

Gabarito

$$\textcircled{1} \quad \lambda = \frac{h}{p} \Rightarrow \frac{\lambda}{D} = \frac{h}{p} \cdot \frac{4\pi\epsilon_0 (Mv^2/2)}{zZ e^2}$$

É possível deixar $\frac{\lambda}{D}$ em função da velocidade v , do momento p ou da energia E , onde $E = \frac{Mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$. Como o exercício pede para calcular $\frac{\lambda}{D}$ "para possíveis energias mais baixas" é conveniente expressar $\frac{\lambda}{D}$ em função da energia. Portanto:

$$p = \sqrt{2ME} \Rightarrow \frac{\lambda}{D} = \frac{h}{\sqrt{2ME}} \frac{4\pi\epsilon_0 E}{zZ e^2}$$

$$\boxed{\frac{\lambda}{D} = \frac{h 4\pi\epsilon_0}{\sqrt{2M} zZ e^2} \cdot \sqrt{E}}$$

A menor energia utilizada por Rutherford para a partícula alfa (olhar Atividade 4) foi

$$E = 5,5 \text{ MeV} = 5,5 \times 10^6 \times 1,6 \times 10^{-19} \text{ J} = 8,8 \times 10^{-13} \text{ J}$$

Para esta energia temos:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{D} &= \frac{6,6 \times 10^{-34} \times 4 \times \pi \times 8,85 \times 10^{-12}}{\sqrt{2 \times 6,6 \times 10^{-27}} \cdot 2 \times 79 \times (1,6 \times 10^{-19})^2} \sqrt{8,8 \times 10^{-13}} \approx \\ &\approx \frac{6,89 \times 10^{-50}}{4,65 \times 10^{-49}} \approx \underline{\underline{0,15}} \end{aligned}$$

Repetindo o cálculo para $E = 7,7 \text{ MeV}$, que foi a energia mais alta utilizada por Rutherford, teremos:

$$\frac{\lambda}{D} \approx 0,18$$

Como $\frac{\lambda}{D}$ é proporcional a $\sqrt{E}$, ao utilizarmos energias menores que $5,5 \text{ MeV}$ obteremos sempre resultados menores que $0,15$.
Por exemplo, para $E = 1 \text{ MeV}$, obteremos:

$$\frac{\lambda}{D} \approx 0,06$$

Concluimos, portanto, que para o ouro nunca teremos λ da ordem de magnitude de D se utilizarmos energias menores ou iguais às aquelas utilizadas por Rutherford. Analisemos agora a relação $\frac{\lambda}{D}$ para o caso onde o alvo não é mais feito de ouro, mas de partículas com número atômico menor. Tomemos o caso do Chumbo, onde $Z = 82$. Neste caso, utilizando partículas alfa com energia $E_\alpha = 5,5 \text{ MeV}$ teremos:

$$\frac{\lambda}{D} \approx 1,1$$

e os efeitos quânticos já não poderão mais ser ignorados. ②

2. Problemas Interpretativos da Mecânica de Bohr

Princípio da Correspondência

Resposta: Ele não só serviu como um meio temporário de investigação antes da descoberta completa da teoria quântica, mas também deu pistas importantes para a antecipação da forma completa dessa teoria. E este foi de fato o princípio guia que levou Heisenberg a encontrar a forma correta da mecânica quântica.

Se tornou um princípio guia para sugerir qual forma a teoria futura deveria ter, e não foi apenas um procedimento conveniente para remediar os defeitos da teoria de Bohr.

O limite clássico da teoria de Bohr é obtido quando assumimos números quânticos grandes.

$$\textcircled{3a} \quad \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\sigma} \pi^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = A e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

$$\psi'(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2} - ikx} dx$$

- Completando quadrados:

$$-\frac{x^2}{2\sigma^2} - ikx = -\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma} + \frac{i k \sigma}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{k^2 \sigma^2}{2}$$

- Chamarei: $\frac{x}{\sqrt{2}\sigma} + \frac{i k \sigma}{\sqrt{2}} = y$; logo: $dx = \sqrt{2}\sigma dy$

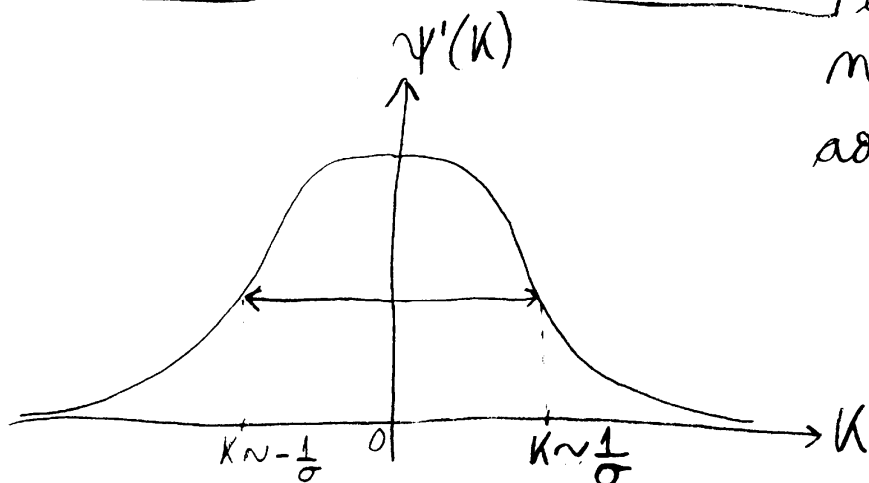
- Os limites de integração continuam os mesmos.

$$\psi'(k) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2 - \frac{k^2 \sigma^2}{2}} \sqrt{2}\sigma dy =$$

$$\psi'(k) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2}\sigma e^{-\frac{k^2 \sigma^2}{2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy}_{\sqrt{\pi}}$$

$$\boxed{\psi'(k) = A \sigma e^{-\frac{\sigma^2 k^2}{2}}}$$

Esta função representa a distribuição de números de onda associados ao nosso pacote.



⑥ O desvio padrão é dado por:

$$\sigma_z = \sqrt{\overline{z^2} - \bar{z}^2}$$

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi|^2 dx = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} dx$$

Tomar a integral de uma função simétrica ($e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}$) multiplicada por uma função antissimétrica (x).
Portanto:

$$\boxed{\bar{x} = 0}$$

$$\overline{x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\psi|^2 dx = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} dx$$

fazendo $\frac{1}{\sigma^2} = \alpha$:

$$\overline{x^2} = -A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\alpha} e^{-\alpha x^2} dx = -A^2 \frac{d}{d\alpha} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx}_{=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}}$$

$$\overline{x^2} = -A^2 \sqrt{\pi} \frac{d}{d\alpha} (\alpha^{-\frac{1}{2}}) = \frac{A^2 \sqrt{\pi}}{2 \alpha^{3/2}} = \frac{A^2 \sqrt{\pi} \sigma^3}{2}$$

Assim temos: $\sigma_x = \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{A^2 \sqrt{\pi} \sigma^3}{2}}$

substituindo $A = \frac{1}{\sqrt{\sigma} \pi^{1/4}}$ temos:

$$\boxed{\sigma_x = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}}$$

Continuando

$$\bar{K} = \int_{-\infty}^{\infty} K |\Psi'|^2 dK = A^2 \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} K e^{-\sigma^2 K^2} dK$$

Pelo mesmo motivo que no caso de $\bar{x}$ temos

$$\boxed{\bar{K} = 0}$$

$$\bar{K}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} K^2 |\Psi'|^2 dK = A^2 \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} K^2 e^{-\sigma^2 K^2} dK =$$

$$\bar{K}^2 = -A^2 \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\beta} e^{-\beta K^2} dK = -A^2 \sigma^2 \underbrace{\frac{d}{d\beta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta K^2} dK}_{=\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}}$$

onde: $\beta = \sigma^2$

$$\bar{K}^2 = -A^2 \sigma^2 \sqrt{\pi} \frac{d}{d\beta} (\beta^{-1/2}) = \frac{A^2 \sigma^2 \sqrt{\pi}}{2 \beta^{3/2}} = \frac{A^2 \sqrt{\pi}}{2 \sigma}$$

$$\text{Assim temos: } \sigma_K = \sqrt{\bar{K}^2 - \bar{K}^2} = \frac{A \pi^{1/4}}{\sqrt{2} \sigma}$$

$$\text{substituindo } A = \frac{1}{\sqrt{\sigma} \pi^{1/4}} \text{ temos: } \boxed{\sigma_K = \frac{1}{\sqrt{2} \sigma}}$$

$$\boxed{\sigma_x \sigma_K = \frac{1}{2}}$$

$$c) \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi \frac{p}{h} = \frac{p}{\hbar}$$

Assim, $\sigma_k = \sqrt{k^2} = \sqrt{\left(\frac{p}{\hbar}\right)^2} = \frac{1}{\hbar} \sqrt{p^2} = \frac{\sigma_p}{\hbar}$

substituindo $\sigma_k = \frac{\sigma_p}{\hbar}$ temos:

$$\sigma_x \sigma_k = \sigma_x \frac{\sigma_p}{\hbar} = \frac{1}{2} ; \quad \boxed{\sigma_x \sigma_p = \frac{\hbar}{2}}$$

4. Difração de elétrons.

Resposta:

- a)
 - i. Ao variarmos a separação entre as fendas:
Separação Mínima: Há uma larga faixa central de interferência construtiva e duas faixas mais finas vizinhas a ela.
Aumentando a separação entre as fendas: As faixas de interferência construtiva começam a ficar mais finas e em um número maior, já que também começam a aparecer novas faixas.
 - ii. Mudando a largura das fendas (separação entre elas fixa):
Quanto mais largas são as fendas, em comparação com a distância entre elas, menos importante é o fenômeno de interferência, até o limite onde elas são tão largas que não vemos mais nenhuma faixa de interferência.
 - iii. Mudando a velocidade dos elétrons:
Quanto maior é a velocidade dos elétrons mais finas são as faixas de interferência.
- b) O padrão de difração muda porque ao variarmos a velocidade dos elétrons estamos variando o seu momento, e consequentemente o seu comprimento de onda (relação de De Broglie).
- c) Sim, pois vemos que há faixas onde nenhum elétron colide, ou seja, faixa de "interferência destrutiva" da função de onda do elétron com ela própria.