1

Exercícios de Controle Digital PTC 2419

1.1 Exercícios resolvidos

Exercício 1.1

Determine a transformada $\mathcal{Z}$ da sequência $f(k)$ da Tabela 1.1.

k	0	1	2	3	4	5	6	•	•	•
$f(k)$	0	1	2	3	0	0	0	•	•	•

Tabela 1.1: Sequência $f(k)$.

Solução

Aplicando a definição de transformada $\mathcal{Z}$

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} = f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + f(3)z^{-3} + \ldots \\ &= \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{3}{z^3} = \frac{z^2+2z+3}{z^3} \ . \end{aligned} \tag{1.1}$$

Exercício 1.2

A resposta $y(k)$ de um sistema, para uma entrada $u(k)$ do tipo impulso unitário está apresentada na Tabela 1.2. Determine a função de transferência $G(z) = Y(z)/U(z)$ e uma expressão para $y(k)$.

k	0	1	2	3	4	•	•	•
$y(k)$	2	1	0,5	0,25	0,125	•	•	•

Tabela 1.2: Resposta $y(k)$.

Solução

Aplicando a definição de transformada $\mathcal{Z}$, obtém-se

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(k)z^{-k} = 2 + z^{-1} + 0{,}5z^{-2} + 0{,}25z^{-3} + 0{,}125z^{-4} + \ldots \tag{1.2}$$

A Equação (1.2) representa a soma dos termos de uma progressão geométrica com razão $0{,}5z^{-1}$ e primeiro termo igual a 2. Para $\mid z \mid > 1$, há convergência. Assim,

$$Y(z) = \frac{2}{1-0{,}5z^{-1}} = \frac{2z}{z-0{,}5} \ . \tag{1.3}$$

Como a entrada $u(k)$ é um impulso unitário, então $U(z) = 1$. Logo,

$$G(z) = Y(z) = \frac{2z}{z - 0{,}5} \; . \tag{1.4}$$

Da tabela de transformadas $\mathcal{Z}$ (**??**), obtém-se

$$y(k) = 2(0{,}5)^k \; . \tag{1.5}$$

Exercício 1.3

Um sistema dinâmico é descrito pela Equação de diferenças

$$y(k+2) - y(k+1) + 0{,}09y(k) = u(k), \quad \text{com} \quad y(0) = y(1) = 0 \; . \tag{1.6}$$

Supondo que $u(k)$ é um degrau unitário, determinar:
a) a transformada $\mathcal{Z}$ da sequência $y(k)$;
b) $\lim_{k\to\infty} y(k)$.

Solução

a) Aplicando a propriedade (**??**) do avanço na Equação (1.6), obtém-se

$$z^2\left(Y(z) - y(0) - y(1)z^{-1}\right) - z\left(Y(z) - y(0)\right) + 0{,}09Y(z) = U(z) \; . \tag{1.7}$$

Como $y(0) = y(1) = 0$, então

$$Y(z)(z^2 - z + 0{,}09) = U(z) \; . \tag{1.8}$$

Como $u(k)$ é um degrau unitário, então $\mathcal{Z}[u(k)] = z/(z-1)$. Logo

$$Y(z) = \frac{z}{(z-1)(z^2 - z + 0{,}09)} \; . \tag{1.9}$$

b) Aplicando o teorema do valor final na Equação (1.9), obtém-se

$$\lim_{k\to\infty} y(k) = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})Y(z) = \lim_{z\to 1} \frac{(z-1)}{z} \frac{z}{(z-1)(z^2 - z + 0{,}09)} = \frac{1}{0{,}09} \cong 11{,}111 \; . \tag{1.10}$$

Exercício 1.4

Dado

$$F(z) = \frac{z^2 + 4z}{(z^2 - 2z + 2)(z - 1)} \; , \tag{1.11}$$

determinar a transformada $\mathcal{Z}$ inversa.

Solução

- **Por meio de expansão em série por divisão contínua**

Escrevendo $F(z)$ com potências negativas de z, obtém-se

$$F(z) = \frac{z^2 + 4z}{z^3 - 3z^2 + 4z - 2} = \frac{z^{-1} + 4z^{-2}}{1 - 3z^{-1} + 4z^{-2} - 2z^{-3}} \; . \tag{1.12}$$

Dividindo o numerador pelo denominador, tem-se que

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
z^{-1} & +4z^{-2} & & & & & & 1 \quad -3z^{-1} \quad +4z^{-2} \quad -2z^{-3} \\ \cline{8-8}
-z^{-1} & +3z^{-2} & -4z^{-3} & +2z^{-4} & & & & z^{-1}+7z^{-2} \quad +17z^{-3}+25z^{-4}+21z^{-5}\ldots \\ \cline{1-4}
 & +7z^{-2} & -4z^{-3} & +2z^{-4} & & & & \\
 & -7z^{-2} & +21z^{-3} & -28z^{-4} & +14z^{-5} & & & \\ \cline{2-5}
 & & +17z^{-3} & -26z^{-4} & +14z^{-5} & & & \\
 & & -17z^{-3} & +51z^{-4} & -68z^{-5} & +34z^{-6} & & \\ \cline{3-6}
 & & & +25z^{-4} & -54z^{-5} & +34z^{-6} & & \\
 & & & -25z^{-4} & +75z^{-5} & -100z^{-6} & +50z^{-7} & \\ \cline{4-7}
 & & & & +21z^{-5} & -66z^{-6} & +50z^{-7} &
\end{array}
$$

$$
F(z) = z^{-1} + 7z^{-2} + 17z^{-3} + 25z^{-4} + 21z^{-5}\ldots \tag{1.13}
$$

Logo, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 7$, $f(3) = 17$, $f(4) = 25$, $f(5) = 21$, $\ldots$

- **Por meio de programa de computador**

Supondo que $F(z)$ é a função de transferência de um sistema e que sua entrada é o impulso $U(z) = 1$, então

$$
F(z) = \frac{z^2 + 4z}{z^3 - 3z^2 + 4z - 2} U(z) = \frac{z^{-1} + 4z^{-2}}{1 - 3z^{-1} + 4z^{-2} - 2z^{-3}}\, U(z)\ . \tag{1.14}
$$

Aplicando a propriedade (**??**) do atraso, obtém-se

$$
f(k) = 3f(k-1) - 4f(k-2) + 2f(k-3) + u(k-1) + 4u(k-2)\ . \tag{1.15}
$$

Sabendo-se que $f(-1) = f(-2) = f(-3) = 0$ e que $u(k)$ é um impulso, então, a Equação (1.15) pode ser implementada num programa de computador.

A seguir é apresentado um programa, escrito na sintaxe do aplicativo MATLAB, que calcula os valores da sequência $f(k)$ para $k = 0, 1, 2, \ldots, 10$.

```
fk_1=0;
fk_2=0;
fk_3=0;
for k=0:10
   if k==1 uk_1=1;
      else uk_1=0;
   end;
   if k==2 uk_2=1;
      else uk_2=0;
   end;
   fk=3*fk_1-4*fk_2+2*fk_3+uk_1+4*uk_2
   fk_3=fk_2;
   fk_2=fk_1;
   fk_1=fk;
end;
```

k	$u(k-1)$	$u(k-2)$	$f(k)$
0	0	0	0
1	1	0	1
2	0	1	7
3	0	0	17
4	0	0	25
5	0	0	21
6	0	0	-3
7	0	0	-43
8	0	0	-75
9	0	0	-59
10	0	0	37

Tabela 1.3: Programa e coeficientes para $k = 0, 1, 2, \ldots, 10$.

- **Por meio de expansão em frações parciais**

$F(z)/z$ pode ser expandida em frações parciais do seguinte modo

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{a_1}{z-1} + \frac{a_2}{(z-1-j)} + \frac{a_2^*}{(z-1+j)} \tag{1.16}$$

onde a_2^* é o complexo conjugado de a_2.

$$a_1 = \left[(z-1)\frac{F(z)}{z}\right]_{z=1} = \left[(z-1)\frac{z+4}{(z^2-2z+2)(z-1)}\right]_{z=1} = 5\ . \tag{1.17}$$

$$\begin{aligned} a_2 &= \left[(z-1-j)\frac{F(z)}{z}\right]_{z=1+j} \\ &= \left[(z-1-j)\frac{z+4}{(z-1-j)(z-1+j)(z-1)}\right]_{z=1+j} = \frac{5+j}{2j^2} = -2{,}5 - 0{,}5j\ . \end{aligned} \tag{1.18}$$

$$a_2^* = -2{,}5 + 0{,}5j. \tag{1.19}$$

Portanto

$$F(z) = \frac{5z}{z-1} + (-2{,}5 - 0{,}5j)\frac{z}{z-1-j} + (-2{,}5 + 0{,}5j)\frac{z}{z-1+j}\ . \tag{1.20}$$

Da tabela de transformadas $\mathcal{Z}$, obtém-se

$$f(k) = 5 + (-2{,}5 - 0{,}5j)(1+j)^k + (-2{,}5 + 0{,}5j)(1-j)^k\ . \tag{1.21}$$

Como

$$\begin{aligned} (1+j)^k &= (\sqrt{2}\ e^{\frac{j\pi}{4}})^k = (\sqrt{2})^k\ e^{\frac{j\pi k}{4}}\ , \\ (1-j)^k &= (\sqrt{2}\ e^{\frac{-j\pi}{4}})^k = (\sqrt{2})^k\ e^{\frac{-j\pi k}{4}}\ , \end{aligned} \tag{1.22}$$

então

$$\begin{aligned} f(k) &= 5 + (-2{,}5 - 0{,}5j)(\sqrt{2})^k \left[\cos\left(\frac{\pi k}{4}\right) + j\ \text{sen}\left(\frac{\pi k}{4}\right)\right] \\ &\quad + (-2{,}5 + 0{,}5j)(\sqrt{2})^k \left[\cos\left(\frac{\pi k}{4}\right) - j\ \text{sen}\left(\frac{\pi k}{4}\right)\right]\ . \end{aligned} \tag{1.23}$$

Logo

$$f(k) = 5 - 5(\sqrt{2})^k \cos\left(\frac{\pi k}{4}\right) + (\sqrt{2})^k\ \text{sen}\left(\frac{\pi k}{4}\right)\ ,\ \text{com}\ \ k = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.24}$$

Assim

$$\begin{aligned} \text{f}(0) &= 0 \\ \text{f}(1) &= 1 \\ \text{f}(2) &= 7 \\ \text{f}(3) &= 17 \\ \text{f}(4) &= 25 \\ \text{f}(5) &= 21 \\ \text{f}(6) &= \text{-}3 \\ \text{f}(7) &= \text{-}43 \\ \text{f}(8) &= \text{-}75 \\ \text{f}(9) &= \text{-}59 \\ \text{f}(10) &= 37 \end{aligned}$$

Quando a função $F(z)$ possui pólos complexos conjugados pode-se realizar a expansão de acordo com termos tabelados, ou seja

$$F(z) = \frac{z^2 + 4z}{(z^2 - 2z + 2)(z - 1)} = \frac{5z}{z - 1} + \frac{R(z)}{z^2 - 2z + 2} \; . \tag{1.25}$$

Necessariamente,

$$R(z)(z - 1) + 5z^3 - 10z^2 + 10z = z^2 + 4z \; . \tag{1.26}$$

ou

$$R(z) = \frac{-5z^3 + 11z^2 - 6z}{z - 1} = -5z^2 + 6z \; . \tag{1.27}$$

Logo

$$F(z) = \frac{5z}{z - 1} - \frac{(5z^2 - 6z)}{z^2 - 2z + 2} \; . \tag{1.28}$$

Da tabela de transformadas $\mathcal{Z}$ (**??**), obtém-se

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\left[e^{-at} \cos \omega t\right] &= \frac{z^2 - ze^{-aT} \cos \omega T}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}} \; , & (1.29) \\ &= \\ \mathcal{Z}\left[e^{-at} \operatorname{sen} \omega t\right] &= \frac{ze^{-aT} \operatorname{sen} \omega T}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}} \; . & (1.30) \end{aligned}$$

Escrevendo a Equação (1.28) de modo a utilizar as funções tabeladas (1.29) e (1.30), obtém-se

$$F(z) = \frac{5z}{z - 1} - 5\frac{(z^2 - z)}{z^2 - 2z + 2} + \frac{z}{z^2 - 2z + 2}. \tag{1.31}$$

Comparando as equações (1.29), (1.30) e (1.31) tem-se que

$$e^{-2aT} = 2 \Rightarrow e^{-aT} = \sqrt{2} \; . \tag{1.32}$$

$$e^{-aT} \cos \omega T = 1 \Rightarrow \cos \omega T = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \omega T = \frac{\pi}{4} \; . \tag{1.33}$$

Logo, a transformada $\mathcal{Z}$ inversa de $F(z)$ é dada por

$$\begin{aligned} f(k) &= 5 - 5e^{-akT} \cos(\omega kT) + e^{-akT} \operatorname{sen}(\omega kT) \; , \text{ ou} & (1.34) \\ &= \\ f(k) &= 5 - 5(\sqrt{2})^k \cos\left(\frac{\pi k}{4}\right) + (\sqrt{2})^k \operatorname{sen}\left(\frac{\pi k}{4}\right) \; , \text{ com } \; k = 0, 1, 2, \ldots & (1.35) \end{aligned}$$

1.2 Exercícios propostos

Exercício 1.5

Determine a transformada $\mathcal{Z}$ das funções seno e cosseno amortecido, definidos por

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at}\text{sen}\,\omega t & t \geq 0\,, \\ 0 & t < 0\,, \end{cases}$$

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at}\cos\omega t & t \geq 0\,, \\ 0 & t < 0\,. \end{cases}$$

Exercício 1.6

Supondo um período de amostragem $T = 1$s, determine a transformada $\mathcal{Z}$ da função $f(t)$ da Figura 1.1.

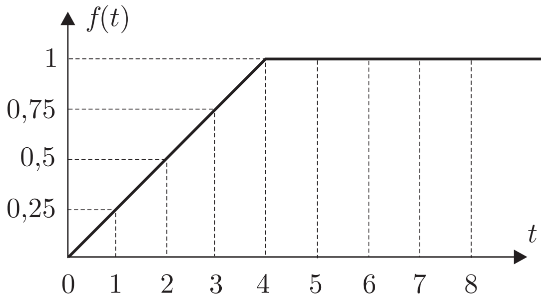

Figura 1.1: Função $f(t)$.

Exercício 1.7

Considere o sistema da Figura 1.2.

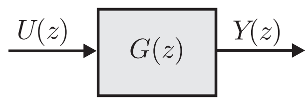

Figura 1.2: Função de transferência $G(z) = Y(z)/U(z)$.

Quando a entrada $U(z)$ é um impulso unitário, a saída $y(k)$ é o sinal apresentado na Figura 1.3.

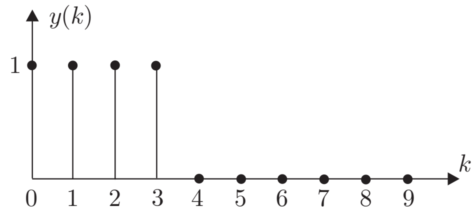

Figura 1.3: Saída $y(k)$ para entrada impulso unitário.

a) Determine a resposta $y(k)$ da saída, quando a entrada $u(k)$ for um degrau unitário.
b) Desenhe o gráfico da sequência $y(k)$ correspondente.

Exercício 1.8

Dado um sistema dinâmico descrito pela Equação de diferenças

$$y(k+2) - 1{,}3y(k+1) + 0{,}4y(k) = u(k), \text{ com } y(0) = y(1) = 0 \; .$$

Sabendo-se que $u(k)$ é um degrau unitário, calcular:
a) a transformada $\mathcal{Z}$ da sequência $y(k)$;
b) $\lim_{k \to \infty} y(k)$.

Exercício 1.9

Dado

$$F(z) = \frac{z}{(z-1)^3} \; ,$$

determinar a transformada $\mathcal{Z}$ inversa por meio de
- expansão em série por divisão contínua;
- programa de computador;
- expansão em frações parciais.

Exercício 1.10

Considere o sistema da Figura 1.2. Sabendo-se que $U(z)$ é uma entrada do tipo degrau unitário e que

$$G(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} \; ,$$

determinar a transformada $\mathcal{Z}$ inversa da saída $Y(z)$ por meio de
- expansão em série por divisão contínua;
- programa de computador;
- expansão em frações parciais.

Exercício 1.11

Determine a solução $f(k)$ da seguinte Equação de diferenças

$$f(k+2) + 3f(k+1) + 2f(k) = 0, \text{ com } f(0) = 0 \; , \; f(1) = 1.$$

Verifique o resultado obtido, calculando $f(k)$ para $k = 0, \ldots, 5$, através dos métodos da divisão contínua e por meio de um programa de computador.

Exercício 1.12

Dado um sistema dinâmico descrito pela Equação de diferenças

$$y(k+2) + 2y(k+1) + y(k) = u(k), \text{ com } y(0) = y(1) = 0.$$

Sabendo-se que $u(k) = k$, determine a solução $y(k)$.

Verifique o resultado obtido, calculando $y(k)$ para $k = 0, \ldots, 5$, através dos métodos da divisão contínua e por meio de um programa de computador.

1.3 Exercícios resolvidos

Exercício 1.13

Considere o sistema da Figura 1.4.

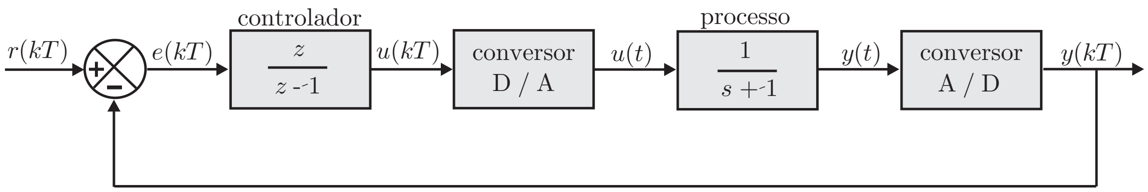

Figura 1.4: Diagrama de blocos do sistema em malha fechada.

Supondo um período de amostragem $T = 0{,}1$s , calcular:
a) a função de transferência de malha fechada $Y(z)/R(z)$;
b) a resposta $y(0), y(0,1), y(0,2), \ldots, y(1,0)$, quando a entrada $r(kT)$ for um degrau unitário ;
c) o erro de regime no estado estacionário quando $r(kT)$ for um degrau unitário.

Solução

Conforme calculado no exemplo (**??**), a função de transferência $H(z)$ é dada por

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right] = \frac{1 - e^{-T}}{z - e^{-T}} \ . \tag{1.36}$$

A função de transferência do sistema em malha fechada é dada por

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G_c(z)H(z)}{1 + G_c(z)H(z)} = \frac{\left(\frac{z}{z-1}\right)\left(\frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}\right)}{1 + \left(\frac{z}{z-1}\right)\left(\frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}\right)} = \frac{z\left(1 - e^{-T}\right)}{z^2 - 2e^{-T}z + e^{-T}} \ . \tag{1.37}$$

Como $T = 0{,}1s$, então

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{0{,}0952z}{z^2 - 1{,}8097z + 0{,}9048} = \frac{0{,}0952z^{-1}}{1 - 1{,}8097z^{-1} + 0{,}9048z^{-2}} \ . \tag{1.38}$$

Aplicando a transformada $\mathcal{Z}$ inversa e a propriedade do atraso, obtém-se a seguinte equação de diferenças

$$y(kT) = 1{,}8097y[(k-1)T] - 0{,}9048y[(k-2)T] + 0{,}0952r[(k-1)T]. \tag{1.39}$$

Sabendo-se que $y(-0{,}1) = y(-0{,}2) = 0$ e que $r(kT)$ é um degrau unitário, ou seja

$$r(kT) = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \, , \\ 0 & k < 0 \, , \end{cases} \tag{1.40}$$

a sequência $y(kT)$ pode ser obtida por meio de uma implementação da Equação (1.39) num programa de computador.

A seguir é apresentado um programa, escrito na sintaxe do aplicativo Matlab, que calcula os valores da sequência $y(kT)$ para $k = 0, 1, 2, \ldots, 10$.

```
yk_1=0;
yk_2=0;
for k=0:10
   if k==0 rk_1=0;
      else rk_1=1;
   end;
   yk =1.8097*yk_1-0.9048*yk_2+0.0952*rk_1
   yk_2=yk_1;
   yk_1=yk;
end;
```

k	kT	$r[(k-1)T]$	$y(kT)$
0	0,0	0	0
1	0,1	1	0,0952
2	0,2	1	0,2675
3	0,3	1	0,4931
4	0,4	1	0,7456
5	0,5	1	0,9983
6	0,6	1	1,2272
7	0,7	1	1,4129
8	0,8	1	1,5417
9	0,9	1	1,6068
10	1,0	1	1,6081

Tabela 1.4: Programa e coeficientes para $k = 0, 1, 2, \ldots, 10$.

O valor da resposta no estado estacionário pode ser obtido por meio do teorema do valor final, ou seja

$$\begin{aligned} y(\infty) &= \lim_{k\to\infty} y(kT) = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})Y(z) \\ &= \lim_{z\to 1}\left(\frac{z-1}{z}\right)\left(\frac{0{,}0952z}{z^2 - 1{,}8097z + 0{,}9048}\right)R(z) \, . \end{aligned} \tag{1.41}$$

Como $r(kT)$ é um degrau unitário, então $R(z) = z/(z-1)$. Logo

$$y(\infty) = \lim_{z\to 1}\left(\frac{z-1}{z}\right)\left(\frac{0{,}0952z}{z^2 - 1{,}8097z + 0{,}9048}\right)\left(\frac{z}{z-1}\right) = 1 \, . \tag{1.42}$$

Com isso, o erro de regime no estado estácionário é nulo, isto é

$$e(\infty) = r(\infty) - y(\infty) = 1 - 1 = 0 \, . \tag{1.43}$$

Este resultado está de acordo com o esperado, pois o controlador $G_c(z)$ é um integrador.

Exercício 1.14

Usando a transformação bilinear e o critério de Routh, determinar se o sistema

$$G(z) = \frac{z - 0{,}2}{z^3 + 2{,}1z^2 + 2{,}08z + 0{,}64} \tag{1.44}$$

é estável ou instável.

Solução

A Equação característica da função de transferência (1.44) é

$$z^3 + 2{,}1z^2 + 2{,}08z + 0{,}64 = 0 \ . \tag{1.45}$$

Aplicando a transformação bilinear (**??**),

$$\left(\frac{v+1}{v-1}\right)^3 + 2{,}1\left(\frac{v+1}{v-1}\right)^2 + 2{,}08\left(\frac{v+1}{v-1}\right) + 0{,}64 = 0 \ . \tag{1.46}$$

Multiplicando a Equação (1.46) por $(v-1)^3$,

$$(v+1)^3 + 2{,}1(v+1)^2(v-1) + 2{,}08(v+1)(v-1)^2 + 0{,}64(v-1)^3 = 0 \ . \tag{1.47}$$

Expandindo a Equação (1.47), obtém-se

$$5{,}82v^3 + 1{,}1v^2 + 0{,}74v + 0{,}34 = 0 \ . \tag{1.48}$$

Como todos os coeficientes do polinômio (1.48) estão presentes e têm o mesmo sinal é necessário montar a seguinte tabela de Routh.

v^3	5,82	0,74
v^2	1,1	0,34
v^1	b_1	
v^0	c_1	

1^a coluna
de coeficientes

$$b_1 = \frac{1{,}1 \,.0{,}74 - 5{,}82 \,.0{,}34}{1{,}1} \cong -1{,}06 \ , \qquad c_1 = \frac{b_1 \,.0{,}34}{b_1} = 0{,}34 \ .$$

Como $b_1 < 0$, há duas mudanças de sinal na 1^a coluna de coeficientes da tabela de Routh. Logo, o polinômio na variável v possui duas raízes no semi-plano direito. Com isso, o polinômio (1.45) na variável z possui duas raízes fora do círculo unitário. Portanto, o sistema (1.44) é instável.

De fato, os pólos de $G(z)$ são

$$z_1 = -0{,}8 + 0{,}8j \ , \ z_2 = -0{,}8 - 0{,}8j \quad \text{e} \quad z_3 = -0{,}5 \ ,$$

sendo que $|z_1| = |z_2| = \sqrt{0{,}8^2 + 0{,}8^2} \cong 1{,}13 > 1$.

Exercício 1.15

Usando o critério de Jury, determinar se o sistema (1.44) é estável ou instável.

Solução

O polinômio $D(z)$ é dado por

$$D(z) = z^3 + 2{,}1z^2 + 2{,}08z + 0{,}64 \ . \tag{1.49}$$

Os coeficientes de $D(z)$ são

$$a_0 = 1 \ \ , \ \ a_1 = 2{,}1 \ \ , \ \ a_2 = 2{,}08 \ \text{ e } \ a_3 = 0{,}64 \ .$$

A primeira condição é satisfeita, pois

$$|a_3| < a_0 \Rightarrow |0{,}64| < 1 \ . \tag{1.50}$$

A segunda condição também é satisfeita, pois

$$D(z)|_{z=1} = 1 + 2{,}1 + 2{,}08 + 0{,}64 = 5{,}82 > 0 \ . \tag{1.51}$$

Sendo ímpar o grau de $D(z)$, pois $n = 3$, então da terceira condição tem-se que

$$D(z)|_{z=-1} = -1 + 2{,}1 - 2{,}08 + 0{,}64 = -0{,}34 < 0 \ , \tag{1.52}$$

ou seja, a terceira condição é verdadeira.

Na Tabela 1.5 é construída a tabela de estabilidade de Jury.

Linha	z^0	z^1	z^2	z^3	
1	0,64	2,08	2,1	1	
2	1	2,1	2,08	0,64	
	$b_2 = \begin{vmatrix} 0{,}64 & 1 \\ 1 & 0{,}64 \end{vmatrix}$				$= -0{,}5904$
	$b_1 = \begin{vmatrix} 0{,}64 & 2{,}1 \\ 1 & 2{,}08 \end{vmatrix}$				$= -0{,}7688$
	$b_0 = \begin{vmatrix} 0{,}64 & 2{,}08 \\ 1 & 2{,}1 \end{vmatrix}$				$= -0{,}7360$
3	−0,5904	−0,7688	−0,7360		

Tabela 1.5: Tabela de estabilidade de Jury.

Da Tabela 1.5, verifica-se que a quarta condição é falsa, pois

$$|b_2| < |b_0| \Rightarrow |-0{,}5904| < |-0{,}7360| \ . \tag{1.53}$$

Como nem todas as condições do critério de Jury são satisfeitas, então o sistema (1.44) é instável.

Exercício 1.16

Determinar a faixa de valores do ganho K para que o sistema em malha fechada da Figura 1.5 seja estável. Suponha um período de amostragem $T = 1$s.

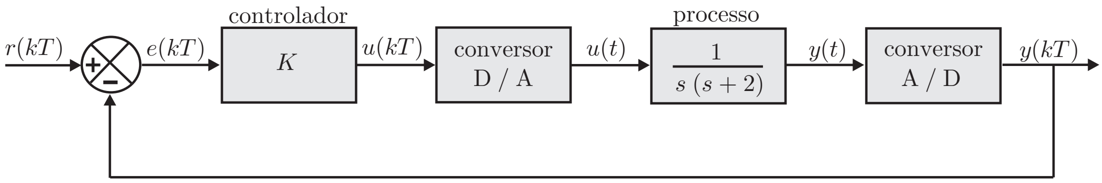

Figura 1.5: Diagrama de blocos de um sistema em malha fechada.

Solução

A função de transferência $H(z)$ do subsistema D/A - processo - A/D é

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{Y(z)}{U(z)} = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right] = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s^2(s+2)}\right] \\ &= (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{-0{,}25}{s} + \frac{0{,}5}{s^2} + \frac{0{,}25}{s+2}\right] \\ &= \left(\frac{z-1}{z}\right)\left(\frac{-0{,}25z}{z-1} + \frac{0{,}5Tz}{(z-1)^2} + \frac{0{,}25z}{z-e^{-2T}}\right) \\ &= \frac{0{,}2838z + 0{,}1485}{z^2 - 1{,}1353z + 0{,}1353} \ . \end{aligned} \tag{1.54}$$

A função de transferência de malha fechada é

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{KH(z)}{1+KH(z)} = \frac{K(0{,}2838z + 0{,}1485)}{z^2 + (0{,}2838K - 1{,}1353)z + 0{,}1353 + 0{,}1485K} \ . \tag{1.55}$$

A Equação característica deste sistema é dada por

$$D(z) = z^2 + (0{,}2838K - 1{,}1353)z + 0{,}1353 + 0{,}1485K = 0 \ . \tag{1.56}$$

Os coeficientes de $D(z)$ são

$$a_0 = 1 \ , \ a_1 = 0{,}2838K - 1{,}1353 \ \text{ e } \ a_2 = 0{,}1353 + 0{,}1485K \ .$$

Da primeira condição do critério de Jury tem-se que

$$\begin{aligned} |a_2| < a_0 \quad &\Rightarrow \quad |0{,}1353 + 0{,}1485K| < 1 \\ &\Rightarrow \quad -1 < 0{,}1353 + 0{,}1485K < 1 \\ &\Rightarrow \quad -1{,}1353 < 0{,}1485K < 0{,}8647 \\ &\Rightarrow \quad -7{,}6451 < K < 5{,}8229 \ . \end{aligned} \tag{1.57}$$

Da segunda condição do critério de Jury tem-se que

$$D(z)|_{z=1} = 1 + 0{,}2838K - 1{,}1353 + 0{,}1353 + 0{,}1485K = 0{,}4323K > 0 \Rightarrow K > 0 \; . \tag{1.58}$$

Sendo par o grau de $D(z)$, pois $n = 2$, então, da terceira condição do critério de Jury tem-se que

$$\begin{aligned} D(z)|_{z=-1} &= 1 - 0{,}2838K + 1{,}1353 + 0{,}1353 + 0{,}1485K \\ &= 2{,}2706 - 0{,}1353K > 0 \Rightarrow K < 16{,}782 \; . \end{aligned} \tag{1.59}$$

Fazendo a intersecção das condições (1.57), (1.58) e (1.59), conclui-se que o sistema em malha fechada é estável para

$$0 < K < 5{,}8229 \; . \tag{1.60}$$

Exercício 1.17

Determinar se um sistema com a Equação característica

$$D(z) = z^4 + 1{,}8z^3 + 0{,}47z^2 - 0{,}45z - 0{,}18 = 0 \tag{1.61}$$

é estável ou instável.

Solução

Os coeficientes de $D(z)$ são

$$a_0 = 1 \;\; , \;\; a_1 = 1{,}8 \;\; , \;\; a_2 = 0{,}47 \;\; , \;\; a_3 = -0{,}45 \;\; \text{e} \;\; a_4 = -0{,}18 \; .$$

A primeira condição é satisfeita, pois

$$|a_4| < a_0 \Rightarrow |-0{,}18| < 1 \; . \tag{1.62}$$

A segunda condição também é satisfeita, pois

$$D(z)|_{z=1} = 1 + 1{,}8 + 0{,}47 - 0{,}45 - 0{,}18 = 2{,}64 > 0 \; . \tag{1.63}$$

Sendo par o grau de $D(z)$, pois $n = 4$, então da terceira condição tem-se que

$$D(z)|_{z=-1} = 1 - 1{,}8 + 0{,}47 + 0{,}45 - 0{,}18 = -0{,}06 < 0 \; , \tag{1.64}$$

ou seja, a terceira condição é falsa.

Como nem todas as condições do critério de Jury são satisfeitas, então o sistema é instável. De fato, o polinômio $D(z)$ pode ser fatorado como

$$D(z) = (z + 0.5)(z - 0.5)(z + 0.6)(z + 1.2) \; , \tag{1.65}$$

ou seja, $D(z)$ possui uma raiz fora do círculo unitário em $z = -1{,}2$.

1.4 Exercícios propostos

Exercício 1.18

Considere o sistema da Figura 1.6.

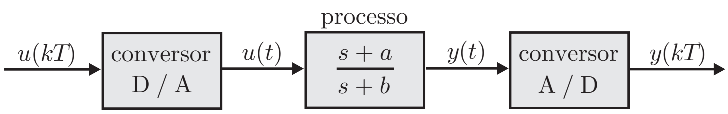

Figura 1.6: Sistema D/A - processo - A/D.

Supondo um período de amostragem T, determine o sistema $H(z) = Y(z)/U(z)$.

Exercício 1.19

Considere o sistema da Figura 1.7.

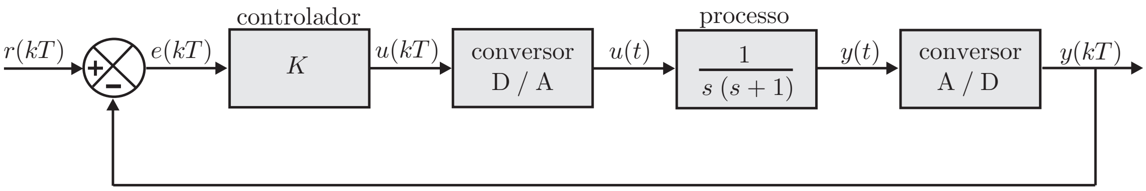

Figura 1.7: Diagrama de blocos do sistema em malha fechada.

Supondo um controlador proporcional $K = 1$ e um período de amostragem $T = 1$s, calcular:
a) a função de transferência de malha fechada $Y(z)/R(z)$;
b) a resposta $y(0), y(1), y(2), \ldots, y(10)$, quando a entrada $r(kT)$ for um degrau unitário ;
c) o erro de regime no estado estacionário quando $r(kT)$ for um degrau unitário.

Exercício 1.20

Considere o sistema da Figura 1.8.

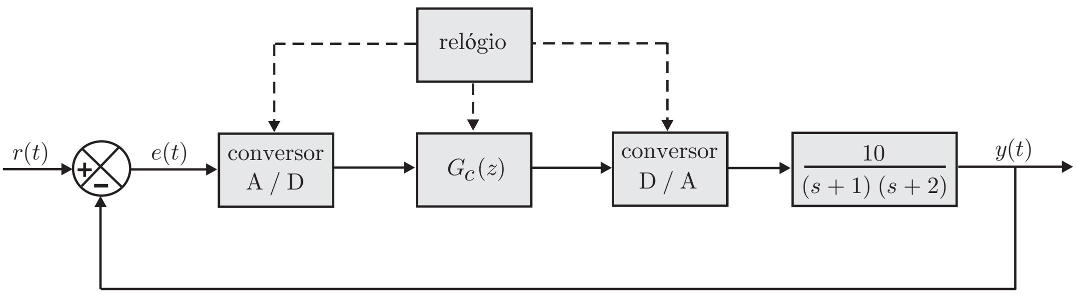

Figura 1.8: Diagrama de blocos do sistema em malha fechada.

Supondo um período de amostragem $T = 1$s e

$$G_c(z) = \frac{0{,}366z^2 - 0{,}185z + 0{,}019}{(z-1)(z+0{,}267)} \;, \quad \text{calcular:}$$

a) a função de transferência de malha fechada $Y(z)/R(z)$;
b) a resposta $y(0), y(1), y(2), \ldots, y(10)$, quando a entrada $r(kT)$ for um degrau unitário ;
c) o erro de regime no estado estacionário quando $r(kT)$ for um degrau unitário.

Exercício 1.21

Determinar se as seguintes equações características têm todas as suas raízes no interior do círculo unitário.

a) $z^2 + 1{,}5z + 1{,}125 = 0$.
b) $z^2 - 2z + 1 = 0$.
c) $z^3 - 0{,}2z^2 - 0{,}3z + 0{,}4 = 0$.
d) $z^3 - 1{,}3z^2 - 0{,}08z + 0{,}24 = 0$.
e) $z^4 + 0{,}4z^3 - 0{,}57z^2 - 0{,}1z + 0{,}08 = 0$.

Exercício 1.22

Usando o critério de Jury ou Routh, determinar se o sistema com função de transferência

$$G(z) = \frac{z - 1{,}5}{z^4 - 1{,}2z^3 + 0{,}07z^2 + 0{,}3z - 0{,}08} \tag{1.66}$$

é estável ou instável.

Exercício 1.23

O sistema da Figura 1.9 é representado pela seguinte Equação de diferenças

$$y(k+2) - y(k+1) + \alpha y(k) = u(k) \ . \tag{1.67}$$

Determinar para quais valores de α o sistema $G(z)$ é estável.

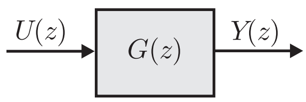

Figura 1.9: Sistema $G(z)$.

Exercício 1.24

Determinar a faixa de valores do ganho K para que o sistema em malha fechada da Figura 1.10 seja estável. Suponha um período de amostragem $T = 1$s.

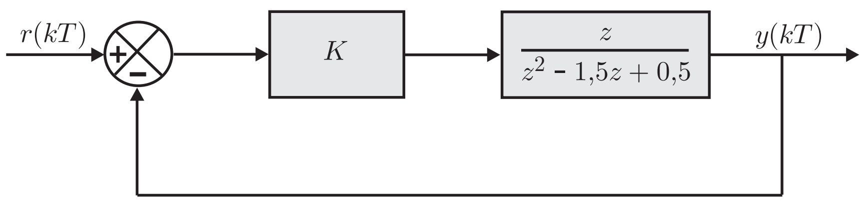

Figura 1.10: Diagrama de blocos do sistema em malha fechada.

Exercício 1.25

Determinar a faixa de valores do ganho K para que o sistema em malha fechada da Figura 1.11 seja estável. Suponha um período de amostragem $T = 1$s.

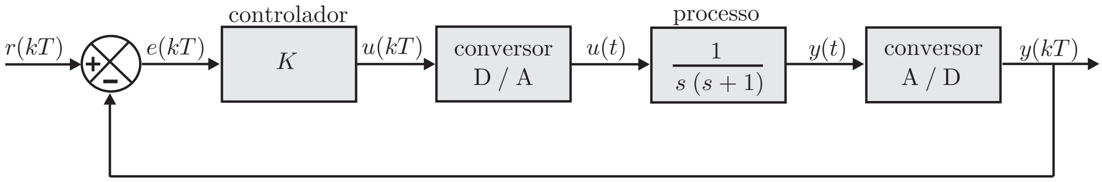

Figura 1.11: Diagrama de blocos do sistema em malha fechada.

Exercício 1.26

Determinar a faixa de valores do ganho K para que o sistema em malha fechada da Figura 1.12 seja estável. Suponha um período de amostragem $T = 0{,}5$s.

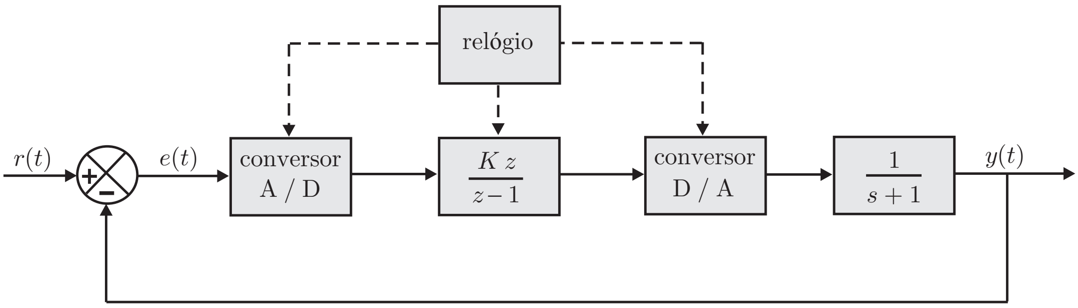

Figura 1.12: Diagrama de blocos do sistema em malha fechada.

Exercício 1.27

Considere o sistema da Figura 1.13.

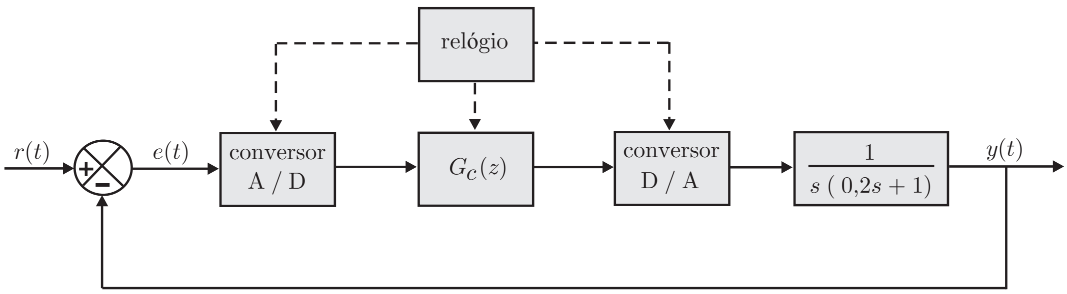

Figura 1.13: Diagrama de blocos do sistema em malha fechada.

a) Supondo $G_c(z) = 1$, determinar se o sistema em malha fechada é estável para $T = 0{,}1$s.
b) Supondo $G_c(z) = z/(z-1)$, determinar se o sistema em malha fechada é estável para $T = 2$s.
c) Supondo $G_c(z) = z/(z-1)$ e $T = 0{,}1$s , determinar os erros de regime para entrada $r(t)$ rampa e degrau unitário.