1 Resumo II

1.1 Resultados de Cálculo Diferencial e Integral

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e diferenciável em (a, b) então pelo **Teorema do Valor Médio**

$$f(b) - f(a) = f(\xi)(b - a) \text{ onde } \xi \in (a, b)$$

Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas e tal que $g(x)$ tenha sempre o mesmo sinal. Então o **Teorema do Valor Médio Integral** diz que:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx \text{ para algum } \xi \in (a, b)$$

Uma forma para aproximar funções por polinômios, ou avaliar funções em pontos próximos de pontos em que conhecemos o valor da função é usar o teorema de Taylor.
Se $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ no intervalo I e se x e c são pontos no interior do intervalo então

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x)$$

onde

$$p_n(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \cdots + f^{(n)}(c)\frac{(x - c)^n}{n!}$$

e o resto R_n pode ser escrito

- na forma integral

$$R_n(x) = \int_c^x \frac{f^{(n+1)}(t)(x - t)^n}{n!}dt$$

- na forma de Lagrange

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x - c)^{(n+1)}}{(n + 1)!}$$

Nesta última forma ξ é um número entre x e c.

Se $p_n(x)$ denota o polinômio de Taylor de grau n com centro em um ponto c, é fácil ver que vale a relação:

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

Usando integração por partes na fórmula do erro na forma integral temos a relação

$$R_n(x) = R_{n+1}(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

A partir destas duas relações é fácil mostrar a fórmula do erro.