

atividade 8

- ① $\Rightarrow$ para $x < 0$ e $x > L$ temos a equação de Schrödinger para o elétron livre.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = E \psi(x)$$

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \right] \psi(x) = 0$$

- para $x < 0$ temos que considerar a função de onda da partícula incidente da esquerda e^{iKx} e também uma componente desta função de onda que é refletida de volta atingindo o ponto $x=0$.
Portanto para $x < 0$ consideremos a função

$$\psi(x) = A e^{iKx} + B e^{-iKx}$$

e vejamos se é solução da equação:

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = A iK e^{iKx} + B(-iK) e^{-iKx}$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d\psi(x)}{dx} \right) = -AK^2 e^{iKx} - BK^2 e^{-iKx}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi(x) &= 0 \\ \rightarrow &= -AK^2 e^{iKx} - BK^2 e^{-iKx} + \frac{2mE}{\hbar^2} A e^{iKx} \\ &+ \frac{2mE}{\hbar^2} B e^{-iKx} = \\ &= \left(\frac{2mE}{\hbar^2} - K^2 \right) A e^{iKx} + \left(\frac{2mE}{\hbar^2} - K^2 \right) B e^{-iKx} = 0 \end{aligned}$$

Vemos portanto que se $K^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ esta expressão torna-se igual a zero, o que significa que a função de onda usada é solução da equação de Schrödinger na região $x < 0$.

Na região $x > L$ temos apenas a componente de onda $\psi(x) = F e^{iKx}$ transmitida, após passar pela região $0 < x < L$ do potencial. Vejamos se $\psi(x) = F e^{iKx}$ satisfaz a equação de Schrödinger na região $x > L$.

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = F i k e^{ikx} ; \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d\psi(x)}{dx}\right) = -F k^2 e^{ikx}$$

Portanto:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2mE\psi(x)}{\hbar^2} = 0$$

$$-F k^2 e^{ikx} + \frac{2mE}{\hbar^2} F e^{ikx} = 0$$

$$\rightarrow = \left(\frac{2mE}{\hbar^2} - k^2 \right) F e^{ikx} = 0$$

Novamente, assumindo $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ esta expressão se iguala a zero. Logo a função de onda usada é solução da equação de Schrödinger na região $x > L$.

Agora vejamos a região $0 < x < L$:

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E + V_0) \right] \psi(x) = 0$$

$$\text{Substituindo } \psi(x) = C e^{iqx} + D e^{-iqx}$$

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = -C q^2 e^{iqx} + D \left(\frac{q^2}{\hbar^2}\right) e^{-iqx}$$

$$\frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + \frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2} \psi(x) = 0$$

$$-C q^2 e^{iqx} - q^2 D e^{-iqx} + \frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2} C e^{iqx} + \frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2} D e^{-iqx} =$$

$$= \left[\frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2} - q^2 \right] C e^{iqx} + \left[\frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2} - q^2 \right] D e^{-iqx} = 0$$

Vemos que se $q^2 = \frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}$ esta expressão se iguala a zero. Portanto a função $\psi(x)$ escolhida é solução da equação de Schrödinger.