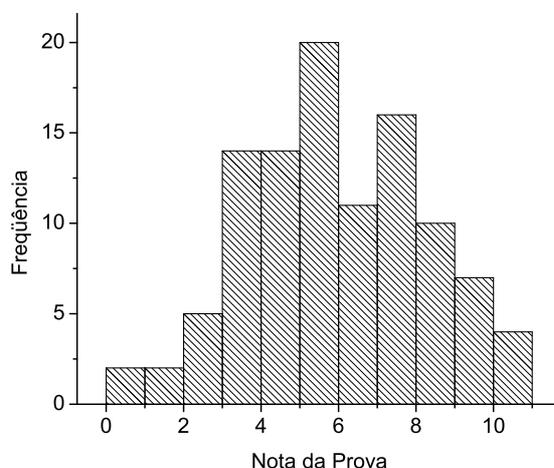


Figura A.1: *Frequência das notas de prova de 105 alunos. O valor máximo da nota da prova é de 11 pontos.*

No histograma da figura A.1 é possível afirmar que a distribuição dos valores das notas da prova pode ser simétrica. Isso poderia ser melhor avaliado se houvesse um número maior de provas. Porém, notas de prova não apresentam necessariamente uma distribuição simétrica.

## A.2 Exemplo 2

Considere o experimento em que 8 dados com duas faces marcadas são lançados simultaneamente  $n$  vezes. Os resultados são o número de faces marcadas,  $i$  (sucesso), que aparecem voltadas para cima,  $i$  pode ter os valores de 0, 1, ..., 7, 8. Terminado os lançamentos obtém-se o valor  $n_i$  de quantas vezes ocorreu o resultado  $i$ . A tabela A.2 apresenta os resultados obtidos para o experimento para 500 e 4500 lançamentos.

Pode-se perceber dos histogramas da figura A.2 e que a distribuição não é simétrica. Isso se deve ao fato que os resultados obtidos seguem uma distribuição binomial.

Tabela A.3: Freqüência de sucessos no lançamento de 8 dados com duas faces marcadas para 500 e 450 lançamentos.

$i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	total
$n_i$	21	78	129	151	80	34	7	0	0	500
$n_i$	191	675	1218	12577	7427	32277	837	12	0	4500

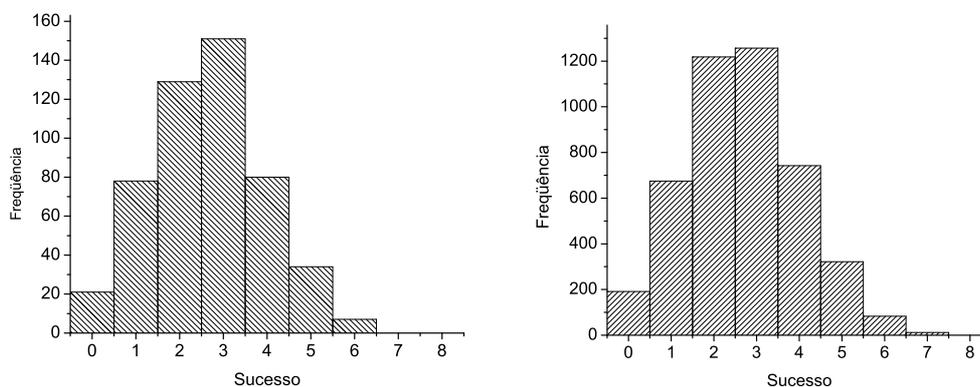


Figura A.2: Freqüência de sucessos no lançamento de 8 dados com duas faces marcadas para 500 lançamentos, histograma da esquerda, e 4500 lançamentos histograma da direita.

# Apêndice B

## Tabelas e Gráficos

### B.1 Tabelas

Tabelas devem sempre ser utilizadas para apresentar conjuntos de dados experimentais e resultados de cálculos repetitivos.

Uma tabela deve conter todas as informações necessárias para se entender o que significam as quantidades tabeladas, de maneira razoavelmente independente do texto principal.

No exemplo apresentado (Tabela B.1) o conteúdo da tabela é razoavelmente bem definido pela legenda e cabeçalhos, além de unidade e fator multiplicativo ( $10^{-11}$ ). Isto é, pode-se ter uma compreensão razoável da tabela, independentemente do texto principal.

Algumas regras gerais para se elaborar uma tabela são apresentadas a seguir. Os detalhes são exemplificados na tabela B.1.

- **Identificação**

As tabelas devem ser numeradas, pois isto permite identificá-las facilmente. Além da numeração, pode existir um título.

- **Legenda**

A legenda é o texto explicativo acima ou abaixo da tabela. Além da identificação e eventual título, a legenda pode ter informações adicionais que ajudem a entender o conteúdo da tabela.

Tabela B.1: *Alguns valores experimentais para a constante de gravitação ao longo dos anos.<sup>2</sup> A incerteza relativa ( $\sigma/G$ ) e a incerteza relativa percentual ( $100\sigma/G$ ) são também indicadas. As colunas 2 e 3 representam as mesmas grandezas em notações diferentes. A incerteza no valor da grandeza na coluna 3 é igual ao número decimal em que os dígitos indicados entre parênteses aparecem no final das casas decimais do valor da grandeza. Os valores devem ser apresentados com um espaço a cada três dígitos contados tanto a direita como a esquerda da vírgula decimal.*

<i>ano</i>	$(G \pm \sigma)$ $10^{-11} m^3 s^{-2} kg^{-1}$	$G(\sigma)$ $10^{-11} m^3 s^{-2} kg^{-1}$	$\varepsilon = \frac{\sigma}{G}$	$\varepsilon\%$ %
1 798	6,75 $\pm$ 0,05	6,75(5)	0,007 4	0,74
1 896	6,657 $\pm$ 0,013	6,657(13)	0,002 0	0,20
1 930	6,670 $\pm$ 0,005	6,670(5)	0,000 75	0,075
1 973	6,672 0 $\pm$ 0,004 1	6,672 0(41)	0,000 62	0,062
1 988	6,672 59 $\pm$ 0,000 85	6,672 5(85)	0,000 13	0,013

- **Cabeçalhos**

O conteúdo de cada coluna (ou linha) deve ser perfeitamente identificado por meio de cabeçalhos convenientes. Em geral, as unidades e eventuais fatores multiplicativos são indicados no cabeçalho.

- **Unidades**

As unidades e eventuais fatores multiplicativos devem ser explicitamente indicados. Evidentemente, as quantidades devem ser escritas incluindo somente os algarismos significativos, e zeros à esquerda devem ser evitados por meio de mudança de unidades ou usando fatores multiplicativos convenientes.

- **Incertezas**

As incertezas devem ser sempre explicitamente indicadas nas mesmas

colunas que as quantidades ou em colunas separadas. Além disso, as incertezas devem ser dadas com as mesmas unidades e fatores multiplicativos das quantidades. Quando a incerteza é a mesma para todos os dados de uma coluna, deve-se indicá-la no cabeçalho da tabela.

## B.2 Gráficos

O gráfico é um recurso que simplifica bastante a compreensão do comportamento de dados experimentais, devido à interpretação geométrica. Um gráfico permite interpretar mais facilmente o comportamento de pontos experimentais e observar tendências ou detalhes no conjunto de dados.

O exemplo simples considerado a seguir, permite verificar a simplicidade de interpretação de dados da tabela B.1, usando um gráfico.

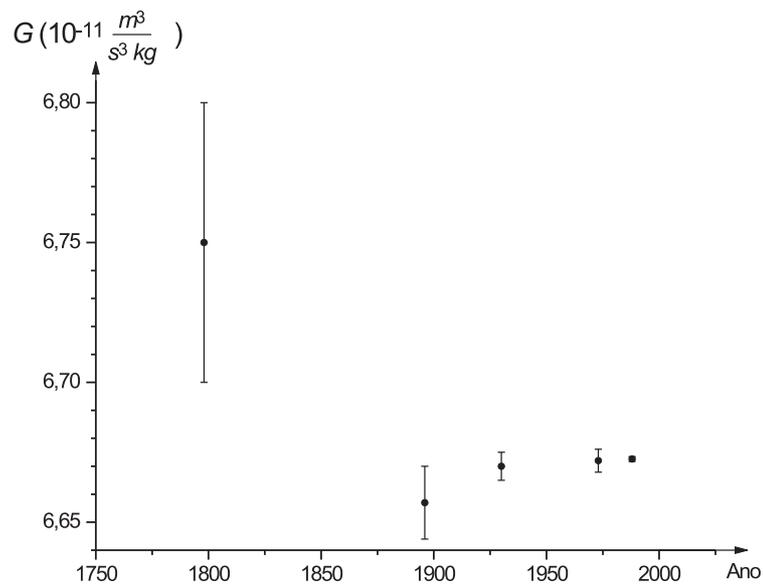


Figura B.1: Alguns valores experimentais para a constante de gravidade apresentados na tabela B.1.

Regras gerais para construção de gráficos são resumidas a seguir.



Figura B.2: Subdivisões inadequadas da escala.

- **Identificação e legenda**

Gráficos devem ser numerados para simplificar a identificação e podem ter títulos. A legenda é um texto explicativo que sempre deve acompanhar o gráfico. A legenda inclui a *identificação*, *eventual título* e *informações* adicionais que sejam importantes para se entender o gráfico.

- **Eixos coordenados**

As variáveis dos eixos de abcissas e ordenadas devem ser explicitamente indicadas, bem como unidades e eventuais fatores multiplicativos.

- **Escalas**

As escalas devem ser definidas identificando somente as marcações principais das escalas (1750, 1800, 1850, . . . , na figura B.1). As coordenadas dos pontos graficados *não devem* ser indicadas nos eixos.

Além disso, as escalas devem ser escolhidas de forma que os pontos graficados sejam razoavelmente bem distribuídos por toda área útil do gráfico.

Note que nem sempre é necessário mostrar a origem dos eixos coordenados no gráfico: se os pontos são relativamente próximos entre si e distantes da origem, é melhor não incluir a origem dos eixos do gráfico.

- **Subdivisão da escala**

A escala deve permitir leitura fácil, no sistema decimal. Isto ocorre se a menor divisão da escala é 1, 2 ou 5, ou estes números multiplicados por uma potência de 10 (por exemplo: 0,02 ou 0,005).

*Não são adequadas* subdivisões de escala tais como as apresentadas na Figura B.2. No primeiro exemplo dessa figura, a menor divisão da escala é 0,333. . . e a escala é muito difícil de ser lida. Para ver isto, basta tentar ler o valor de  $x$  assinalado. O segundo exemplo não é tão ruim, mas a leitura da escala também é inconveniente.

- **Barras de incerteza**

Num gráfico, as incertezas são indicadas por meio de *barras de incerteza*, também chamadas *barras de erro*. Barras de incerteza horizontais devem ser geralmente evitadas, transferindo-se a incerteza das mesmas para a variável

das ordenadas<sup>3</sup>. Assim, as barras de incertezas geralmente são verticais.

Em resumo, um gráfico com a respectiva legenda deve ser inteligível, mesmo quando isolado do texto principal e as escalas devem ser de fácil leitura.

Além das regras acima, deve ser observado que a área útil do gráfico não é lugar para se realizar cálculos, resolver equações ou escrever.

A figura B.2 é um exemplo de gráfico que mostra os vários detalhes. A menor divisão no eixo das abcissas é  $2\text{ m}$  e no eixo das ordenadas é  $0,05 \cdot 10^3 (\text{Nm}^{-2})$ .

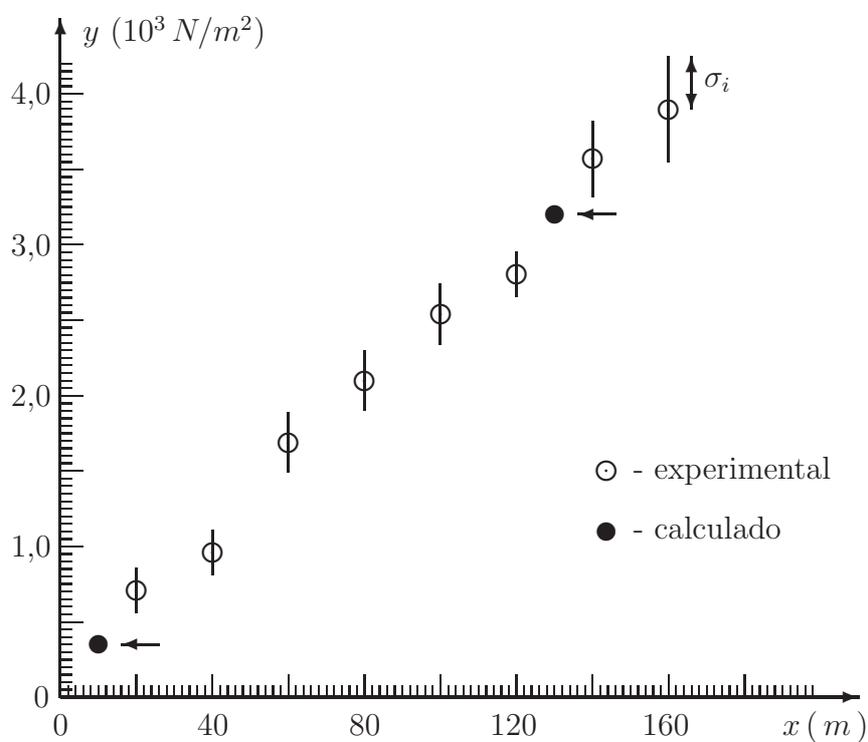


Figura B.3: Medições de  $y$  em função de  $x$ . Dois pontos calculados também são indicados no gráfico.

<sup>3</sup>Veja página 125 da referência [4].

### B.3 Equação da Reta num Plano

A figura B.3 mostra uma reta no plano  $x - y$ , que passa pelos pontos  $P_0$  de coordenadas  $(x_0, y_0)$  e  $P$  de coordenadas  $(x, y)$ . Qualquer ponto que pertença a reta deve obedecer a relação:

$$y = ax + b \tag{B.1}$$

onde  $a$  é chamado de *coeficiente angular da reta* e  $b$  é o seu *coeficiente linear*. Para obtenção dos dois coeficientes basta conhecer dois pontos da reta. Assim,

$$a = \frac{y - y_0}{x - x_0} \tag{B.2}$$

e

$$b = y_0 - ax_0 \tag{B.3}$$

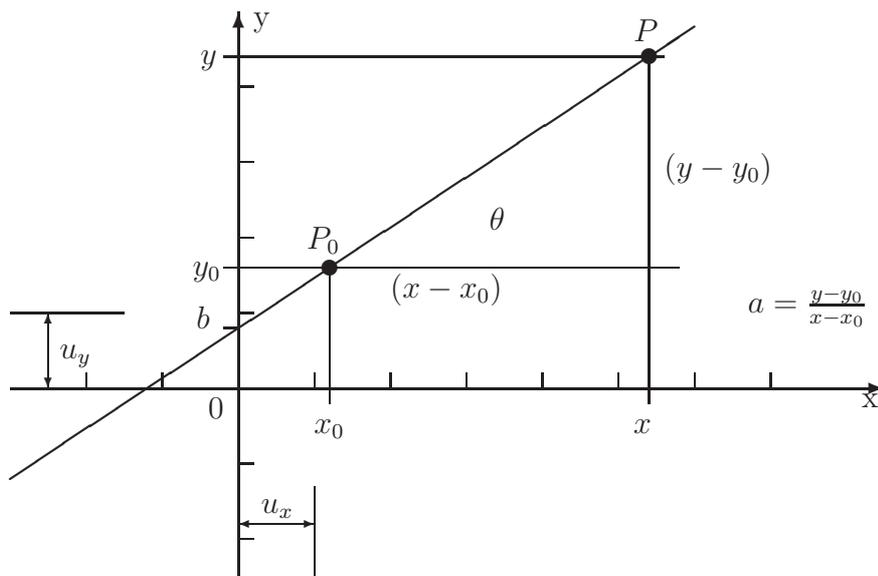


Figura B.4: Reta no plano  $x - y$ .

O coeficiente linear  $b$  pode (nos casos em que a escala escolhida permita) também ser lido diretamente do gráfico (veja figura B.3), na intersecção da reta com o eixo  $y$ .

O uso das equações B.2 e B.3 para o cálculo de  $a$  e  $b$  requer o uso de *dois pontos* quais sobre a reta e, na prática, deve-se escolhê-los o mais distantes possíveis para se obter melhor precisão.

## B.4 Escala Logarítmica

A escala logarítmica é construída de tal forma que se uma quantidade  $x$  é marcada na escala, o comprimento real é proporcional a  $\log x$ . Um trecho de uma escala log é mostrado na figura B.4.

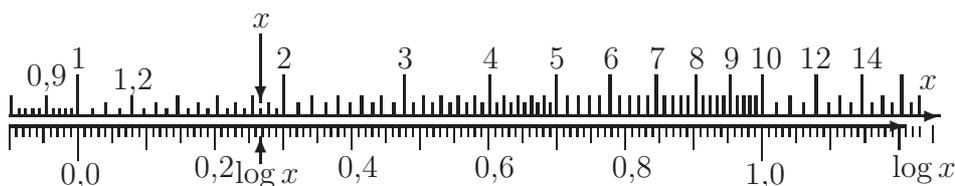


Figura B.5: Escala logarítmica.

A escala log é útil para fazer gráfico usando  $\log x$  como variável, pois dispensa o cálculo do logaritmo. Entretanto, deve ser observado que pode-se calcular  $\log x$  e assinalar o valor em uma escala linear<sup>4</sup>. No exemplo da figura B.4,  $x = 1,85$  pode ser marcado diretamente na escala log, ou o valor  $\log 1,85 = 0,267$  pode ser marcado diretamente em escala linear.

Para obter o logaritmo de um número a partir da escala log, deve ser lembrado que a unidade  $u$  da escala é a distância entre 1 e 10 (ver figura B.4).

---

<sup>4</sup>Escala logarítmica eram muito importantes no passado, pois não existiam calculadoras eletrônicas. O cálculo de logaritmo era feito usando tabelas. Atualmente, é mais simples calcular o logaritmo e marcar os valores em uma escala linear comum.

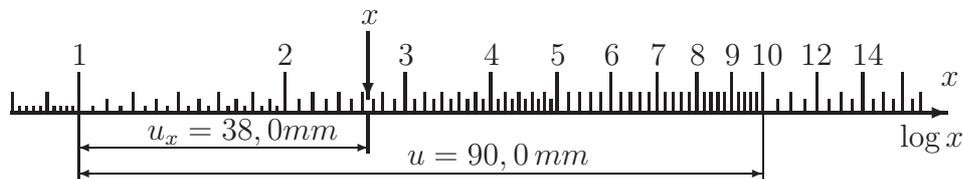


Figura B.6: Escala logarítmica.

Por exemplo, o logaritmo de  $x = 2,65$  é dado por<sup>5</sup>

$$\log x = \frac{u_x(\text{mm})}{u(\text{mm})} \cong \frac{38,0 \text{ mm}}{90,0 \text{ mm}} \cong 0,422$$

Um valor mais exato é  $\log 2,65 = 0,423 2$ .

## B.5 Gráfico Monolog

Um gráfico monolog é um gráfico com *escala linear* no eixo- $x$  das abcissas e *escala log* no eixo- $y$  das ordenadas, como mostrado na figura B.5. Este tipo de gráfico é bastante útil para uma função exponencial geral da forma

$$w = d c^{mx} \quad (\text{B.4})$$

onde  $c$ ,  $m$  e  $d$  são constantes. Calculando o logaritmo da expressão, obtém-se

$$\log w = ax + b \quad (\text{B.5})$$

onde

$$a = m \log c \quad \text{e} \quad b = \log d .$$

Assim, a equação B.5 pode ser escrita como uma equação de reta

$$y = ax + b \quad \text{onde} \quad y = \log w . \quad (\text{B.6})$$

Portanto, se a dependência entre  $w$  e  $x$  é da forma exponencial (III.5), é mais conveniente fazer um gráfico monolog de  $w$  em função de  $x$ . Isto significa um gráfico  $\log w \times x$ .

---

<sup>5</sup>As distâncias acima podem eventualmente ser distorcidas no processo de impressão da apostila.

A figura B.5 mostra um exemplo de gráfico monolog para atenuação radiativa.

Se um atenuador de espessura  $x$  é colocado entre uma fonte radiativa e um contador Geiger-Müller, o número de contagens em um determinado intervalo de tempo  $\Delta t$  é dado por

$$N = N_0 e^{-\alpha x} \quad (\text{B.7})$$

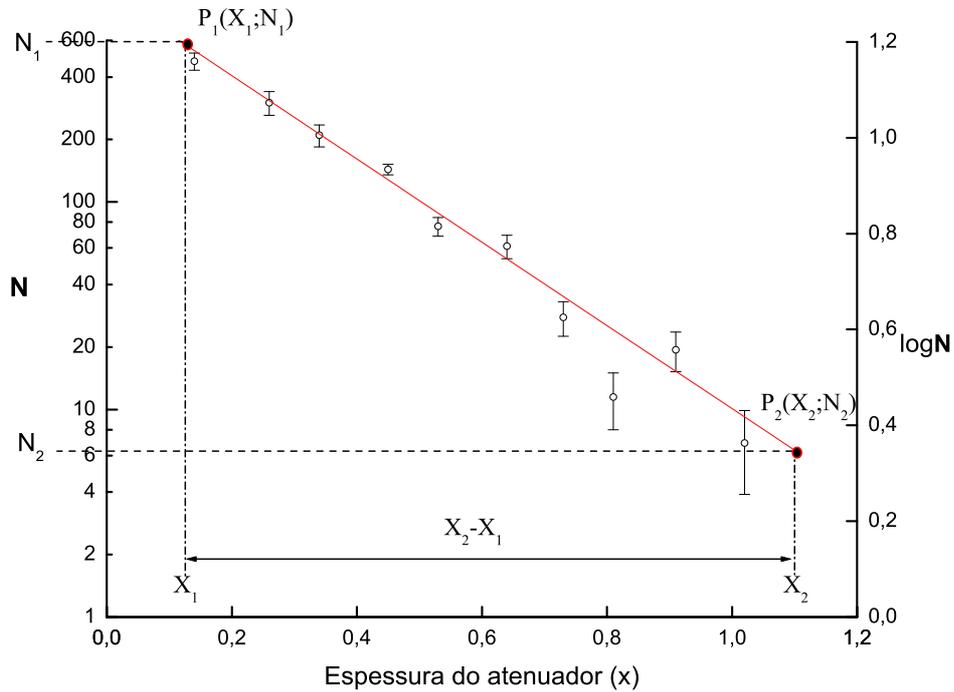


Figura B.7: Número de contagens  $N$  em função da espessura  $x$  do atenuador em gráfico monolog.

onde  $\alpha$  é uma constante. Calculando o logaritmo, obtém-se

$$\log N = \underbrace{-\alpha \log e}_a x + \underbrace{\log N_0}_b. \quad (\text{B.8})$$

Assim, o gráfico de  $\log N \times x$  deve ser uma reta com coeficiente angular

$$a = -\alpha \log e. \quad (\text{B.9})$$

O valor do coeficiente  $a$  pode ser obtido do gráfico, a partir de dois pontos quaisquer  $P_1$  e  $P_2$  :

$$a = \frac{\log N_2 - \log N_1}{x_2 - x_1} = \frac{v/u}{x_2 - x_1} \quad (\text{B.10})$$

onde  $u$  é o comprimento (em milímetros) da unidade na escala  $\log$  e  $v$  é a distância(em milímetros) entre as coordenadas dos pontos na escala  $\log$ , com sinal adequado.

## B.6 Gráfico Dilog

O gráfico dilog é um gráfico com escalas  $\log$  em abcissas e em ordenadas, como mostrado na figura B.6. Este gráfico é útil para função da forma

$$w = cz^a \quad (\text{B.11})$$

onde  $a$  e  $c$  são constantes. Calculando o logaritmo da expressão, obtém-se

$$\log w = a \log z + \log c \quad (\text{B.12})$$

ou

$$y = ax + b \quad (\text{B.13})$$

onde

$$y = \log w, \quad x = \log z \quad \text{e} \quad b = \log c.$$

Assim, o gráfico de  $\log w \times \log z$  deve ser uma reta com coeficiente angular  $a$ .

O valor de  $a$  pode ser obtido do gráfico, a partir de dois pontos quaisquer  $P_1$  e  $P_2$  :

$$a = \frac{\log w_2 - \log w_1}{\log z_2 - \log z_1} = \frac{v/u_y}{h/u_x} \quad (\text{B.14})$$

onde  $u_x$  e  $u_y$  são as unidades (em milímetros) das escalas  $\log$  horizontal e vertical, e  $h$  e  $v$  são as distâncias (em milímetros) entre as coordenadas dos pontos nas escalas  $\log$  horizontal e vertical, respectivamente. As distâncias  $h$  e  $v$  devem ser consideradas com os sinais adequados.

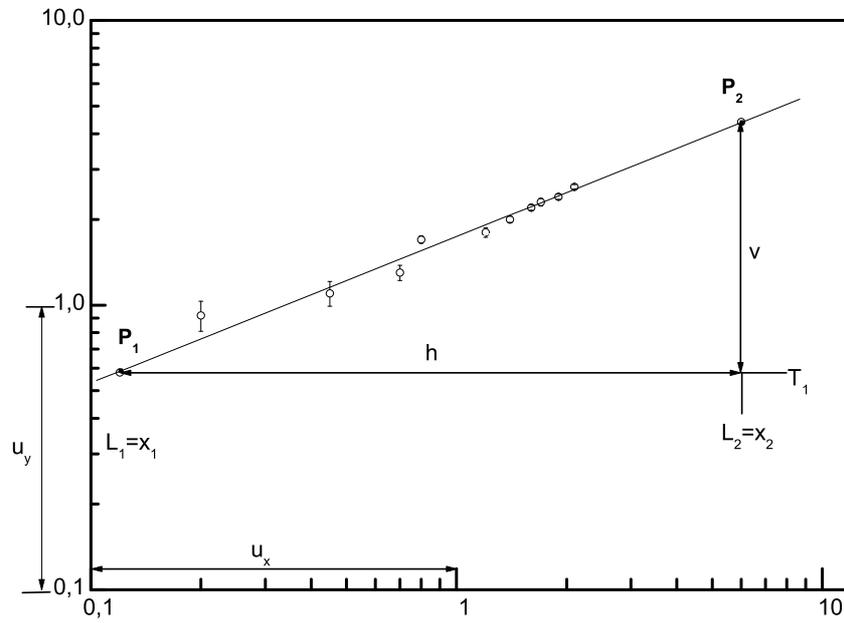


Figura III.8: Período  $T$  de um pêndulo simples em função do comprimento  $L$  em gráfico dílog

Figura B.8: *Período  $T$  de um pêndulo simples em função do comprimento  $L$  em gráfico dílog.*

# Apêndice C

## Tratamento de Dados - Introdução

### C.1 Valor Médio

Dado um conjunto de valores obtidos da medida de uma grandeza, um conceito de suma importância é o valor médio. Em muitos casos (mas não todos) este é o valor que melhor representa um conjunto de dados.

Qualquer grandeza física possui um valor verdadeiro, o qual jamais poderá ser conhecido. O valor médio também pode ser entendido como sendo a melhor estimativa para o valor verdadeiro da grandeza medida.

O valor médio (média aritmética) dos dados pode ser obtida por:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (\text{C.1})$$

onde  $x_i$  são os dados obtidos e  $N$  é a quantidade de dados.

### C.2 Variância Amostral

O conceito da largura do histograma,  $\ell$ , é associado à flutuação dos valores experimentais em relação ao valor médio da grandeza medida. A dispersão dos valores experimentais pode ser medida de várias maneiras como: pela amplitude dos dados, pela variância ou pelo desvio padrão.

A variância amostral  $\sigma^2$  é definida por C.2. Note que, neste caso como em todos os outros, o valor obtido a partir desta equação é a variância da amostra

em estudo, ou uma estimativa da variância populacional. Para obtermos a variância populacional seria necessário medir toda a população.

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_1^N (x_i - \bar{x})^2 \quad (\text{C.2})$$

onde  $\bar{x}$  é a média aritmética das  $N$  medições de  $x_i$ . O parâmetro  $s^2$ , variância amostral, é a maneira rigorosa de obter a dispersão de dados em torno do seu valor médio.

O desvio padrão amostral  $s$  é obtido a partir da raiz quadrada da variância e é equivalente à metade da largura do histograma a aproximadamente 60% de sua altura. Está claro que quanto mais as medidas flutuarem ao redor do valor médio  $x$ , isto é, quanto mais  $x_i$  se afastar, em média,  $\bar{x}$ , tanto maior será  $\sum_1^N (x_i - \bar{x})^2$  e conseqüentemente  $s$ .

Note que, o crescimento do fator é proporcional ao crescimento do número de dados, ou seja, a partir de um número de dados suficientemente grande, o desvio padrão não se altera mais. O desvio padrão pode ser interpretado da seguinte forma: Podemos dizer que a probabilidade  $P$  de que um dado tomado ao acaso esteja dentro do intervalo  $[\bar{x} - s, \bar{x} + s]$  é de, aproximadamente, 67,3%. A probabilidade  $P$  de que um dado tomado ao acaso esteja dentro do intervalo  $[\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s]$  é de, aproximadamente, 95,4%, e a probabilidade  $P$  de que um dado tomado ao acaso esteja dentro do intervalo  $[\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s]$  é de, aproximadamente, 99,7%. Note também que a probabilidade que um dado escolhido ao acaso seja maior que  $\bar{x} + 3s$  ou menor que  $\bar{x} - 3s$  é menor do que 0,3%.

Podemos também ver que dentro do intervalo deverão ser encontrados aproximadamente 67,3% dos dados obtidos, e este intervalo é a largura  $\ell$ , do histograma.

Uma vez conhecida a variância amostral, como obter a estimativa da variância da média? Primeiramente devemos retornar ao próprio conceito de média. Qualquer grandeza medida possui um valor real, porém não é possível saber exatamente qual é este valor. A média é o valor obtido experimentalmente que mais se aproxima do valor verdadeiro de uma grandeza. Quão próximo o valor médio é do valor verdadeiro depende do número de medidas.

Como visto anteriormente, a variância é uma grandeza que depende unicamente do fenômeno medido, e está relacionado à variação dos dados em relação a média, mas qual a variação da média em relação ao valor real medido? Qual é o erro cometido ao se medir um número finito de dados?

A variância da média é dada por:

$$s_m^2 = \frac{s^2}{N} \quad (\text{C.3})$$

onde  $N$  é o número de repetições realizadas.

O desvio padrão do valor médio é obtido através da raiz da variância do valor médio dada por  $s_m$  e costuma ser chamada de incerteza da média<sup>3</sup> ou erro padrão, no caso em que não haja outros tipos de incertezas envolvidas.

O desvio padrão do valor médio pode ser entendido da seguinte forma: A probabilidade  $P$  de que o valor real da medida esteja dentro do intervalo  $[\bar{x}_i - s, \bar{x}_i + s]$  é de, aproximadamente, 67,3%. A probabilidade  $P$  de que o valor real da medida esteja dentro do intervalo é de, aproximadamente, 95,4%, e a probabilidade  $P$  de que o valor real da medida esteja dentro do intervalo é de, aproximadamente, 99,7%. Note também que a probabilidade que o valor real da grandeza seja maior que ou menor que é menor do que 0,3% (este valor é conhecido como nível de significância).

### C.3 Incerteza Instrumental

Até este momento foram estudadas apenas as fontes de incerteza aleatórias que permeiam qualquer medida de uma grandeza física, porém o próprio instrumento de medição é uma fonte de incerteza. Esta fonte de incerteza se repete sistematicamente de em todos os dados coletados. Como levar em consideração a influência do erro instrumental no erro final da grandeza medida?

Fazendo uma soma de variâncias, temos:

$$s_f^2 = s_m^2 + s_i^2, \quad (\text{C.4})$$

portanto,

$$s_f = \sqrt{s_m^2 + s_i^2}. \quad (\text{C.5})$$

A variância final da média e a soma entre a variância da média e a variância instrumental. O erro final da média é obtido pela raiz quadrada da variância final da média.

## C.4 Compatibilidade Entre Dados

A comparação entre valores experimentais obtidos para uma mesma grandeza é realizada utilizando o conceito de compatibilidade<sup>1</sup>. A compatibilidade entre dois valores experimentais é expressa pela probabilidade da diferença entre esses dois valores,  $x_i - x_j$ , se encontrar no intervalo de confiança  $[ks, +ks]$ , onde  $s$  é a incerteza da diferença dos valores <sup>2</sup>  $x_i$  e  $x_j$ ,  $s = \sqrt{s_{x_i}^2 + s_{x_j}^2}$ , e  $k$  é fator de abrangência<sup>3</sup> [11].

Em primeira aproximação podemos utilizar uma simplificação para a compatibilidade que é a seguinte: caso a intersecção entre os intervalos se o valor  $[x_i - ks, x_i + ks]$  e  $[x_j - ks, x_j + ks]$  for vazia as duas grandezas comparadas não são compatíveis, caso contrário, podem ser consideradas compatíveis. As probabilidades estão associadas ao fator de abrangência  $k = 1 \approx 70\%$ ,  $k = 2 \approx 95\%$ ,  $k = 3 \approx 99\%$ . Graficamente isso pode ser visualizado construindo, em escala, os intervalos citados sobre uma reta e verificando se os mesmos se há superposição entre eles (há compatibilidade) ou não (não há compatibilidade)

## C.5 Média Ponderada

Quando realizamos diversas medidas de uma mesma grandeza  $y_i$  através de métodos diferente, cada medida terá uma incerteza  $s_{y_i}$  diferente. Nesse caso, para obtermos a melhor aproximação desta grandeza,  $y$ , não podemos fazer uma média simples dos diferentes valores. Cada valor obtido deve então ter um determinado *peso estatístico*. Este peso deve estar diretamente relacionado com os valores das respectivas incertezas. A melhor aproximação para essa grandeza é dada pela média ponderada das  $m$  medidas realizadas, definida por

---

<sup>1</sup>Não há sentido em se usar o conceito de igualdade porque devido a flutuação estatística dos dados a probabilidade de se encontrar dois valores numéricos iguais é praticamente nula. É claro, desde que o instrumento de medida for adequado para realizar a medida.

<sup>2</sup>Veja a seçãoC.6 que trata da obtenção da incerteza para grandezas obtidas a partir de grandezas medidas para algumas situações específicas.

<sup>3</sup>Em física, geralmente utiliza-se a incerteza expandida com fator de abrangência 3, ou seja, deve-se multiplicar a incerteza final por 3 para compará-la com outra grandeza, porém este valor é arbitrário e pode mudar de acordo com o pesquisador.

$$y = \frac{\sum_{i=1}^m p_i y_i}{\sum_{i=1}^m p_i} \quad (\text{C.6})$$

onde

$$p_i = \frac{1}{s_{y_i}^2} \quad (\text{C.7})$$

é o *peso estatístico* de cada resultado individual. As expressões acima somente são corretas se as incertezas  $\sigma_i$  são entendidas como *incertezas estatísticas*.

A incerteza  $s_y$  da grandeza  $y$  pode ser obtida através de propagação de incertezas (veja a Seção C.6) e é dada por

$$s_y = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^m p_i}} \quad (\text{C.8})$$

## C.6 Propagação de Incertezas - Caso Particular

Nas experiências que precederam esta atividade, vocês foram convidados a se convencerem que um valor, resultante de medições executadas para uma grandeza qualquer, só contém informação confiável se acompanhado da incerteza correspondente (uma vez convencionalizado o nível de confiança para o respectivo intervalo<sup>4</sup>). Aprenderam, a seguir, que, feita uma operação matemática com este valor, a incerteza deve ser propagada para o resultado, por exemplo, por um método gráfico. A pergunta que agora se coloca é a seguinte:

- Como poderíamos obter esse resultado de uma maneira mais precisa e genérica se o cálculo da incerteza de uma determinada grandeza envolvesse uma ou mais variáveis resultantes de medições?

---

<sup>4</sup>O nível de confiança usual em Física é de 68,39%, o que corresponde a um intervalo de  $\pm 1$  desvio padrão em torno do valor representativo da grandeza

Tomemos como exemplo, o volume de um cilindro

$$V = \pi \frac{\phi^2}{4} h \quad (\text{C.9})$$

onde  $\phi$  é o diâmetro e  $h$  a altura, do cilindro.

Supondo a altura  $h$  constante, isto é, se, hipoteticamente, conhecêssemos perfeitamente a altura, ou seja, se esta tivesse incerteza desprezível, poderíamos então analisar a influência da incerteza no diâmetro  $s_\phi$  sobre a incerteza no volume  $s_V$  simplesmente fazendo o rebatimento no gráfico, como mostrado na Figura C.1.

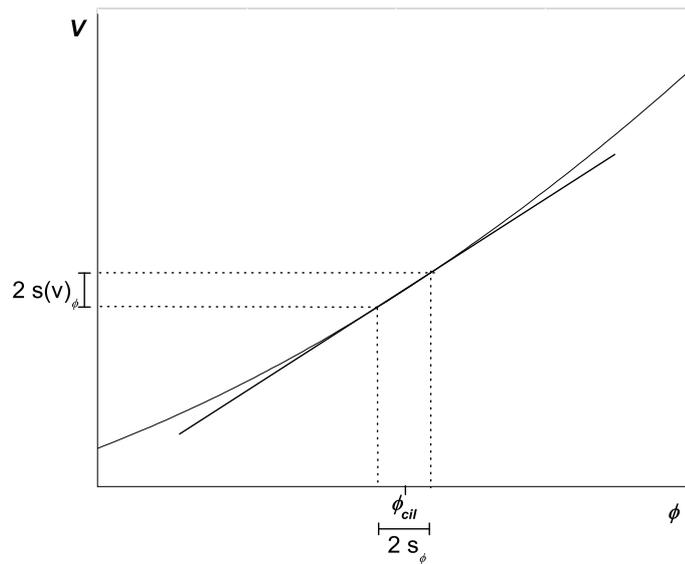


Figura C.1: Volume em função do diâmetro do cilindro. O segmento de reta corresponde a reta tangente à curva  $V = V(\phi)$  no ponto  $\phi = \phi_{cil}$ . O ponto de encontro da abscissa e da ordenada não corresponde ao ponto  $(0,0)$ .

Através do gráfico podemos notar que, se  $s_\phi \ll \phi$ , o valor de  $s_{V, \phi}$ , isto é, o valor da incerteza em  $V$  devido a incerteza em  $\phi$ , não será muito diferente se tomarmos a projeção do intervalo correspondente na *tangente* à curva no ponto  $\phi$ ,  $2s(\phi)$ . Isto é:

$$s_{V, \phi} = \left( \frac{\partial V}{\partial \phi} \right)_{h=cte=h_{cil}} s_\phi . \quad (\text{C.10})$$

O símbolo

$$\left( \frac{\partial V}{\partial \phi} \right)_{h=cte=h_{cil}} s_\phi \quad (\text{C.11})$$

é a derivada de  $V$  em relação a  $\phi$ , considerando a outra variável  $h$  no seu valor de referência,  $h_{cil} = \text{constante}$ . Esse símbolo indica o que é chamado de *derivada parcial* de  $V$  em relação a  $\phi$ . De modo geral, a referência à(s) variável(váriáveis) mantida(s) constante(s) é omitida, para simplificar a notação. De maneira análoga podemos analisar a influência da incerteza de  $h$  em relação a incerteza de  $V$ , tomando assim a variável  $\phi = \phi_{cil} = cte$ , veja a Figura C.2. Neste caso,

$$s_{V, h} = \left( \frac{\partial V}{\partial h} \right)_{\phi=cte=\phi_{cil}} s_h . \quad (\text{C.12})$$

Desta forma, sabemos agora como cada uma das incertezas nas duas grandezas medidas,  $\phi$  e  $h$ , influem, separadamente, no volume. Para avaliar o efeito conjunto precisamos de uma regra para combiná-las. Não seria razoável somá-las simplesmente, porque isto implicaria dizer que cada vez que o efeito da incerteza sobre  $\phi$  estivesse no seu extremo, o daquela em  $h$  também teria que estar. Menos sentido, ainda, faria combiná-las por subtração. Vocês aprenderão, mais tarde, que existem fundamentos teóricos que recomendam a combinação por quadratura, o que supõe que a grandeza  $\phi$  é obtida de forma independente de  $h$ , o que passa a ser condição para valer a fórmula geral de propagação de incertezas:

$$s_V = \sqrt{[s_{V, \phi}]^2 + [s_{V, h}]^2} \quad (\text{C.13})$$

Consideremos agora a função  $f(x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, x_N)$ . Esta função depende das  $N$  medidas experimentais, representadas por  $x_j$ , onde  $j = 1, 2, \dots, N$ .

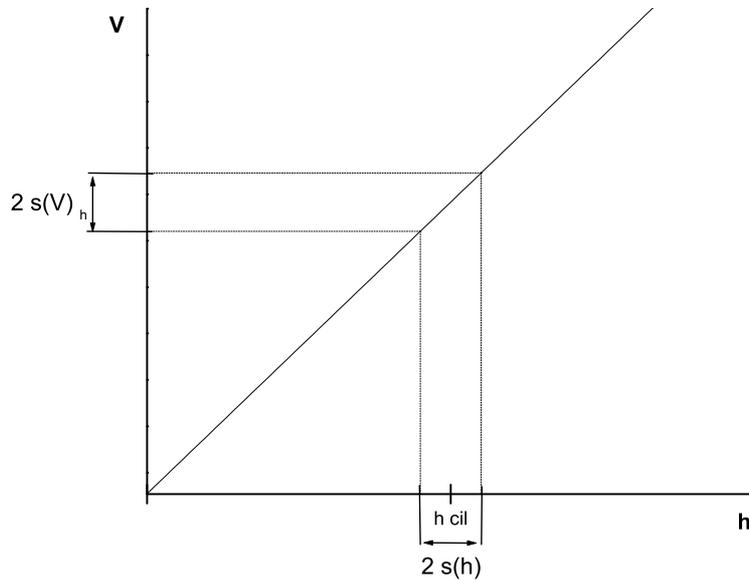


Figura C.2: *Volume em função da altura do cilindro.*

Suas incertezas podem ser escritas como  $s_{x_j}$ . Nós escrevemos a função  $f$  de maneira abstrata, mas ela poderia ser, por exemplo, o volume de uma esfera, que depende apenas de uma medida experimental, o volume de um cone, que depende de duas ou até mesmo o volume de um paralelepípedo, que depende de três valores experimentais.

Para que possamos determinar a contribuição de cada  $s_{x_j}$  para a incerteza de  $f$  devemos verificar se as diversas medidas experimentais  $x_j$  são independentes, o que significa que a variação de uma delas não acarreta na variação de qualquer outra. Verificada a independência, a incerteza em  $f$  devida à incerteza em  $x_j$  pode ser escrita como

$$s_{f, x_j} = \left| \frac{\partial f(x_j)}{\partial x_j} \right| s_{x_j} . \quad (\text{C.14})$$

Por exemplo, quando colocamos o valor de  $j$  igual a 2 temos a contribuição da incerteza de  $x_2$  para incerteza de  $f$ .

Para calcularmos a incerteza final de  $f$  é necessário que combinemos as diversas contribuições. Como estas são independentes temos

$$s_f = \sqrt{(s_{f, x_1})^2 + (s_{f, x_2})^2 + \dots + (s_{f, x_N})^2} . \quad (\text{C.15})$$

Podemos escrevê-la, também, como

$$s_f = \sqrt{\left(\frac{f(x_1)}{x_1} s_{x_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f(x_N)}{\partial x_N} s_{x_N}\right)^2} . \quad (\text{C.16})$$

Especificamente, para o cilindro temos:

$$s_V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial \phi} s_\phi\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial h} s_h\right)^2} \quad (\text{C.17})$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\pi}{4} h 2 \phi s_\phi\right)^2 + \left(\frac{\pi}{4} \phi^2 s_h\right)^2} . \quad (\text{C.18})$$

Vocês verão que, para expressões que envolvam multiplicações, divisões e/ou potenciações, os cálculos podem ser facilitados, cancelando alguns termos. Assim,

$$\frac{s(V)}{V} = \sqrt{\left(\frac{\frac{\pi}{4} h 2 \phi^2 s_\phi}{\frac{\pi}{4} h \phi^2}\right)^2 + \left(\frac{\frac{\pi}{4} \phi^2 s_h}{\frac{\pi}{4} h \phi^2}\right)^2} \quad (\text{C.19})$$

realizando as simplificações

$$\frac{s(V)}{V} = \sqrt{\left(\frac{2 s_\phi}{\phi}\right)^2 + \left(\frac{s_h}{h}\right)^2} . \quad (\text{C.20})$$

Isto é, nestas situações, trabalhamos com vantagem com as incertezas relativas,

$$\frac{s_x}{x} . \quad (\text{C.21})$$

## Apêndice D

# Distribuição Gaussiana ou Normal

Pode-se estabelecer a hipótese de que exista, para uma variável contínua  $x$ , uma função  $G(x)$ , chamada *função densidade de probabilidade*, que governa a distribuição dos dados em uma experiência. Essa função está relacionada ao fato de haver uma certa probabilidade de encontrar um resultado para uma medição (dado) em um determinado intervalo do histograma. Como esta probabilidade (ou *chance*),  $\Delta P$ , de um resultado experimental estar em um intervalo de largura  $\Delta x$  cresce com o aumento dessa largura, pode-se escrever

$$\Delta P \cong G(x)\Delta x \quad . \quad (D.1)$$

Obtém-se, dessa forma, uma estimativa da probabilidade de um resultado estar no intervalo  $\Delta x$ . Cabe também salientar, como pode ser observado na Equação D.1, que probabilidade,  $\Delta P$ , e a densidade de probabilidade,  $G(x)$ , são diferentes, apesar de diretamente relacionadas. A probabilidade é representada no histograma por frequência relativa ( $N_y/N$ ).

Em grande parte dos casos, os dados histogramados apresentam-se centrados em torno de um certo valor e espalhados de forma simétrica. Uma função densidade de probabilidade em que os dados se distribuem de forma simétrica em relação ao valor médio  $\mu$ , mas com uma concentração maior de dados em torno desse valor, é a distribuição gaussiana (ou distribuição

normal). Essa é uma distribuição que parece explicar muitas situações do dia a dia, além de permitir a interpretação de resultados de experimentos em Física<sup>1</sup>. A função gaussiana é dada por

$$G(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} . \quad (\text{D.2})$$

A probabilidade,  $\Delta P$ , pode ser escrita como:

$$\Delta P = \frac{\Delta x}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (\text{D.3})$$

onde  $\mu$  é o valor médio e  $\sigma$  o desvio padrão dos dados se for tomada uma amostra de tamanho infinito, isto é ambos correspondem aos parâmetros que caracterizam a população. Como, na maioria das situações experimentais não é possível fazer medições da população como um todo, utilizamos amostras para estimar esses parâmetros. A estimativa para  $\mu$  é o valor médio amostral  $\bar{x}$ , isto é:

$$\mu \sim \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} , \quad (\text{D.4})$$

onde  $N$  é o número total de dados, e a estimativa para o desvio padrão  $\sigma$  é o desvio padrão amostral  $s$ :

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}} . \quad (\text{D.5})$$

Outra característica importante da curva normal são os chamados intervalos de confiança. Se calcularmos a área sob a curva normal contida entre  $\bar{x} - \sigma$  e  $\bar{x} + \sigma$ , tem-se aproximadamente 68,3% da área total; do mesmo modo, entre  $\bar{x} - 2\sigma$  e  $\bar{x} + 2\sigma$ , tem-se aproximadamente 95,4% e, entre  $\bar{x} - 3\sigma$  e  $\bar{x} + 3\sigma$ , tem-se 99,7%, ou seja, praticamente a área toda.

---

<sup>1</sup>Há uma frase sobre a gaussiana, elaborada pelo astrônomo Lippman no século XVIII: “... lei em que todos crêem. Os experimentais pensam que é um teorema matemático e os matemáticos que é um fato experimental ” (citada por Vanin e Gouffon (Referência 6)).

A curva gaussiana é uma ferramenta de interpretação de dados bastante útil. Permite, por exemplo, analisar algumas características apresentadas por resultados de histogramas. Para facilitar a sua utilização, pode-se definir a *distribuição gaussiana padrão*

$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad (\text{D.6})$$

com

$$\Delta P(x) = \frac{\Delta x}{s} g(z) \quad (\text{D.7})$$

onde foi feita a mudança de variável  $z = \frac{(x-\bar{x})}{s}$ . Neste caso, obtém-se uma simplificação da distribuição gaussiana de média  $\bar{x}$  e desvio padrão  $s$  para uma distribuição de média  $z = 0$  e desvio padrão 1,000. Alguns valores para  $g(z)$  podem ser encontrados na Tabela D.1. A Figura D.1 contém uma ilustração da gaussiana padrão.

$z$	$g(z)$
0	0,398942
0,25	0,386668
0,5	0,352065
1,0	0,241971
1,5	0,129518
2,0	0,053991
2,5	0,017528
3,0	0,004432

Tabela D.1: Tabela de valores para a distribuição normal padrão,  $g(z)$ , lembrando que essa é simétrica, ou seja,  $g(z) = g(-z)$ .

Para colocar a curva gaussiana sobre um histograma basta calcular  $x$  para cada valor de  $z$  da tabela D.1, onde

$$z = \frac{(x - \bar{x})}{s}, \quad (\text{D.8})$$

com  $x = \bar{x} \pm sz$ , e valor  $\Delta P(x)$  neste ponto  $x$  é dado pela equação D.7.

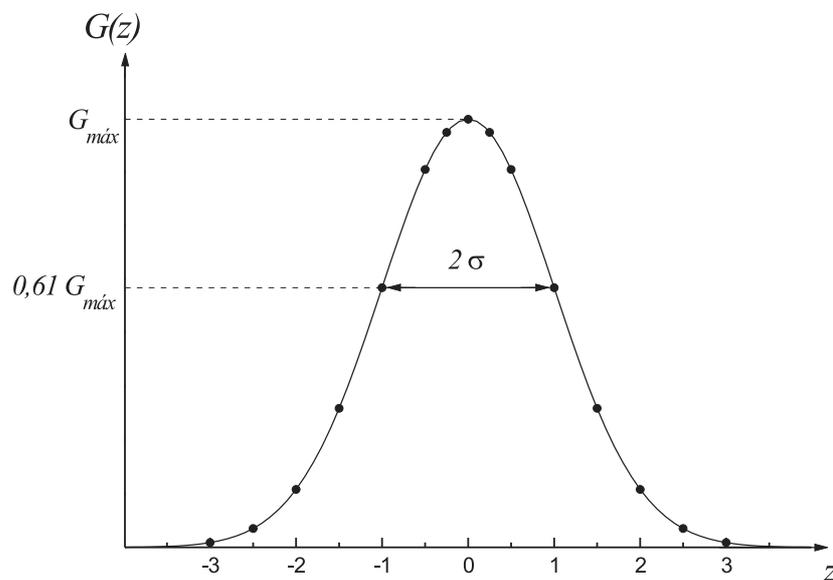


Figura D.1: Ilustração da curva gaussiana padrão.

O valor assim obtido é a estimativa gaussiana para a probabilidade, que pode ser comparado à frequência relativa obtida experimentalmente, no respectivo ponto  $x$ .

# Apêndice E

## Fenômenos Oscilatórios

A natureza é rica em fenômenos oscilatórios<sup>1</sup>: o vai-vem do balanço da criança; o sobe-desce de uma folha num lago varrido por pequenas ondas; o tic-tac do relógio; o sobe-desce da mola de um carro numa estrada esburacada; mas, também, fenômenos menos óbvios, tais como: a variação da tensão na energia elétrica que abastece nossas casas, a luz que ilumina nosso cotidiano, o som que é o veículo principal da nossa interação social... Por mais díspares que estes fenômenos pareçam à primeira vista, algo eles têm em comum: os valores da grandeza observada *oscilam* ao redor de um ponto ou de uma linha, que lhes serve de referência. Observados durante longos intervalos de tempo, notamos que vários desses movimentos diminuem de amplitude e finalmente cessam, porque estão sujeitos a efeitos resistivos, permanecendo, então, próximos às referências citadas.

De fato, existe uma razão física para a ocorrência de movimentos oscilatórios (não induzidos por uma força externa variável): os sistemas que oscilam apresentam uma situação de equilíbrio e são sujeitos a uma *força restauradora*, a qual tende a trazê-los de volta a esta situação, após serem perturbados momentaneamente. A oscilação se mantém enquanto a energia fornecida pelo agente perturbador não tiver sido dissipada pelos efeitos resistivos. Quase todos os fenômenos oscilatórios são também periódicos: o movimento se repete nas mesmas condições (ou quase!) a intervalos fixos de tempo. Seja  $T$  este intervalo, chamado de *período* do movimento oscilatório. A *frequência*,  $f$ , significa quantas vezes o fenômeno ocorre em dada unidade

---

<sup>1</sup>Veja, por exemplo, o capítulo 3 da referência [10].

de tempo. Logo,

$$f = \frac{1}{T} ;$$

a frequência é, portanto, medida em  $s^{-1} = Hz$ .

É quase intuitivo que o valor do período (ou da frequência) deva depender das características físicas do sistema oscilatório, sendo o período tanto menor quanto mais intensa a força restauradora em relação à *inércia* do sistema.

# Apêndice F

## Dimensões Fractais

Bons exemplos para um primeiro contato com a geometria fractal são as figuras conhecidas como **Curvas de Koch**. Este exemplo é unidimensional contendo, porém, todos os elementos básicos para a compreensão da geometria fractal.

A curva conhecida como triádica de Koch é mostrada na figura F.1. A construção desta curva parte de um segmento unitário (geração 0). Introduce-se um *joelho* triangular neste segmento, resultando em quatro segmentos de comprimento  $1/3$  cada (geração 1). O comprimento total da curva fragmentada é  $(4/3)^1$ . Repetindo-se o processo em cada um dos quatro segmentos (geração 2), o comprimento total da curva obtida é  $(4/3)^2$ . Após  $n$  aplicações do mesmo processo, a curva obtida tem comprimento  $(4/3)^n$ . A dimensão fractal é definida como

$$D = \frac{\ln y}{\ln x}, \quad (\text{F.1})$$

onde, no caso unidimensional,  $x$  é o número de segmentos em que o segmento unitário original foi subdividido e  $y$  é o número de segmentos utilizados para construir a figura fragmentada. Portanto, no exemplo da triádica de Koch

$$D = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1,2618. \quad (\text{F.2})$$

Na figura F.1 mostram-se curvas de Koch para  $n = 0$  a  $5$  ( $n$  é chamado *número da geração*). Suponha que se quer medir o comprimento total da linha correspondente a  $n = 5$  com uma régua milimetrada. Com tal instrumento é impossível considerar todos os contornos e provavelmente a medição

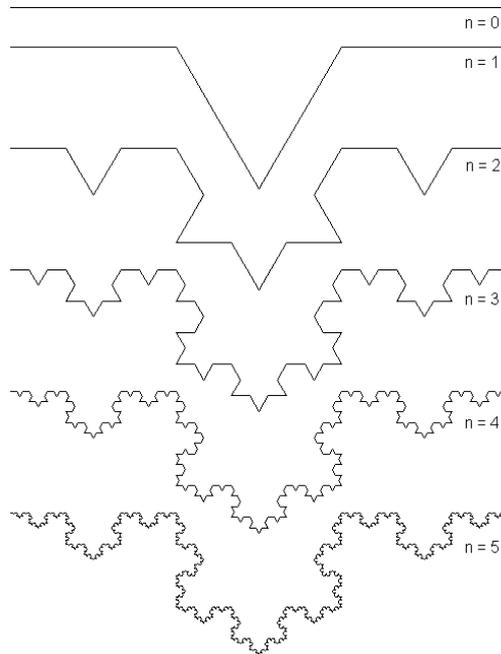


Figura F.1: *Curvas de Koch para gerações de 1 a 5. Figura obtida da Referência [12].*

mais detalhada forneceria o comprimento da curva de geração  $n = 4$ . Suponha ainda que se dispõe de uma régua que tenha marcas a cada centímetro. Neste caso, uma medição precisa permitiria obter o comprimento da curva de geração  $n = 2$ . Verifica-se, portanto, que o comprimento medido dependerá da escala utilizada.

Chamando a menor escala (comprimento de cada segmento na geração  $n$ ) de  $\eta$ , podemos escrever a relação entre  $\eta$  e  $n$

$$\eta = (1/3)^n . \tag{F.3}$$

Portanto, a partir de

$$\ln(\eta) = \ln(1/3)^n = n \ln(1/3) = -n \ln 3 , \tag{F.4}$$

obtém-se a relação entre a geração e a escala correspondente

$$n = -\frac{\ln(\eta)}{\ln 3} . \quad (\text{F.5})$$

O comprimento total da curva,  $L(\eta)$ , para a geração  $n$  correspondente à menor escala  $\eta$  pode então ser expresso como

$$L(\eta) = (4/3)^n = (4/3)^{-\frac{\ln(\eta)}{\ln 3}} = (e^{\ln \frac{4}{3}})^{-\frac{\ln(\eta)}{\ln 3}} = e^{-\ln \frac{4}{3} \cdot \frac{\ln(\eta)}{\ln 3}} \quad (\text{F.6})$$

e finalmente

$$L(\eta) = e^{-\frac{\ln(\eta)}{\ln 3}(\ln 4 - \ln 3)} = \eta^{(1-D)} . \quad (\text{F.7})$$

Na equação F.7,  $D$  é a dimensão fractal. Como necessariamente  $D > 1$  e  $\eta < 1$ , percebe-se que  $L(\eta)$  aumenta conforme  $\eta$  diminui, ou seja, com o aumento das gerações.

Agora que se compreende como a medição do comprimento depende da escala, pode-se tentar ampliar a percepção em relação à dimensão fractal. Para isso pode-se utilizar outras curvas de Koch, que serão aplicadas a bordas de quadrados, formando as chamadas Ilhas de Koch. As figuras F.2 e F.3 mostram Ilhas de Koch obtidas através de contornos com diferentes dimensões fractais.

Percebe-se que tanto o aumento da dimensão fractal, quanto o aumento do número de gerações, fragmentam o aspecto da figura, fazendo-a perder a semelhança com a figura original.

Comparando, ainda, as Figuras F.1, F.2 e F.3, pode-se extrair uma evidência qualitativa importante: quanto maior o valor da dimensão fractal, mais estreita deve ser a linha de contorno para que seja possível representar uma mesma geração. Observe que se a linha for muito larga, não será possível dobrá-la para produzir os contornos menores. Note que esta evidência está associando uma grandeza predominantemente unidimensional (linha) a outra bidimensional (Ilha de Koch, uma figura fechada que abrange uma área).

Esta conclusão é importante porque permite fazer uma analogia com o experimento que será realizado. No experimento, uma grandeza predominantemente bidimensional (folha de papel) será transformada numa tridimensional (bola de papel) através da contorção da superfície (amassar o papel). Sendo de mesma textura, folhas de papel mais finas poderão ser mais contorcidas, logo adquirirão uma dimensão fractal maior.

Outras referências sobre fractais são, por exemplo: [13, 14, 15, 16].

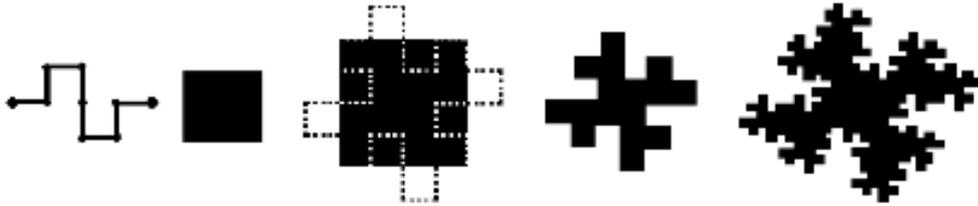


Figura F.2: *Ilha de Koch* para gerações  $n = 0, 1, 2$  no plano. Para ilustrar, mostra-se à esquerda como o segmento correspondente ao lado do quadrado foi subdividido em 4 e foram introduzidos  $2 + 2 = 4$  segmentos adicionais.  $D = \frac{\ln 8}{\ln 4} = 1,5000$ . Figura obtida da Referência [12].

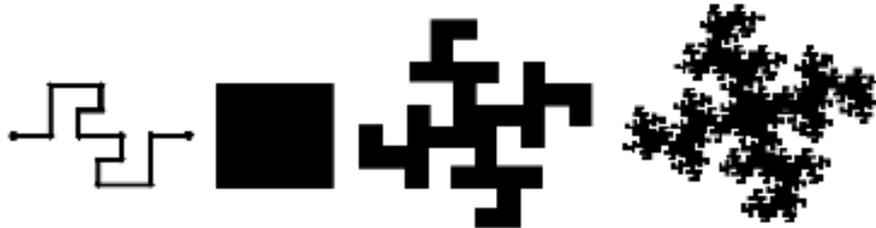


Figura F.3: *Ilha de Koch* para gerações  $n = 0, 1, 2$ . O segmento foi subdividido em 6 e foram introduzidos  $6 + 6 = 12$  segmentos adicionais.  $D = \frac{\ln 18}{\ln 6} = 1,6131$ . Figura obtida da Referência [12].

# Apêndice G

## Relatórios

*Nesta seção são apresentadas algumas regras gerais para se escreverem relatório e também os critérios de correção dos mesmos.*

### G.1 Objetivos do Relatório na Disciplina

Não há dúvida de que escrever um bom relatório é bastante difícil e parece que não existe outro método de aprender a escrever a não ser escrevendo.

Além das dificuldades relativas ao conteúdo do relatório, existem as dificuldades de organizar e expressar as idéias e resultados<sup>1</sup>. Na verdade, essas dificuldades não são independentes entre si pois certamente existe uma estreita relação entre a *compreensão* de um fato e a capacidade de *expressão* deste fato em palavras.

A importância do relatório na disciplina é que o mesmo é entendido como um treinamento para escrever e ajudar a articular idéias. Os alunos deveriam se conscientizar de que escrever relatório é uma parte importante da disciplina, independentemente do fato que o relatório serve para atribuição de nota na disciplina.

*O relatório deve ser um texto completo dirigido a um leitor com conhecimentos suficientes para entender as experiências da disciplina, mas que nunca tenha visto nada sobre tais experiências.*

Assim, o relatório não deve omitir descrições, fórmulas ou detalhes, com argumentos do tipo *isto tem na apostila* ou *o professor já sabe como é*. Mas

---

<sup>1</sup>Isto, sem falar das dificuldades gramaticais e de vocabulário.

a descrição do *óbvio* é dispensável. O texto deve ser elaborado pelo aluno sem “colagens” da apostila ou de livros, o conhecido plágio, não é um procedimento ético. Faça paráfrases<sup>2</sup> quando tiver dificuldades em escrever um texto com suas próprias palavras.

## G.2 Organização do Relatório

Um *relatório* pode ser entendido como a descrição *detalhada, clara e objetiva* de um trabalho realizado. Descrição detalhada significa que o relatório deve apresentar todos os detalhes que sejam *realmente relevantes*, omitindo detalhes supérfluos. Clareza e objetividade reduzem o esforço de leitura do relatório ao mínimo sem prejuízo da perfeita compreensão.

O relatório exigido nesta disciplina deve ter as seguintes partes:

- *Resumo* do trabalho;
- *Introdução* ao assunto;
- *Descrição experimental*;
- *Resultados de medições, cálculos e análise de dados*;
- *Discussão final e conclusões*;
- *Referências bibliográficas*.
- *Apêndices* (geralmente desnecessários);

Cada uma das partes acima pode ser subdividida em dois ou mais itens, quando parecer conveniente. Entretanto, deve-se evitar fragmentação excessiva do texto em muitos itens. Geralmente as divisões maiores tem os títulos acima<sup>3</sup>, mas as eventuais *subdivisões também devem ter títulos*.

Uma observação importante é que o texto do relatório deve ser escrito em português correto, com frases devidamente estruturadas e pontuadas. Ocorre que é um pouco difícil estruturar e pontuar frases quando o texto inclui equações e resultados numéricos, particularmente em deduções de fórmulas.

---

<sup>2</sup>Veja, por exemplo, referência [17]

<sup>3</sup>Mas podem ser escolhidos títulos diferentes.

Mas deve-se fazer um esforço para escrever frases corretas também nestes casos.

Uma outra observação é que o relatório é uma descrição de um trabalho já realizado. Por isso, essa descrição *não deve ser feita com verbos em tempos futuro, infinitivo ou imperativo*.

### G.2.1 Resumo

O *Resumo* deve ter aproximadamente 10 linhas e, como o nome indica, deve resumir os objetivos da experiência, equipamento utilizado, principais resultados e conclusões. Isto é, o *resumo* deve dar ao leitor uma razoável idéia sobre o *conteúdo* do relatório<sup>4</sup> e, portanto, deve ser escrito ao final do trabalho, apesar de ser apresentado no início do Relatório. Toda informação contida no Resumo deve ser retomada de forma mais extensa no corpo do Relatório.

Figuras, fórmulas ou referências não devem, evidentemente, ser incluídas num resumo.

### G.2.2 Introdução

A *Introdução* deve conter os objetivos da experiência, discussão do tema da experiência, apresentação das fórmulas e leis físicas utilizadas, deduções teóricas mais relevantes e outros comentários que parecerem importantes, mas que não se enquadrem em outras partes do relatório.

---

<sup>4</sup>Isto é, da experiência e da análise dos dados.

### G.2.3 Descrição Experimental

Esta parte do relatório deve conter uma descrição completa, mas bastante objetiva dos seguintes itens:

- arranjo experimental (não é aceitável, a simples listagem dos equipamentos utilizados);
- procedimento experimental;
- características de instrumentos e incertezas de leitura;
- cuidados particulares e detalhes relevantes.

Geralmente, a descrição do *arranjo experimental* deve incluir figuras mostrando suas características e dimensões *relevantes*. A qualidade artística do desenho é menos importante do que a clareza na informação.

Em *procedimento experimental*, deve-se dar uma descrição *resumida* do procedimento utilizado para obtenção das medidas, dispensando-se também aqui a descrição do óbvio.

*Devem também ser apresentados nesta parte do relatório características e detalhes de instrumentos utilizados, discussão de incertezas instrumentais e cuidados particulares que tenham sido adotados na tomada de dados.*

### G.2.4 Resultados de Medições, Cálculos e Análise de Dados

Os resultados das medições e cálculos devem ser apresentados nesta parte do relatório, sendo *obrigatório o uso de tabelas no caso de quantidades repetitivas*.

O texto deve explicar claramente os cálculos realizados e as fórmulas utilizadas, estas se já apresentadas devem ser citadas *explicitamente* pelos seus números.<sup>5</sup> Resultados de cálculos repetitivos também devem, *obrigatoriamente*, ser apresentados em tabelas.

---

<sup>5</sup>Na Introdução, por exemplo.

Os cálculos de incertezas também devem ser explicados claramente, inclusive com apresentação das expressões utilizadas.

Os gráficos devem ser anexados nesta parte do relatório e os resultados obtidos neles<sup>6</sup> devem ser *explicitamente* apresentados no texto.

### G.2.5 Discussão Final e Conclusões

Os resultados devem, evidentemente, ser discutidos e comentados na parte anterior do relatório. Mas geralmente existe esta parte final, na qual se deve discutir a experiência como um todo. Esta parte geralmente inclui discussão dos seguintes pontos:

- acordo entre resultados obtidos na experiência e valores experimentais obtidos de outras fontes ou valores de referência;
- crítica do método de medição e do equipamento utilizado;
- sugestões e comentários sobre a experiência.

É essencial que se apresentem as *conclusões* às quais os dados permitem chegar, frente aos *objetivos* que foram colocados na introdução de cada experimento.

### G.2.6 Referências Bibliográficas

Referências bibliográficas citadas no texto devem ser apresentadas no final, sob o título *Referências Bibliográficas*. Exemplos:

#### A) referência de livro

B.B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, New York, 1983.

---

<sup>6</sup>Por exemplo, um coeficiente angular de reta.

onde *B.B. Mandelbrot* é o autor do livro; *The Fractal Geometry of Nature* o título; *Freeman* a editora; *New York* a cidade onde o livro foi editado; e *1983* o ano da edição<sup>7</sup>.

## B) referência de artigo de revista

Marcos Amaku, Lighia B. Horodynski-Matsushigue e Paulo R. Pascholati, *The Fractal Dimension of Breads*, *The Physics Teacher* **37** (1999) 480.

onde *Marcos Amaku, Lighia B. Horodynski-Matsushigue e Paulo R. Pascholati* são os autores do artigo; *The Fractal Dimension of Breads* o título (que nem sempre é colocado); *The Physics Teacher* a revista; *37* o volume; *(1999)* o ano; e *480* é a página que inicia o artigo.

## A) referência de Internet

<http://www.if.usp.br>, data do acesso.

onde *http* é o protocolo de comunicação (hipertexto), *www.if.usp.br* é o endereço da página do Instituto de Física (*if*) da Universidade de São Paulo (*usp*), Brasil (*br*) na Internet (*www* - World Wide Web). Tendo vista a volatilidade da página da internet, deve-se acrescentar a data que a mesma foi acessada.

## G.2.7 Apêndices

Um apêndice é geralmente utilizado para apresentar um tópico que pode ser separado do texto principal do relatório sem prejudicar muito o seu entendimento, e que por outro lado, se colocado no texto principal viria perturbar a ordem de exposição das idéias. Por exemplo, pode-se colocar num apêndice uma dedução matemática longa de uma fórmula.

---

<sup>7</sup>Após o título do livro é indicada a edição, se esta não for a primeira edição.

### G.3 Regras Gerais para o Relatório

A seguir são resumidas as regras básicas e também algumas sugestões a respeito do relatório:

- tudo no relatório deve ser perfeitamente legível;
- o relatório deve ser apresentado em papéis de tamanhos normais: A4 (297 mm por 210 mm), carta (270 mm por 216 mm) ou ofício (aproximadamente 33 cm por 22 cm);
- o relatório deve ser escrito em português correto, sendo os relatos em tempo passado, conforme discutido na Seção G.2;
- organizar o relatório nas partes mencionadas na Seção G.2, eventualmente subdividindo cada uma das partes em itens com títulos;
- dados obtidos, cálculos e resultados finais para um determinado assunto *nunca* devem ser separados em itens diferentes;
- figuras e tabelas devem conter as informações de forma mais completa e sucinta possível, ser numeradas e ter *legendas* explicativas, mesmo que sejam explicadas no texto; devem ser evitadas a fragmentação e repetição de informação nas tabelas;
- o relatório deve conter uma folha de rosto onde constam a data e os nomes da experiência, da disciplina, do aluno e do professor.

### G.4 Critério de Correção e Nota

Para a atribuição da nota geralmente serão considerados os seguintes itens:

- obtenção criteriosa dos dados, conforme os objetivos explicitados e o instrumental disponível;
- confecção de tabelas e gráficos convenientes - com unidades, legendas, incertezas e algarismos significativos adequados;
- Introdução e Resumo;
- Descrição Experimental;

- Resultados das Medições e Cálculos(Análise de Dados);
- Discussão Final e Conclusões;

e, serão também examinados os seguintes aspectos:

- *organização* geral do relatório (divisão adequada em itens com respectivos títulos, ordem e outros aspectos relacionados);
- *diagramação e cuidado na apresentação*;
- se manuscrito, *caligrafia* (deve ser perfeitamente legível), se digitado, a qualidade da mesma;
- *português* correto, com frases devidamente estruturadas e pontuadas.

# Apêndice H

## Alfabeto grego

*Em Física trabalha-se com um número enorme de grandezas, sendo assim necessário um grande número de símbolos para representar tais grandezas. Por isso, o alfabeto grego é muito usado em Física.*

### LETRAS GREGAS MINÚSCULAS

$\alpha$	alfa	$\iota$	iota	$\rho$	ro
$\beta$	beta	$\kappa$	kapa	$\sigma$	sigma
$\gamma$	gama	$\lambda$	lambda	$\varsigma$	sigma
$\delta$	delta	$\mu$	mi	$\tau$	tau
$\epsilon$	épsilon	$\nu$	ni	$\upsilon$	úpsilon
$\varepsilon$	épsilon	$\xi$	ksi	$\phi$	fi
$\zeta$	zeta	$\omicron$	ômicron	$\varphi$	fi
$\eta$	eta	$\pi$	pi	$\chi$	qui
$\theta$	teta	$\varpi$	pi	$\psi$	psi
$\vartheta$	teta	$\rho$	ro	$\omega$	ômega

### LETRAS GREGAS MAIÚSCULAS

$\Gamma$	GAMA	$\Xi$	QUI	$\Phi$	FI
$\Delta$	DELTA	$\Pi$	PI	$\Psi$	PSI
$\Theta$	TETA	$\Sigma$	SIGMA	$\Omega$	ÔMEGA
$\Lambda$	LAMBDA	$\Upsilon$	ÚPSILON		



# Bibliografia

- [1] *Quadro Geral de Unidades de Medida*, Resolução INMETRO nº 12/1988, Duque de Caxias, 1989.
- [2] *Padrões e Unidades de Medida: Referência Metrôlogias da França e do Brasil*, Bureau National de Métrologie - BNM e Laboratório Nacional de Metrologia - INMETRO, 1999.
- [3] Handbook of Chemistry and Physics, 56<sup>th</sup> edition, CRC PRESS, INC (1975-1976) ed. Robert C. Weast.
- [4] J.H. Vuolo, *Fundamentos da Teoria de Erros*, 2<sup>a</sup> edição, Editora Edgard Blücher Ltda, São Paulo (1996).
- [5] R.A. Nelson e M.G. Olsson, *The Pendulum-Rich physics from a simple system*, Am. J. Phys. 54(1986)112.
- [6] D. Halliday, R. Resnick e J. Merril, *Fundamentos de Física*, volume 2, 3<sup>a</sup> edição, LTC Editora, 1994, Rio de Janeiro.
- [7] A. J. Palangana e P.R.B. Pedreira, *Estudo Teórico-Experimental do Efeito da Massa do Fio sobre o Período de Oscilação de um Pêndulo Simples*, Rev. Bras. Ens. Fís. **17** (1995) 215.
- [8] **Referência muito avançada.** L.D. Landau e E.M. Lifshitz, *Mecânica*, Mir, Moscou, 1978.
- [9] O.A.M. Helene e V.R. Vanin, *Tratamento Estatístico de Dados em Física Experimental*, 2<sup>a</sup> edição, Editora Edgard Blücher Ltda, São Paulo (1991).
- [10] H.M. Nussenzveig, *Curso de Física Básica: 2-Fluidos, Oscilações e Ondas, Calor*, 3<sup>a</sup> a Editora Edgard Blücher Ltda, São Paulo (1996).

- [11] BIPM, *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*, capítulo 6, International Organization for Standardization, 1993.
- [12] **Uma referência avançada** é: B.B. Mandelbrot, **The Fractal Geometry of Nature**, Freeman, New York (1983).
- [13] M.A.F. Gomes, *Fractal Geometry in Crumpled Paper Balls*, Am. J. Phys. **55** (1987) 649.
- [14] F. Tamarit et al., *Ciência Hoje* **80**, vol. 14, (1992) 40.
- [15] . A.L. Goldberger, D.R. Rigney and B.J. West, *Sci. Am.*, February (1990) 34.
- [16] . M. Amaku, L.B. Horodyski-Matsushigue e P.R. Pascholati, *Phys. Teach.*, **37** (1999) 480.
- [17] H. Eco, *Como se faz uma tese*, 15<sup>a</sup> edição, Editora Perspectiva, São Paulo, 1999, páginas 128 e 129.



Impresso na gráfica do  
Instituto de Física  
Universidade de São Paulo  
Tiragem 280 exemplares  
2 011