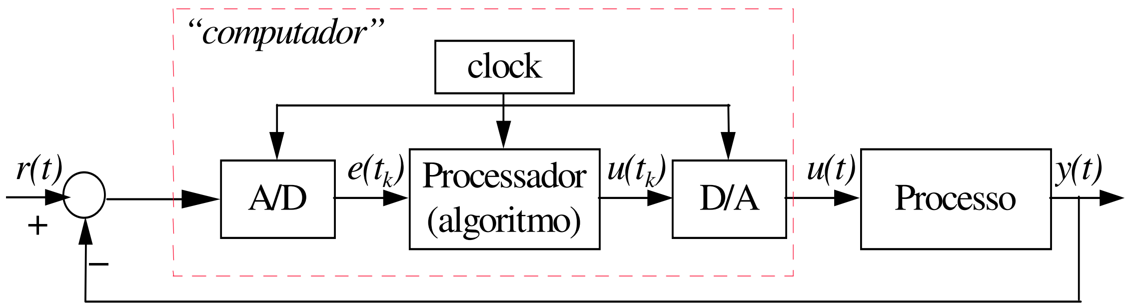
Introdução

Controle Digital de Sistemas Dinâmicos



Modelos

São utilizadas duas abordagens na construção de modelos de processos industriais:

- **estruturalista**: baseada nas equações diferenciais que regem o processo; apresenta a necessidade de se definir o grau de detalhamento desejado para o modelo (número de equações e variáveis) e as medidas dos parâmetros físicos do processo; é utilizada no projeto de definição de equipamento.
- **globalista**: apresenta o modelo como uma "caixa preta" através das relações entrada-saída; é uma abordagem mais simples, utilizada no projeto de controle.

Qualidades do Controle Digital

- Flexibilidade na implementação dos controladores (as alterações são feitas em softwares);
- Facilidade de implementação de controladores complexos;
- Maior imunidade a ruído;
- Menor custo.

(Possíveis) Desvantagens

- Alto custo para pequenos processos;
- Análise e projeto mais complexos;
- Necessidade de softwares que operem em tempo real.

Sinais e Sistemas

- **Sinais analógicos**: sinais definidos para todo instante *t* pertencente ao intervalo de tempo no qual o sinal está sendo observado;
- **Sinais discretos no tempo**: sinais definidos apenas em determinados instantes dentro do intervalo de tempo de observação;
- **Sinais digitais**: sinais discretos em amplitude (truncamentos na representação digital do valor definido) e no tempo;
- **Sistema de Controle Digital**: interação entre um subsistema contínuo (processo) e outro digital (controle).

Transformada $\mathcal{Z}$

Definição e exemplos

Definição: a Transformada $\mathcal{Z}$ de uma sequência infinita de números $f(t_0), f(t_1)$, ... é a série de potências dada por:

$$F(z) = \mathcal{Z}\left\{f(t_k)\right\} \overset{\Delta}{=} \sum_{k=0}^{\infty} f(t_k) \cdot z^{-k}$$

onde z é uma variável complexa.

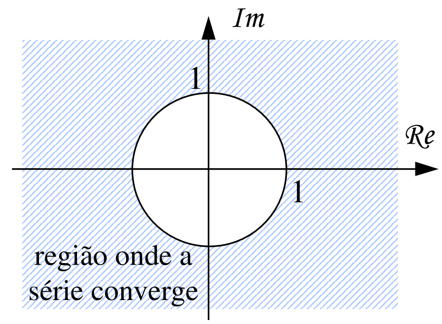
Observação: é possível definir a Transformada $\mathcal{Z}$ como sendo o somatório para k indo de $-\infty$ a $+\infty$ (transformada bilateral). Essa definição não é a mais interessante para a análise de controle de sistemas, sendo, por outro lado, relevante nos problemas de tratamento de sinais.

Exemplo 1) $\left\{y_k\right\} = \left\{1,1,1,\ldots\right\}$ $\quad k \geq 0$ (equivalente ao degrau unitário nos sistemas contínuos)

$$Y(z) = 1 \cdot z^{-0} + 1 \cdot z^{-1} + 1 \cdot z^{-2} + \ldots + 1 \cdot z^{-\infty} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \ldots + \frac{1}{z^{\infty}}$$

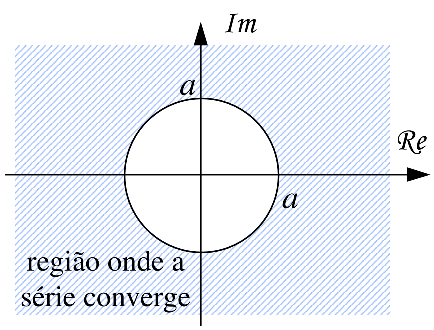
O somatório acima é o somatório de uma Progressão Geométrica de razão z^{-1}. Para $|z| > 1$, tem-se:

$$\boxed{Y(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1} \qquad \left(|z| > 1\right)}$$



Exemplo 2) $y(k) = a^k \qquad k = 0,1,2,\ldots$

$$Y(z) = a^0 \cdot z^{-0} + a^1 \cdot z^{-1} + a^2 \cdot z^{-2} + \ldots + a^{\infty} \cdot z^{-\infty} = 1 + \frac{a}{z} + \frac{a^2}{z^2} + \ldots + \frac{a^{\infty}}{z^{\infty}}$$



Novamente tem-se um somatório de Progressão Geométrica, com nova condição de convergência:

$$\boxed{Y(z) = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} = \frac{z}{z-a} \qquad \left(|z| > |a|\right)}$$

Exemplo 3) $y(k) = kT \qquad k = 0,1,2,\ldots$ (rampa unitária amostrada com período T)

$$Y(z) = 0 \cdot z^{-0} + T \cdot z^{-1} + 2T \cdot z^{-2} + 3T \cdot z^{-3} + \ldots =$$

$$= T \cdot \left[0 \cdot z^{-0} + 1 \cdot z^{-1} + 2 \cdot z^{-2} + 3 \cdot z^{-3} + \ldots \right] =$$

$$= T \cdot \left[\left(z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} \ldots \right) + \left(z^{-2} + z^{-3} + \ldots \right) + \left(z^{-3} + \ldots \right) + \ldots \right] =$$

$$= T \cdot \left[\left(z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} \ldots \right) + z^{-1} \left(z^{-1} + z^{-2} + \ldots \right) + z^{-2} \left(z^{-1} + z^{-2} + \ldots \right) + \ldots \right] =$$

$$= T \cdot \left(z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} \ldots \right) \left(1 + z^{-1} + z^{-2} + \ldots \right)$$

Substituindo os dois somatórios, chega-se a:

$$\boxed{Y(z) = T \cdot \frac{1}{z-1} \cdot \frac{z}{z-1} == T \cdot \frac{z}{(z-1)^2} \qquad (|z| > 1)}$$

Propriedades da Transformada Z

Linearidade

Sejam $f(t_k)$ e $g(t_k)$ duas sequências quaisquer, e α e β escalares, então:

$$\mathcal{Z}\left[\alpha \cdot f(t_k) + \beta \cdot g(t_k) \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\alpha \cdot f(t_k) + \beta \cdot g(t_k) \right] \cdot z^{-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha \cdot f(t_k) \cdot z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} \beta \cdot g(t_k) \cdot z^{-k} =$$

$$= \alpha \cdot F(z) + \beta \cdot G(z)$$

$$\boxed{\mathcal{Z}\left[\alpha \cdot f(t_k) + \beta \cdot g(t_k) \right] = \alpha \cdot F(z) + \beta \cdot G(z)}$$

Translação

$$\mathcal{Z}\left[f(k-n) \right] = \sum_{j=0}^{\infty} f(j-n) \cdot z^{-j} =$$

$$= \sum_{j=n}^{\infty} f(j-n) \cdot z^{-j} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) \cdot z^{-n} \cdot z^{-k} = z^{-n} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} f(k) \cdot z^{-k}$$

$$\boxed{\mathcal{Z}\left[f(k-n) \right] = z^{-n} \cdot F(z)}$$

Observação: o **operador atraso unitário** pode ser obtido fazendo-se $n = 1$.

$$g(t_k) = \begin{cases} f(t_{k-1}) & ,k \geq 1 \\ 0 & ,k = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad G(z) = z^{-1} \cdot F(z)$$

Pode-se, também, obter a transformada do deslocamento em avanço:

$$F(z) = \sum_{j=0}^{\infty} f(j) \cdot z^{-j} = \sum_{j=0}^{n-1} f(j) \cdot z^{-j} + \sum_{j=n}^{\infty} f(j) \cdot z^{-j} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} f(j) \cdot z^{-j} + \sum_{k=0}^{\infty} f(k+n) \cdot z^{-k} \cdot z^{-n} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} f(j) \cdot z^{-j} + \mathcal{Z}\left[f(k+n)\right] \cdot z^{-n}$$

$$\boxed{\mathcal{Z}\left[f(k+n)\right] = z^{n} \cdot \left[F(z) - \sum_{j=0}^{n-1} f(j) \cdot z^{-j}\right]}$$

Teorema do Valor Inicial

Se $f(t_k)$ tem Transformada $\mathcal{Z}$ dada por $F(z)$, então o valor inicial da sequência $\{ f(t_k) \}$ é dado por

$$f(0) = \lim_{z \to \infty} \left[F(z)\right]$$

se o limite existir.

Teorema do Valor Final

Se $f(t_k)$ tem Transformada $\mathcal{Z}$ dada por $F(z)$, com todos os pólos dentro do círculo de raio unitário, exceto por um eventual pólo em $z = -1$, então:

$$\lim_{k \to \infty} f(t_k) = \lim_{z \to 1} \left[\left(1 - z^{-1}\right) \cdot F(z)\right]$$

se os limites existirem.

Exemplo 4) Resolver a seguinte equação de diferenças (análoga, no domínio discreto, à equação diferencial no domínio contínuo)

$$x(k+2) + 3 \cdot x(k+1) + 2 \cdot x(k) = 0 \qquad , \begin{cases} x(0) = 0 \\ x(1) = 1 \end{cases}$$

$$z^2 \cdot \left[X(z) - x(0) - x(1) \cdot z^{-1}\right] + 3z \cdot \left[X(z) - x(0)\right] + 2X(z) =$$

$$= z^2 \cdot \left[X(z) - z^{-1}\right] + 3z \cdot \left[X(z)\right] + 2X(z) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(z^2 + 3z + 2\right) \cdot X(z) = z$$

$$\boxed{X(z) = \frac{z}{z^2 + 3z + 2} = \frac{z}{z+1} - \frac{z}{z+2} \qquad , \qquad x(k) = (-1)^k - (-2)^k}$$

Transformada $\mathcal{Z}$ inversa

Integral de Inversão

A Transformada $\mathcal{Z}$ inversa é dada analiticamente por:

$$f(t_k) = \mathcal{Z}^{-1}[F(z)] = \frac{1}{j \cdot 2\pi} \oint_c F(z) \cdot z^{k-1} \cdot dz$$

onde *c* é uma circunferência com centro na origem do plano complexo e que engloba todos os pólos de *F(z)*, percorrida no sentido anti-horário. O cálculo dessa integral é equivalente a:

$$f(t_k) = \sum \text{[resíduos de } F(z).z^{k-1} \text{ nos pólos de } F(z) \text{]}$$

Exemplo 5) Obter $x(t_k)$ onde

$$X(z) = \frac{10z}{(z-1)(z-2)}$$

A integral de inversão fornece:

$$x(t_k) = \frac{1}{j \cdot 2\pi} \oint_c \frac{10z}{(z-1)(z-2)} \cdot z^{k-1} \cdot dz =$$

$$= \frac{1}{j \cdot 2\pi} \oint_c \left[-\frac{10z^k}{(z-1)} + \frac{10z^k}{(z-2)} \right] \cdot dz =$$

$$= \left. \frac{10z^k}{(z-2)} \right|_{z=1} + \left. \frac{10z^k}{(z-1)} \right|_{z=2} =$$

$$x(t_k) = 10 \cdot \left(-1 + 2^k\right) \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Método da expansão em série por divisão contínua

Este método é útil quando há dificuldade em obter uma expressão para a inversa, ou quando se deseja apenas os primeiros termos da sequência.

A sequência $\{ f(t_k) \}$ pode ser obtida dividindo-se o polinômio do numerador pelo polinômio do denominador, com o resultado na forma de potências de z^{-1} (a rigor, tanto o numerador quanto o denominador devem ser escritos como polinômios crescentes de z^{-1}).

Exemplo 6) Obter $x(t_k)$ onde:

$$X(z) = \frac{z+1}{z-0.36}$$

Daí:

$$\begin{array}{lll|l}
z & +1 & & z \quad -0.36 \\ \cline{4-4}
-z & +0.36 & & 1 \quad +1.36z^{-1} \quad +0.49z^{-2} + \ldots \\ \cline{1-2}
0 & +1.36 & & \\
 & -1.36 & +0.49z^{-1} \ldots &
\end{array}$$

$x(t_k) = (\ 1,\ 1.36,\ 0.49,\ \ldots)$

(são os coeficientes se a série for convergente)

Exemplo 7) Obter $x(t_k)$ onde:

$$X(z) = \frac{z}{z-1}$$

$x(t_k) = (\ 1,\ 1,\ 1,\ ...)$

Daí:

$$\begin{array}{lll|l}
z & & & z \quad -1 \\ \cline{4-4}
-z & +1 & & 1 \quad +z^{-1} \quad +z^{-2} + \ldots \\ \cline{1-2}
0 & +1 & & \\
 & -1 & +z^{-1} \ldots &
\end{array}$$

Método da expansão em frações parciais

Em geral, o método mais utilizado é expandir $z^{-1}X(z)$ em frações parciais e obter a inversa a partir de tabelas.

Exemplo 8) Obter $x(t_k)$ onde:

$$X(z) = \frac{10z}{(z-1)(z-2)}$$

Expandindo em frações parciais:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{10}{(z-1)(z-2)} = \frac{a_1}{z-1} + \frac{a_2}{z-2}$$

$$a_1 = \left.\frac{10}{z-2}\right|_{z=1} = -10 \quad a_2 = \left.\frac{10}{z-1}\right|_{z=2} = 10$$

$$X(z) = \frac{-10z}{z-1} + \frac{10z}{z-2} \quad \Rightarrow \quad x(k) = 10 \cdot \left(-1 + 2^k\right) \quad (\ k = 0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ ...\ )$$

Exemplo 9) Obter $x(t_k)$ onde:

$$X(z) = \frac{z\left(1 - e^{-aT}\right)}{(z-1)\left(z - e^{-aT}\right)}$$

Expandindo em frações parciais:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{\left(1 - e^{-aT}\right)}{(z-1)\left(z - e^{-aT}\right)} = \frac{a_1}{z-1} + \frac{a_2}{z - e^{-aT}}$$

$$a_1 = \left.\frac{1 - e^{-aT}}{z - e^{-aT}}\right|_{z=1} = 1 \quad a_2 = \left.\frac{1 - e^{-aT}}{z-1}\right|_{z=e^{-aT}} = -1$$

$$X(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-aT}} \quad \Rightarrow \quad x(k) = 1 - \left(e^{-aT}\right)^k = 1 - e^{-akT} \quad (\ k = 0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ ...\ )$$

Representação Matemática de Sistemas em Tempo Discreto

Resposta Impulsiva e Função de Transferência

Seja a equação de diferenças de ordem n:

$$y(k+n)+a_{n-1}y(k+n-1)+\ldots+a_0y(k)=b_nu(k+n)+\ldots+b_0u(k) \tag{1}$$

Aplicando-se a Transformada $\mathcal{Z}$ em ambos os lados da equação acima e considerando condições inciais nulas ($y(k)=0$, $u(k)=0$ para $k = 0, 1, \ldots, n\text{-}1$, vem:

$$\left(z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_0\right)\cdot Y(z)=\left(b_nz^n+b_{n-1}z^{n-1}+\ldots+b_0\right)\cdot U(z) \tag{2}$$

$$\{y_k\}=\mathcal{Z}^{-1}[Y(z)]=\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{b_nz^n+b_{n-1}z^{n-1}+\ldots+b_0}{z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_0}\cdot U(z)\right] \tag{3}$$

No caso de condições iniciais não nulas, o procedimento seria análogo, porém no lado direito de (2) apareceriam termos correspondentes às condições iniciais (veja a propriedade de Translação da Tra nsformada $\mathcal{Z}$).

Resposta impulsiva

Seja o sistema dado pela equação de diferenças (1). Suponha o sistema inicialmente em repouso (condições iniciais nulas) e considere a resposta do sistema para uma entrada $\{ u_k \}$ dada por:

$$u_k=\delta_k=\begin{cases}1 & ,k=0\\ 0 & ,k\neq 0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad U(z)=1$$

A sequência,

$$\{y_k\}=\mathcal{Z}^{-1}[Y(z)]=\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{b_nz^n+b_{n-1}z^{n-1}+\ldots+b_0}{z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_0}\right]$$

é chamada resposta impulsiva.

A Função de Transferência $G(z)$ de um sistema discreto dado pela sua equação de diferenças (1) é definida como a razão das Transformadas $\mathcal{Z}$ da saída e da entrada, a partir de condições iniciais nulas.

$$G(z)\overset{\Delta}{=}\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{b_nz^n+b_{n-1}z^{n-1}+\ldots+b_0}{z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_0}$$

Relação entre a Transformada Z e a Transformada de Laplace

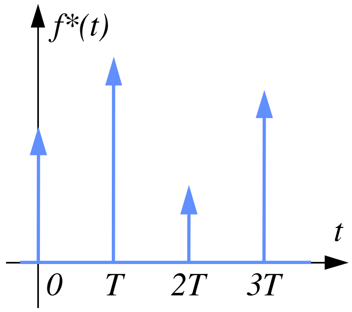
Seja $f(t)$ um sinal analógico e $\delta(t-a)$ a função impulso unitário em $t = a$.

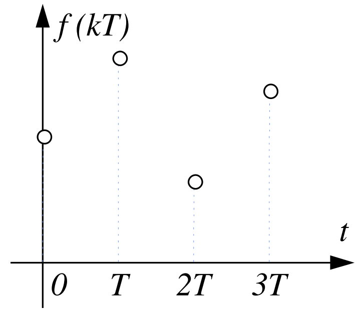
Seja o sinal analógico $f^*(t)$, onde:

$$f^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty}f(t)\cdot\delta(t-kT)=\sum_{k=0}^{\infty}f(kT)\cdot\delta(t-kT)$$

Note que $f^*(t)$ somente é não nulo nos instantes 0, T, $2T$, ...

Seja *{ f(kT) }* um sinal discreto, sendo *T* o período de amostragem. Nos instantes diferentes de *0*, *T*, *2T* ... a função não é definida.





Calculando a Transformada de Laplace *F*(s)* do sinal *f*(t)*, teremos:

$$F^*(s) = \int_{t=0}^{\infty} f^*(t)\cdot e^{-st}dt = \int_{t=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\cdot \delta(t-kT)\cdot e^{-st}dt$$

$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\cdot e^{-skT}$$

A Transformada $\mathcal{Z}$ de *f(kT)* é:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\cdot z^{-k}$$

Para

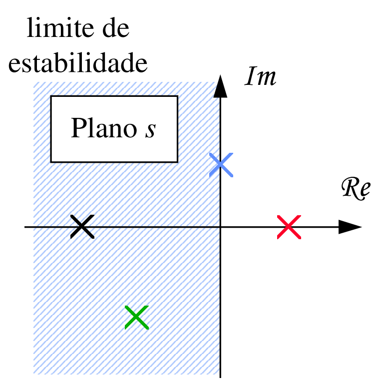
$$z = e^{sT}$$

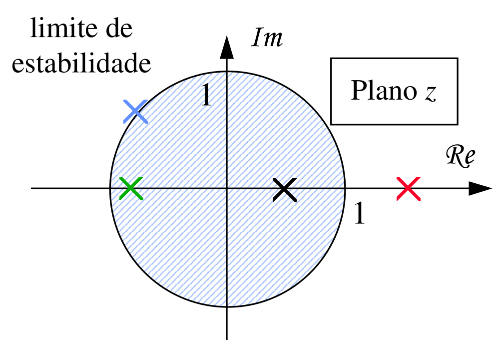
tem-se a Transformada $\mathcal{Z}$ a partir da Transformada de Laplace (isto é, *F(z) = F*(s)*). Seja então:

$$s = \sigma + j\omega$$

Daí:

$$z = e^{sT} = e^{\sigma T}\cdot e^{j\omega T} = e^{\sigma T}\cdot e^{j(\omega T + 2k\pi)} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |z| = e^{\sigma T} \\ \angle z = \omega T + 2k\pi \end{cases}$$





Estabilidade de Sistemas em Tempo Discreto

Definição

*Diz-se que um sistema possui a propriedade de estabilidade externa se toda sequência de entrada limitada produz uma sequência de saída limitada (estabilidade **BIBO** - Bounded Input Bounded Output).*

Lema

*Um sistema linear, discreto, invariante no tempo, com resposta impulsiva g_k é **BIBO**-estável se, e somente se, os pólos de G(z) têm módulo estritamente menor que 1.*

Exemplo 1) $G(z) = \dfrac{z+1}{z^2+0.6z+0.1}$

$$z^2+0.6z+0.1=0 \quad \Rightarrow \quad z=\frac{-0.6\pm\sqrt{0.36-0.4}}{2}=-0.3\pm j0.1$$

$$\begin{cases} z_1=-0.3+j0.1 \\ z_2=-0.3-j0.1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad |z_1|=|z_2|=\sqrt{0.09+0.01}\cong 0.316<1$$

Sistema estável

Exemplo 2) $G(z)=\dfrac{z}{z-1}$

$$|z|=1$$

Sistema instável

Critério de Routh

Não é possível aplicar diretamente o Critério de Routh a um sistema em tempo discreto (como visto para sistemas em tempo contínuo), pois o critério informa apenas a existência de raízes de um polinômio no semiplano direito. Para poder aplicar o Critério de Routh utiliza-se uma transformação que mapeia o círculo de raio unitário (em z) no semiplano esquerdo (em v):

$$\boxed{z=\frac{v+1}{v-1} \quad \Leftrightarrow \quad v=\frac{z+1}{z-1}}$$ (transformação bilinear)

$$D(z) \xrightarrow{T} \frac{N(v)}{(v-1)^n}$$ (n = grau do polinômio $D(z)$)

As raízes de $D(z)$ correspondem às de $N(v)$ (exceto em v = 1). Aplicando o Critério de Routh ao polinômio $N(v)$, a existência de "pólos" no semiplano direito em v corresponde à existência pólos instáveis (fora do círculo de raio unitário do plano complexo z).

Observação: os zeros de $N(v)$ são os zeros de $D(z)$;

esta transformação mapeia o círculo unitário do plano z para o semiplano esquerdo do plano v;

note que v também é um sistema discreto (como z), e não contínuo (como s). A volta de z para s não seria unívoca, devido à fase de s possuir o termo $2k\pi$.

Exemplo 3) $T(z)=\dfrac{0.09(z+1)}{z^2+1.2z+0.33}$

$$D(z)=z^2+1.2z+0.33 \quad \Rightarrow \quad D(v)=\left(\frac{v+1}{v-1}\right)^2+1.2\left(\frac{v+1}{v-1}\right)+0.33$$

$$D(v)=\frac{(v+1)^2+1.2(v^2-1)+0.33(v-1)^2}{(v-1)^2}=\frac{2.53v^2+1.34v+0.13}{(v-1)^2}=\frac{N(v)}{(v-1)^2}$$

Aplicando, agora, o Critério de Routh, conforme mostrado ao lado, conclui-se que o sistema é estável.

v^2	2.53	0.13
v^1	1.34	0
v^0	0.13	

Critério de Jury

Seja $D(z)$ dado por:

$$D(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_{n-1}z+a_n$$

Deve-se construir a seguinte tabela:

a_0	a_1	$\cdots$	a_{n-1}	a_n	
a_n	a_{n-1}	$\cdots$	a_1	a_0	$\alpha_n=\dfrac{a_n}{a_0}$
a_0^{n-1}	a_1^{n-1}	$\cdots$	a_{n-1}^{n-1}		
a_{n-1}^{n-1}	a_{n-2}^{n-1}	$\cdots$	a_0^{n-1}		$\alpha_{n-1}=\dfrac{a_{n-1}^{n-1}}{a_0^{n-1}}$
$\vdots$					
a_0^0					

- a primeira linha é formada pelos coeficientes de $D(z)$;
- a segunda linha é obtida invertendo-se a ordem da primeira;
- obtém-se, então, o termo α_n;
- a terceira linha é obtida multiplicando-se a segunda por α_n e subtraindo esse resultado da primeira (portanto o último elemento dessa linha é nulo);
- a quarta linha é obtida invertendo-se a ordem da terceira;
- o procedimento é repetido até a obtenção de $2n+1$ linhas (a última consistindo de apenas um termo).

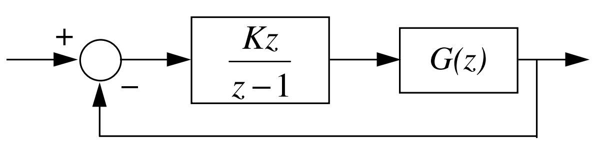
Teorema: se $a_0 > 0$, então $D(z)$ tem todas as raízes dentro do círculo de raio unitário se, e somente se, todos os coeficientes a_0^k , k = 0, 1, ..., $n-1$ forem positivos. Se nenhum a_0^k for zero, então o número de a_0^k negativos é igual ao número de raízes fora do círculo de raio unitário.

Exemplo 4) $D(z)=z^2+1.2z+0.33$

Através da tabela ao lado pode-se constatar mais uma vez a estabilidade.

1	1.2	0.33	
0.33	1.2	1	$\alpha_2 = 0.33$
0.891	0.804	0	
0.804	0.891		$\alpha_1 = 0.804 / 0.891 = 0.902$
0.166	0		

Exercício) Para que valores de K o sistema é estável ?

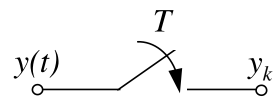


a) $G(z)=\dfrac{2z^2+3z+1}{z^2+z+0.25}$

b) $G(z)=\dfrac{z}{z-1}$

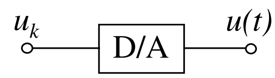
Controle Digital de Sistemas

Conversão A/D e D/A

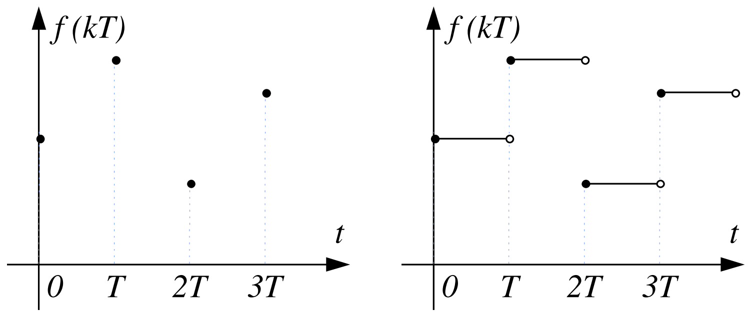


O conversor A/D do diagrama de uma malha de controle digital é considerado como sendo uma simples chave para efeito de estudos. Assim, o valor do sinal $y(t)$ é amostrado a intervalos de tempo dados por T, resultando na sequência y_k.

Na conversão D/A, uma sequência u_k definida apenas em instantes discretos deve gerar um sinal $u(t)$ contínuo no tempo. É comum utilizar-se um segurador de ordem zero (Sample and Hold), onde:

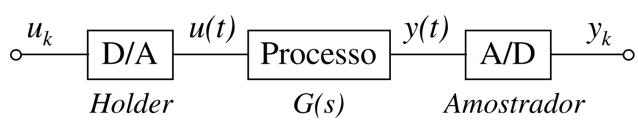


$$u(t) \overset{\Delta}{=} u_k \quad ,kT \le t < (k+1)T$$

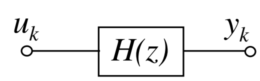


Representação Discreta do Subsistema D/A - Processo - A/D

Seja $H(z)$ a Transformada $\mathcal{Z}$ da resposta impulsiva do conjunto ao lado. Devido ao segurador de ordem zero, a entrada $u(t)$ é um pulso unitário com duração dada por T. Calculando a Transformada de Laplace do sinal $u(t)$, tem-se:



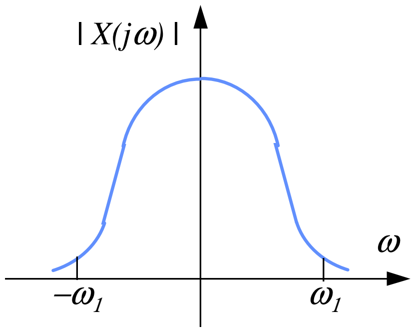
$$u(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < T \\ 0, & t < 0, t \ge T \end{cases} \quad \Rightarrow \quad U(s) = \frac{1}{s}\left(1 - e^{-sT}\right)$$



Daí:

$$\boxed{Y(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \cdot G(s) \quad \Rightarrow \quad H(z) = \mathcal{Z}\left[Y(s)\right] = \left(1 - z^{-1}\right) \cdot \mathcal{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right]}$$

Teorema da Amostragem



Indica a menor frequência de amostragem necessária para reconstituir o sinal original a partir do sinal amostrado.

Se a frequência de amostragem (sample) $\omega_s = \dfrac{2\pi}{T}$, satisfaz:

$$\omega_s > 2\omega_1$$

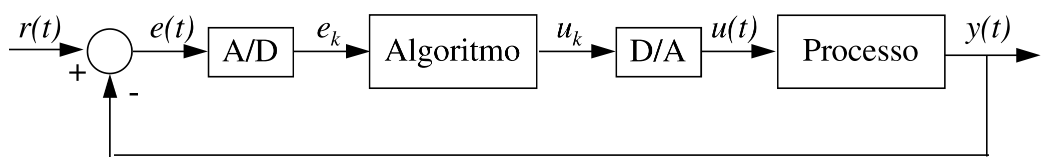
, onde ω_1 é a frequência a partir da qual $X(j\omega)$ é desprezível, então o sinal $x(t)$ pode ser reconstruído a partir do sinal amostrado.

Observação: na prática utiliza-se:

$$\omega_s \cong 10\omega_1$$

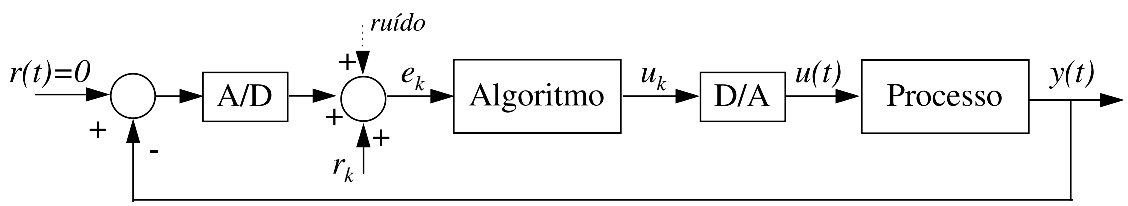
Tomando para ω_1 a frequência da harmônica de maior ordem e com amplitude significativa.

Análise de um Sistema de Controle Digital

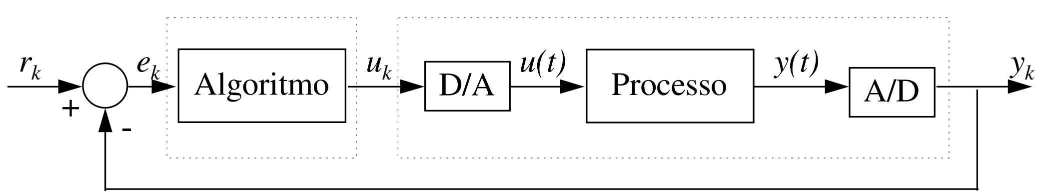


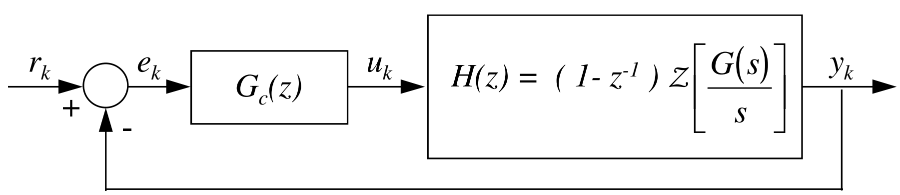
Há dois casos a serem analisados:

Referência gerada internamente (mais comum)

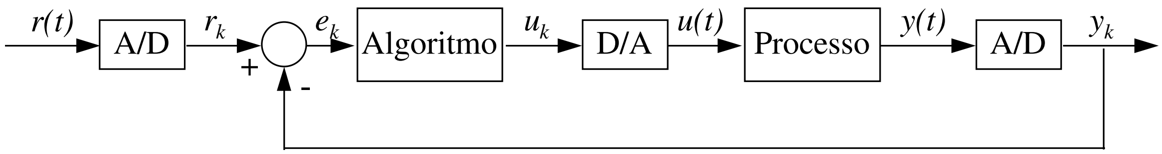


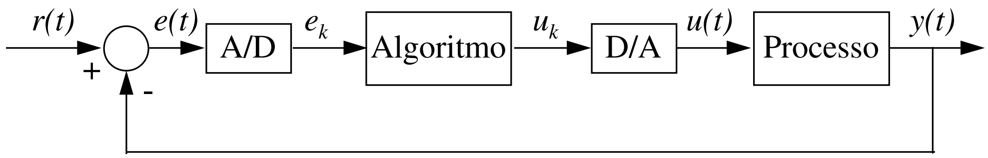
$$G_c(z) \qquad\qquad H(z) = (1 - z^{-1})\, Z\left[\frac{G(s)}{s}\right]$$



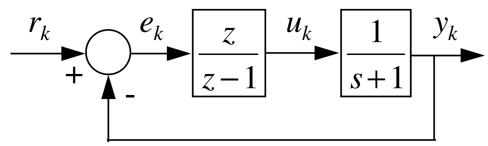


Referência gerada externamente





Exemplo 1) Seja o sistema ao lado (os conversores A/D e D/A do processo estão implícitos), operando com período de amostragem $T = 0.1$s. Calcule:



a) $H(z)$;
b) a resposta a impulso unitário;
c) a resposta a degrau unitário;
d) o erro estacionário para o degrau unitário;

a) $H(z) = \left(1 - z^{-1}\right) \cdot Z\left[\frac{G(s)}{s}\right]$

$$\frac{G(s)}{s} = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

$$Z\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right] = Z\left[\frac{1}{s}\right] - Z\left[\frac{1}{s+1}\right] = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}}$$

$$H(z) = \left(1 - z^{-1}\right) \cdot \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-0.9048}\right) = 1 - \frac{z-1}{z-0.9048} \quad \Rightarrow \quad \boxed{H(z) = \frac{0.0952}{z-0.9048}}$$

b) para obter a resposta impulsiva do sistema, devemos obter a Função de Transferência do sistema em malha fechada.

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G_c(z) \cdot H(z)}{1 + G_c(z) \cdot H(z)} = \frac{0.0952z}{z^2 - 1.8096z + 0.9048}$$

Os pólos do sistema em malha fechada são:

$$z_{1,2} = \frac{1.8096 \pm \sqrt{3.2747 - 3.6192}}{2} = 0.905 \pm j0.293 \quad \Rightarrow \quad \left|z_{1,2}\right| = 0.951$$

O sistema é, portanto, estável. A resposta ao impulso unitário pode ser obtida dividindo-se o polinômio do numerador pelo polinômio do denominador da Função de Transferência obtida em malha fechada.

$0.0952\, z$	$z^2 - 1.8096\, z + 0.9048$
$-0.0952\, z + 0.1723 - 0.0861\, z^{-1}$	$0\, z^0 + 0.0952\, z^{-1} + 0.1723\, z^{-2} + 0.2257\, z^{-3}$
$0.1723 - 0.0861\, z^{-1}$	
$-\ 0.1723 + 0.3118\, z^{-1} - 0.1559\, z^{-2}$	
$0.2257\, z^{-1} - 0.1559\, z^{-2}$	

Daí: y_k = (0 ; 0.0952 ; 0.1723 ; 0.2257 ; ...) (Verifique que $y_k = 0.3244 \cdot 0.9512^k \cdot sen(0.3137k)$, k = 0, 1, 2, ...)

c) a resposta ao degrau unitário é dada por:

$$\boxed{Y(z) = \frac{z}{z-1} \cdot \frac{0.0952z}{z^2 - 1.8096z + 0.9048} = \frac{0.0952z^2}{z^3 - 2.8096z^2 + 2.7144z - 0.9048}}$$

$$\begin{array}{l|l} 0.0952\,z^2 & z^3 - 2.8096\,z^2 + 2.7144\,z - 0.9048 \\ \hline \quad 0.2675\,z - 0.2584 + 0.0861\,z^{-1} & 0\,z^0 + 0.0952\,z^{-1} + 0.2675\,z^{-2} + 0.4931\,z^{-3} \\ \qquad 0.4931 - 0.6399\,z^{-1} - 0.2420\,z^{-2} & \end{array}$$

Daí: y_k= (0;0.0952;0.2675;0.4931;...) (Verifique que $y_k = 1 - 1.0513 \cdot 0.9512^{k+1} \cdot cos(0.3137k)$, k = 0, 1, 2, ...)

d) aplicando o Teorema do Valor Final tem-se:

$$y_\infty = \lim_{z \to 1}\left[\left(1 - z^{-1}\right) \cdot Y(z)\right] = \frac{0.0952}{1 - 1.8096 + 0.9048} = \frac{0.0952}{0.0952}$$

Portanto:

$$y_\infty = 1 \quad \Leftrightarrow \quad e_\infty = 0$$

Exercício 1) Determinar $x(kT)$ para $X(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2(z-2)}$

Exercício 2) Determinar a solução da seguinte equação de diferenças:

$$x_{k+2} + 2x_{k+1} + x_k = u_k \qquad \begin{cases} x_0 = x_1 = 0 \\ u_k = k \quad k = 0,1,2,... \end{cases}$$

Exercício 3) Dado um sistema dinâmico descrito pela equação de diferenças:

$$x_{k+2} - x_{k+1} + 0.09x_k = u_k \qquad \begin{cases} x_0 = x_1 = 0 \\ u_k = 1 \quad k \geq 0 \end{cases}$$

Pede-se:

a) a Transformada $\mathcal{Z}$ da sequência x_k;

b) $\lim_{k \to \infty}[x_k]$;

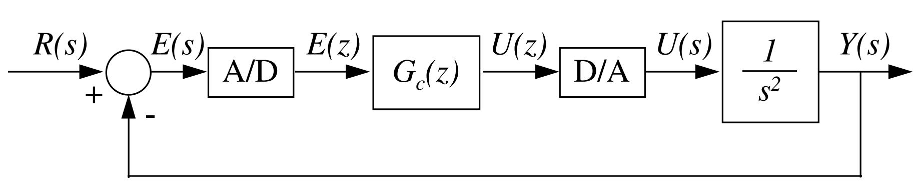
c) a Função de Transferência;

Exercício 4) A resposta impulsiva (g_k) de um sistema discreto é dada por:

k	0	1	2	3	...
g_k	2	1	0.5	0.25	...

Determinar a Função de Transferência do sistema.

Exercício 5) Dado o sistema ao lado, onde T = 0.1s, determinar:



a) $G_c(z)$, de forma a anular todos os zeros de malha aberta em z = 1;

b) $y(kT)$, para impulso unitário ($r(t) = \delta(t)$) e degrau com amplitude 2 ($r(t) = 2\,h(t)$);

c) se o sistema em malha fechada é estável.

Segurador de Ordem Zero

O segurador de ordem zero utilizado no conversor D/A é um filtro passa-baixas. Isso pode ser verificado através de sua resposta frequencial.

$$G_h(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s} \quad \Rightarrow \quad G_h(j\omega) = \frac{1-e^{-j\omega T}}{j\omega} = 2e^{-j\frac{\omega T}{2}} \cdot \frac{e^{j\frac{\omega T}{2}} + e^{-j\frac{\omega T}{2}}}{2j\omega}$$

$$G_h(j\omega) = \frac{T \cdot sen\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\left(\frac{\omega T}{2}\right)} \cdot e^{-j\frac{\omega T}{2}}$$

onde T é o período de amostragem.

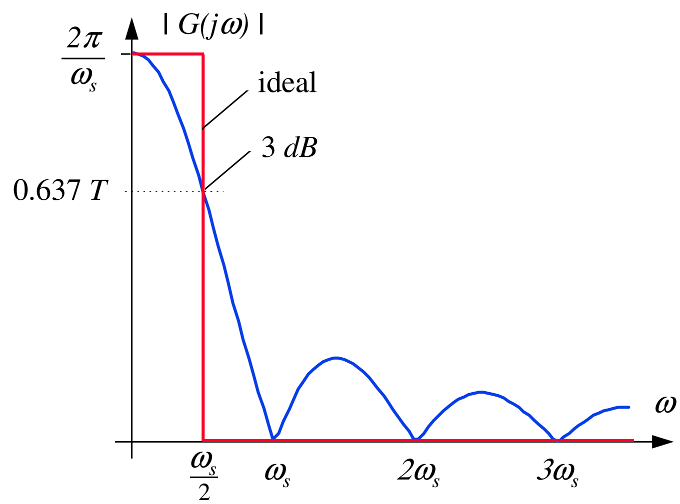
$$\boxed{G_h(j\omega) = \frac{2\pi}{\omega_s} \cdot \frac{sen\left(\frac{\pi\omega}{\omega_s}\right)}{\left(\frac{\pi\omega}{\omega_s}\right)} \cdot e^{-j\pi\frac{\omega}{\omega_s}} = \frac{2\pi}{\omega_s} \cdot sinc\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right) \cdot e^{-j\pi\frac{\omega}{\omega_s}}}$$

onde:

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

é a frequência de amostragem.

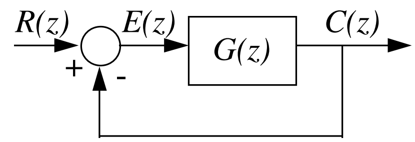
Note que o termo $e^{-j\pi\frac{\omega}{\omega_s}}$ representa uma contribuição apenas na fase de $G_h(j\omega)$.



Critérios e Técnicas de Compensação

Lugar Geométrico das Raízes

O mesmo método utilizado para sistemas em tempo contínuo para a obtenção geométrica dos pólos em malha fechada de um sistema, a partir de seus pólos e zeros em malha aberta, pode ser aplicado a sistemas em tempo discreto.



A Função de Transferência do sistema com realimentação, indicado ao lado, é dada por:

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1+G(z)}$$

Os pólos em malha fechada são obtidos resolvendo a equação *G(z)* = -1. Essa equação se resume a uma condição de fase e a uma condição de módulo:

- fase: $\angle G(z) = 180° + r \cdot 360° \qquad , r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
- módulo: $|G(z)| = 1$

Os pontos do plano complexo z que satisfazem a condição de fase constituem o Lugar Geométrico das Raízes.

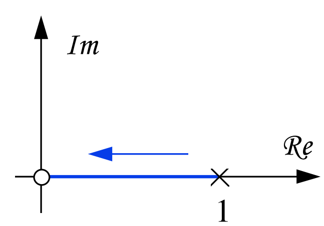
Seguem algumas regras básicas para o traçado do Lugar Geométrico das Raízes:

$$G(z) = k \cdot \frac{\prod_i (z+z_i)}{\prod_j (z+p_j)} = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

- os pólos de malha aberta pertencem ao L.G.R. ($k \to 0$);
- os zeros de malha aberta pertencem ao L.G.R. ($k \to \infty$);
- o número de ramos do L.G.R. é igual ao grau do polinômio $\left[P(z)+Q(z)\right]$;
- o L.G.R. é constituído de curvas simétricas em relação ao eixo real;
- sobre o eixo real, o L.G.R. é constituído por todos os pontos à direita dos quais o número de pólos somado ao número de zeros é ímpar;

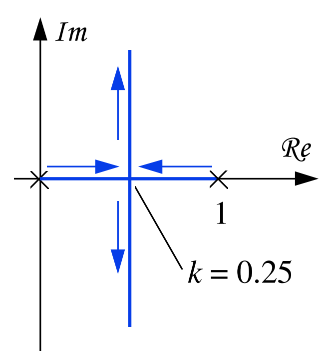
Exemplo 1) $G(z) = k\dfrac{z}{z-1} \qquad k \ge 0$

$$\frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{kz}{(1+k)z-1} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{1}{k+1}$$



Exemplo 2) $G(z) = k\dfrac{1}{z(z-1)} \qquad k \ge 0$

$$\frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{k}{z^2-z+k} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{1 \pm \sqrt{1-4k}}{2}$$

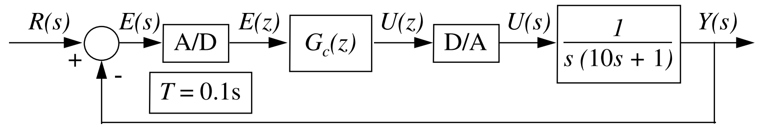


Exercício 1) Dado o sistema

$$y_k = 2y_{k-1} - y_{k-2} + 0.5u_{k-1} + 0.5u_{k-2}$$

e supondo um compensador do tipo $G_c(z) = k$, desenhar o L.G.R. e verificar para que valores de k o sistema é estável.

Exercício 2) Dado o sistema da figura ao lado, pede-se:



a) desenhar o L.G.R. para $G_c(z) = k$. Para que valores de k o sistema é estável?

b) desenhar o L.G.R. para $G_c(z) = k\dfrac{z-0.5}{z+0.6}$;

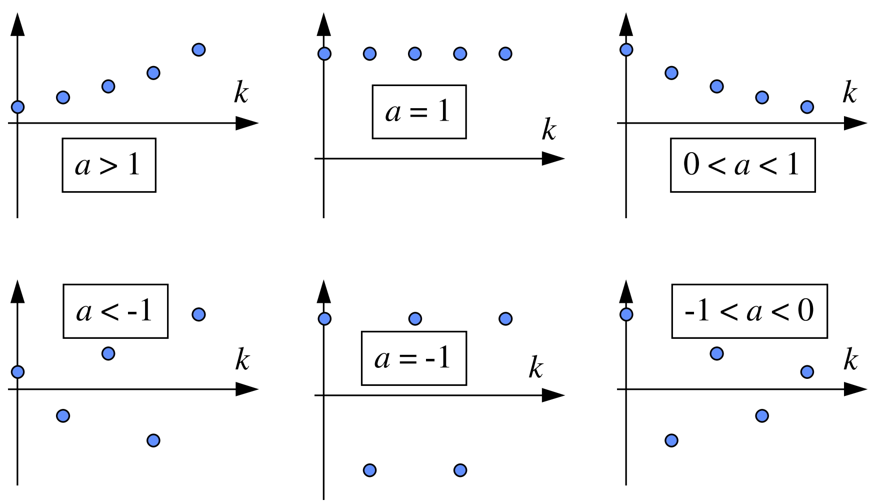
c) desenhar o L.G.R. para $G_c(z) = k\dfrac{z-0.8}{z+0.8}$;

d) para k = 0.8 , 21 e 9 nos itens (a), (b) e (c), respectivamente, calcular as respostas a degrau.

Estimativa de Desempenho Transitório

Pólo real simples

Considere que a expansão em frações parciais de um sistema $\dfrac{G(z)}{z}$ produza um termo do tipo $\dfrac{b}{z-a}$. Tal termo contribuirá com uma parcela do tipo $b \cdot a^k$.



Cossenóide amortecida

$$f_k = 2r^k \cos(k\theta) \quad ,k \ge 0 \qquad z[f_k] = \frac{z(z - r\cdot\cos\theta)}{z^2 - 2zr\cdot\cos\theta + r^2} \qquad ,|z| > r$$

- $\theta = 0, r = 1 \quad \Rightarrow$ degrau
- $\theta = 0, r < 1 \quad \Rightarrow$ exponencial decrescente
- $\theta = 0, r > 1 \quad \Rightarrow$ exponencial crescente
- $\theta \ne 0, r = 1 \quad \Rightarrow$ cossenóide

Os pólos de *F(z)* são:

$$z_{1,2} = r(\cos\theta \pm j\cdot sen\theta)$$

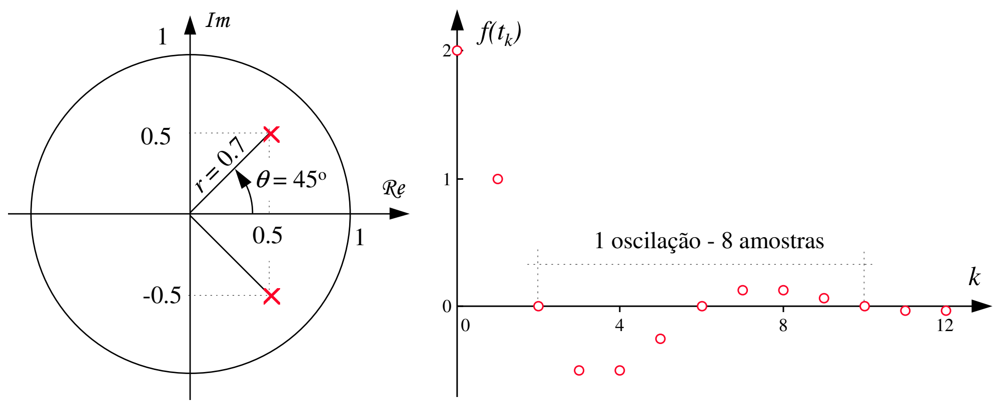
- a distância r dos pólos à origem indica a duração do transitório;
- o número de pulsos de amostragem em cada oscilação da função f_k é estabelecido por θ:

$$cos(k\theta) = cos([k+n]\theta) \quad \Rightarrow \quad n\theta = 2\pi$$

$$\boxed{n = \left.\frac{2\pi}{\theta}\right|_{rad} = \left.\frac{360°}{\theta}\right|_{grau}} \quad \text{(amostras/ciclo)}$$

Exemplo 3) $r = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0.7071$, $\theta = 45°$

$$f_k = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^k cos\left(\frac{k\pi}{4}\right) \quad ,k \geq 0 \qquad z[f_k] = \frac{z(z-0.5)}{z^2 - z + 0.5}$$

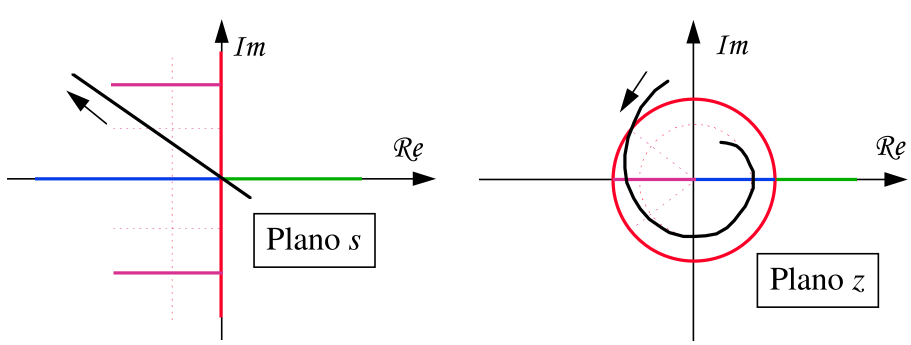


Associação das Configurações nos Planos s e z

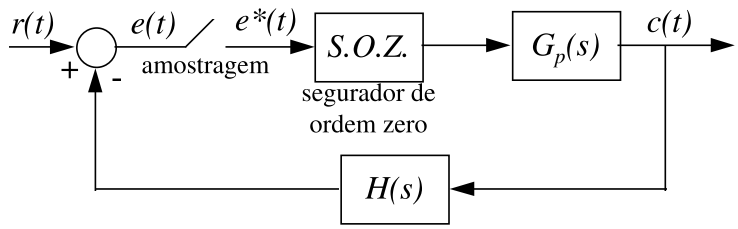
O mapeamento é feito segundo:

$$z = e^{sT}$$

- $s = \sigma > 0 \quad \Rightarrow \quad z = e^{\sigma T} > 1$
- $s = -\sigma < 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < z = e^{-\sigma T} < 1$
- $s = \sigma \pm j\omega \quad \Rightarrow \quad |z| = e^{\sigma T} \quad \angle z = \pm\omega T$
- $s = \rho \cdot e^{j\varphi} \quad \Rightarrow \quad |z| = e^{\rho T \cdot cos\varphi} \quad \angle z = \rho T \cdot sen\varphi$



Análise do Erro de Regime para Sistemas de Controle Digital



No sistema indicado ao lado, tem-se:

$$e_{ss}^* = \lim_{t\to\infty}\left[e^*(t)\right] = \lim_{k\to\infty}\left[e(kT)\right]$$

Pelo Teorema do Valor Final:

$$e_{ss}^* = \lim_{z\to 1}\left[\left(1-z^{-1}\right)E(z)\right]$$

A Função de Transferência de *r(t)* para *e*(t)* é dada por:

$$\frac{E(z)}{R(z)} = \frac{1}{1+GH(z)}$$

onde:

$$GH(z) = \left(1-z^{-1}\right)\cdot Z\left[\frac{G_p(s)\cdot H(s)}{s}\right]$$

Erro devido ao degrau de amplitude A

$$R(z) = \frac{Az}{z-1} = \frac{A}{1-z^{-1}}$$

$$e_{ss}^* = \lim_{z\to 1}\left[\frac{A}{1+GH(z)}\right] = \frac{A}{1+\lim_{z\to 1}\left[GH(z)\right]}$$

Definindo:

$$\boxed{K_p = \lim_{z\to 1}\left[GH(z)\right] \quad \Rightarrow \quad e_{ss}^* = \frac{A}{1+K_p}}$$

Erro devido à rampa r(t) = At

$$R(z) = \frac{ATz}{(z-1)^2} = \frac{ATz^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^2}$$

$$e_{ss}^* = \lim_{z\to 1}\left[\frac{A}{1+GH(z)}\cdot\frac{Tz^{-1}}{1-z^{-1}}\right] = \lim_{z\to 1}\left[\frac{AT}{\left(1-z^{-1}\right)\cdot GH(z)}\right]$$

Definindo:

$$\boxed{K_v = \lim_{z\to 1}\left[\frac{\left(1-z^{-1}\right)\cdot GH(z)}{T}\right] \quad \Rightarrow \quad e_{ss}^* = \frac{A}{K_v}}$$

Erro devido à parábola r(t) = At²/2

$$R(z) = \frac{AT^2 z(z+1)}{2(z-1)^3} = \frac{ATz^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^2}$$

$$e_{ss}^{*} = \lim_{z\to 1}\left[\frac{A}{1+GH(z)}\cdot\frac{T^2 z^{-1}\left(1+z^{-1}\right)}{2\left(1-z^{-1}\right)^2}\right] = \lim_{z\to 1}\left[\frac{AT^2}{\left(1-z^{-1}\right)^2\cdot GH(z)}\right]$$

Definindo:

$$\boxed{K_a = \lim_{z\to 1}\left[\frac{\left(1-z^{-1}\right)^2\cdot GH(z)}{T^2}\right] \quad\Rightarrow\quad e_{ss}^{*} = \frac{A}{K_a}}$$

Efeito da taxa de amostragem no erro de regime estacionário

Note que, devido ao fato de K_v e K_a serem inversamente proporcionais a T e T^2, respectivamente, observa-se que:

- quanto maior T (amostragem mais lenta), menores são os coeficientes acima, portanto maiores são os erros;
- quanto menor T (amostragem mais rápida), maiores são os coeficientes acima, portanto menores são os erros;

	$r(t) \quad (t \geq 0)$		
Tipo do Sistema	1	t	$\frac{t^2}{2}$
0	$\frac{1}{1+K_p}$	∞	∞
1	0	$\frac{1}{K_v}$	∞
2	0	0	$\frac{1}{K_a}$

Quando um controlador analógico é substituído por um compensador digital equivalente, as constantes de erro estático para os sistemas de controle analógico e digital devem coincidir.

Implementação Digital de Projetos Analógicos

Aproximações utilizadas (T pequeno)

1) Euler:

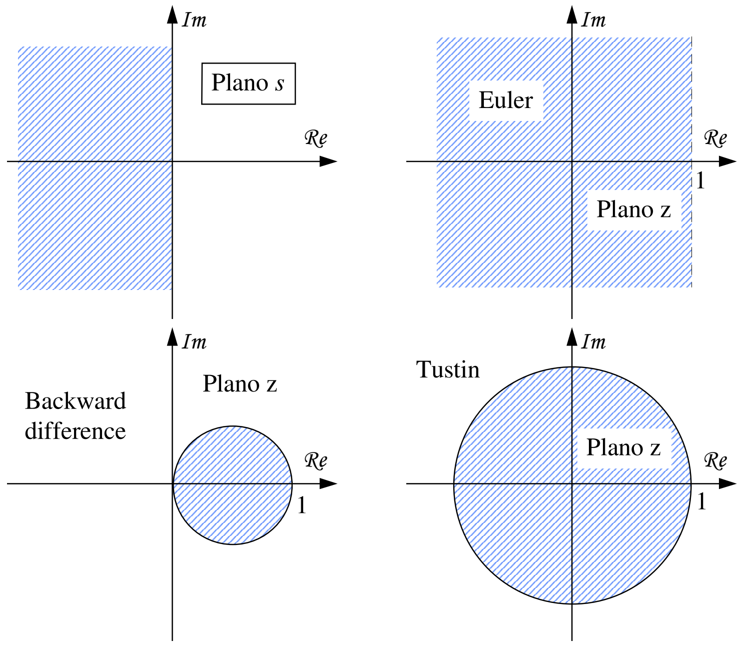
$$\boxed{z = e^{sT} \cong 1 + sT \quad\Rightarrow\quad s' = \frac{z-1}{T}}$$

2) Backward difference:

$$\boxed{z = e^{sT} = \frac{1}{e^{-sT}} \cong \frac{1}{1-sT} \quad\Rightarrow\quad s' = \frac{z-1}{zT}}$$

3) Transformada bilinear ou método trapezoidal (Tustin):

$$\boxed{z = e^{sT} = \frac{e^{\frac{sT}{2}}}{e^{-\frac{sT}{2}}} \cong \frac{1+\frac{sT}{2}}{1-\frac{sT}{2}} \quad\Rightarrow\quad s' = \frac{2}{T}\cdot\frac{z-1}{z+1}}$$



A figura ao lado mostra o mapeamento do semiplano esquerdo de s no plano z, para cada uma das aproximações.

Note que, pela aproximação de Euler, os sistemas estáveis são mapeados no semiplano onde $Re(z) < 1$. Isso significa que modos estáveis em s podem ser mapeados em modos instáveis de z (fora do círculo de raio unitário).

No mapeamento por Backward difference, os modos estáveis sempre serão mapeados dentro do círculo de raio unitário (estarão dentro do círculo com diâmetro unitário e centro em $0.5 + j0$). Entretanto, existem modos instáveis em s que também serão mapeados dentro do círculo de raio unitário em z (e, portanto, estáveis).

Na aproximação de Tustin, o semiplano esquerdo de s é mapeado exatamente no círculo de raio unitário em z. Além disso, este mapeamento fornece uma forma bastante adequada para a aplicação do Critério de Estabilidade de Routh.

Distorções na escala de frequências

As aproximações apresentadas acima causam distorções na resposta em frequência obtida. Vejamos um exemplo:

$$G(s) = s$$

Aplicando a aproximação de Tustin:

$$G_T(z) = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1}$$

Para $s = j\omega_1$, tem-se:

$$G(j\omega_1) = j\omega_1$$

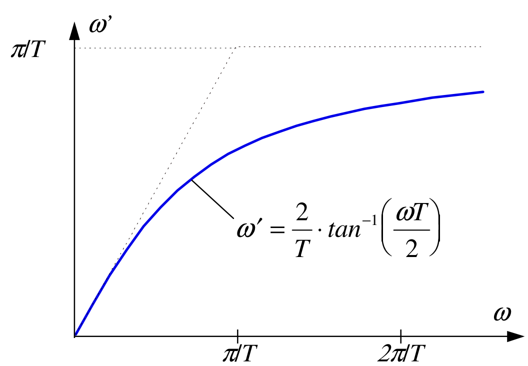
$$G_T\left(e^{j\omega_1 T}\right) = \frac{2}{T} \cdot \frac{e^{j\frac{\omega_1 T}{2}} - e^{-j\frac{\omega_1 T}{2}}}{e^{j\frac{\omega_1 T}{2}} + e^{-j\frac{\omega_1 T}{2}}} = \frac{2j}{T} \cdot tg\left(\frac{\omega_1 T}{2}\right)$$

Tomando:

$$s' = \frac{\omega_1}{tg\left(\frac{\omega_1 T}{2}\right)} \cdot \frac{z-1}{z+1}$$

Obtém-se:

$$G_T\left(e^{j\omega_1 T}\right) = \frac{j\omega_1}{tg\left(\frac{\omega_1 T}{2}\right)} \cdot tg\left(\frac{\omega_1 T}{2}\right) = j\omega_1$$



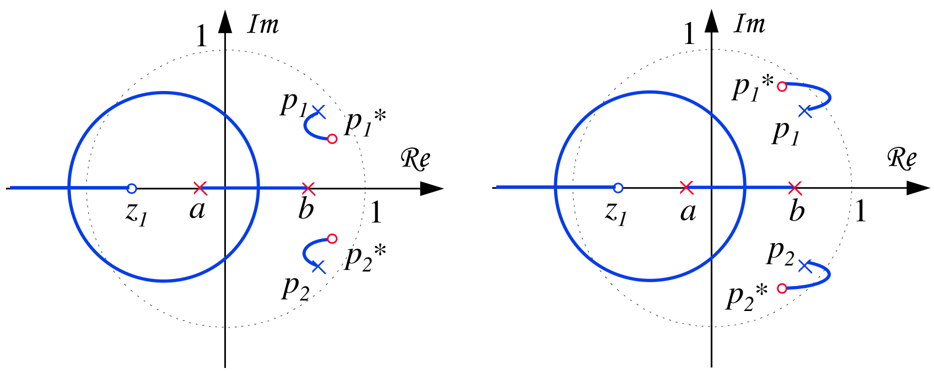
Projeto de Compensadores por Cancelamento de Pólos

Técnica frequentemente utilizada para "substituir" os pólos do processo que apresentem características indesejadas por novos pólos mais adequados (introduzidos pelo controlador). É de extrema importância levar-se em consideração que esse cancelamento nunca é perfeito, surgindo, portanto, um novo ramo no L.G.R..

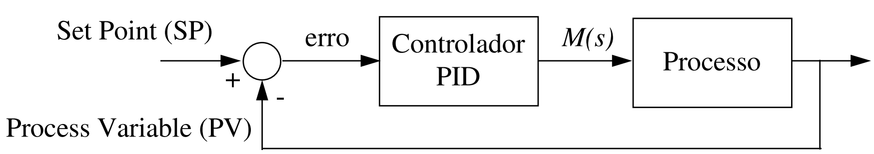
Vejamos um exemplo: considere um sistema com um zero de malha aberta estável e dois pólos de malha aberta complexos conjugados demasiadamente próximos ao limite de estabilidade (circunferência de raio unitário centrada na origem). Suponha que o controlador projetado deve "cancelar" esses dois pólos, introduzindo, além disso, dois novos pólos de malha aberta sobre o eixo real. Sejam então:

$$G_P(s) = \frac{K_p \cdot (z - z_1)}{(z - p_1)(z - p_2)} \quad \text{e} \quad G_c(s) = \frac{K_c \cdot (z - p_1^*)(z - p_2^*)}{(z - a)(z - b)}$$

A figura abaixo ilustra dois casos possíveis através do L.G.R.. No primeiro caso, o sistema resulta instável apenas para ganhos elevados. Entretanto, no segundo caso, existe uma faixa adicional de ganho onde os pólos de malha fechada associados ao "cancelamento" resultam instáveis.



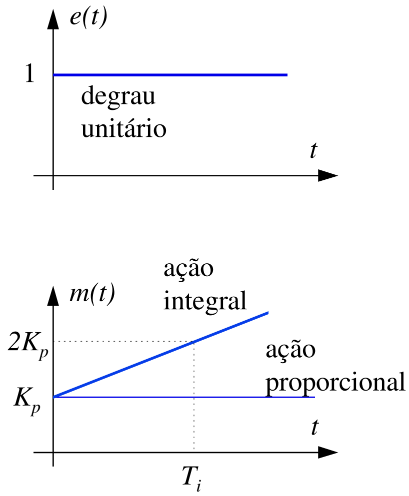
Controladores PID ("Single-loop")



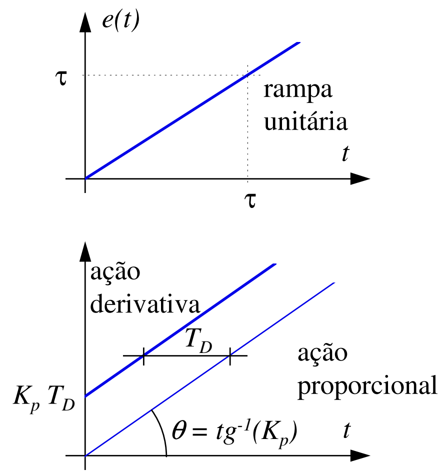
- Banda Proporcional: $BP = \dfrac{100\%}{K_p}$
- Tempo Integral: $T_I = \dfrac{1}{K_I}$
- Tempo Derivativo: $T_D = K_D$

$$\boxed{G_{PID}(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = K_P \cdot \left[1 + \frac{K_I}{s} + sK_D\right]}$$

Ação integral



Ação derivativa



Implementação digital:

A implementação digital do filtro é feita utilizando-se algumas das aproximações vistas anteriormente. Por exemplo:

- integração (Tustin): $\dfrac{K_I}{s} \cong \dfrac{K_I T}{2} \cdot \dfrac{z+1}{z-1}$
- derivação (Backward difference): $sK_D \cong K_D \cdot \dfrac{z-1}{Tz}$
- ganho proporcional indepente das ações integral e derivativa

Tem-se então:

$$\boxed{G_{PID}(z) = K_P + \frac{K_I}{2} \cdot \frac{T(z+1)}{z-1} + K_D \frac{z-1}{Tz}}$$

Exemplo 3) $G_P(s) = \dfrac{10}{(s+1)(s+2)}, T = 0.1s$

Pede-se: a) Calcular o erro estacionário para entrada degrau unitário;

b) Projetar um controlador PI para cancelar um dos pólos da função;

c) Ajustar o PI de forma a diminuir o sobressinal;

d) Projetar um PID para $K_v = 5$.

Primeiro Passo: Obter $G_p(z)$

$$\frac{G_P(s)}{s} = \frac{10}{s(s+1)(s+2)} = \frac{5}{s} - \frac{10}{s+1} + \frac{5}{s+2}$$

$$\mathcal{Z}\left[\frac{G_P(s)}{s}\right] = \frac{5z}{z-1} - \frac{10z}{z-e^{-0.1}} + \frac{5z}{z-e^{-0.2}} =$$

$$=\frac{5z\left[\left(z^2-\left(e^{-0.1}+e^{-0.2}\right)z+e^{-0.3}\right)-2\left(z^2-\left(1+e^{-0.2}\right)z+e^{-0.2}\right)+\left(z^2-\left(1+e^{-0.1}\right)z+e^{-0.1}\right)\right]}{(z-1)\left(z-e^{-0.1}\right)\left(z-e^{-0.2}\right)}=$$

$$=\frac{5\cdot\left[\left(1+e^{-0.2}-2e^{-0.1}\right)z+\left(e^{-0.1}+e^{-0.3}-2e^{-0.2}\right)\right]}{\left(1-z^{-1}\right)\left(z-e^{-0.1}\right)\left(z-e^{-0.2}\right)}=$$

$$=\frac{5\cdot\left[\left(1+e^{-0.2}-2e^{-0.1}\right)z+e^{-0.1}\cdot\left(1+e^{-0.2}-2e^{-0.1}\right)\right]}{\left(1-z^{-1}\right)\left(z-e^{-0.1}\right)\left(z-e^{-0.2}\right)}=$$

$$=\frac{5\cdot\left(1+e^{-0.2}-2e^{-0.1}\right)\left(z+e^{-0.1}\right)}{\left(1-z^{-1}\right)\left(z-e^{-0.1}\right)\left(z-e^{-0.2}\right)}$$

Daí:

$$G_P(z)=\left(1-z^{-1}\right)\cdot\mathcal{Z}\left[\frac{G_P(s)}{s}\right]=\frac{0.0453\cdot(z+0.9048)}{(z-0.9048)(z-0.8187)}$$

Segundo Passo: Obter a Função de Transferência de malha fechada.

$$\boxed{G_{MA}(z)=\frac{0.0453\cdot(z+0.9048)}{(z-0.9048)(z-0.8187)}\quad\Rightarrow\quad G_{MF}(z)=\frac{G_{MA}(z)}{1+G_{MA}(z)}=\frac{0.0453\cdot(z+0.9048)}{z^2-1.6783z+0.7818}}$$

a) Erro estacionário para entrada degrau unitário:

$$R(z)=\frac{z}{z-1}\Rightarrow Y(z)=\frac{0.0453\cdot z(z+0.9048)}{(z-1)\left(z^2-1.6783z+0.7818\right)}$$

$$y_{ss}=\lim_{z\to 1}\left[\left(1-z^{-1}\right)\cdot Y(z)\right]=\frac{0.0453\cdot(1+0.9048)}{1-1.6783+0.7818}=0.833$$

$$\boxed{e_{ss}=0.167}$$

b) Cancelamento do pólo em 0.9048 (mais próximo do limite de estabilidade):

$$G_{PI}(z)=K_P+\frac{K_I}{2}\cdot\frac{T(z+1)}{z-1}=\left(K_IT+2K_P\right)\frac{z+\dfrac{K_IT-2K_P}{K_IT+2K_P}}{2\cdot(z-1)}$$

Daí, deve-se ter:

$$\frac{0.1K_I-2K_P}{0.1K_I+2K_P}=-0.9048\quad\Rightarrow\quad\frac{K_P}{K_I}=1.0008$$

Escolha:

$\boxed{K_P=1\quad K_I=0.9992}$ (controlador 1)

c) Para diminuir o sobressinal, diminuem-se os ganhos proporcional e integral.

$\boxed{K_P=0.5\quad K_I=0.4996}$ (controlador 2)

$\boxed{K_P=0.25\quad K_I=0.2498}$ (controlador 3)

d) Cancelamento dos dois pólos de malha aberta e $K_v = 5$:

$$G_{PID}(z) = \frac{\left(K_P + \frac{K_I T}{2} + \frac{K_D}{T}\right)z^2 - \left(K_P - \frac{K_I T}{2} + \frac{2K_D}{T}\right)z + \frac{K_D}{T}}{z(z-1)}$$

Daí:

$$\boxed{\frac{K_P - \frac{K_I T}{2} + \frac{2K_D}{T}}{K_P + \frac{K_I T}{2} + \frac{K_D}{T}} = 1.7236} \quad \text{e} \quad \boxed{\frac{\frac{K_D}{T}}{K_P + \frac{K_I T}{2} + \frac{K_D}{T}} = 0.7408}$$

Além disso:

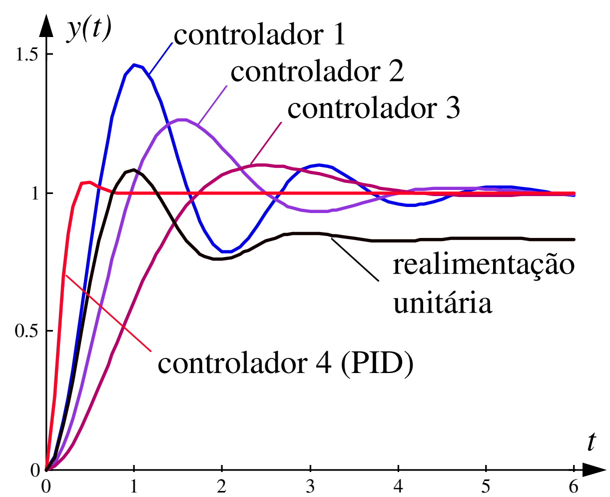
$$K_v = \lim_{z\to 1}\frac{\left(1 - z^{-1}\right)\cdot G_{MA}(z)\cdot G_{PID}(z)}{T} = \frac{0.0453(1+0.9048)}{(1-0.9048)(1-0.8187)}\cdot\frac{K_I(1+1)}{2} = 5$$

Isto é:

$\boxed{K_I = 1.0000}$ (controlador 4)

Resolvendo o sistema de equações, chega-se aos demais valores:

$\boxed{K_P = 1.4525}$ e $\boxed{K_D = 0.4295}$ (controlador 4)



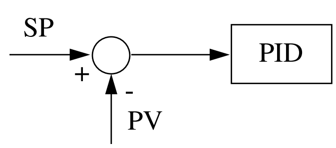
A figura ao lado ilustra o comportamento de cada um desses controladores (e do sistema com realimentação unitária).

Pode-se verificar facilmente o efeito da redução dos ganhos proporcional e integral no sobressinal da resposta, comparando as curvas obtidas para os controladores 1, 2 e 3. Note também que essa redução de sobressinal é conseguida a custo de um aumento no tempo de acomodação.

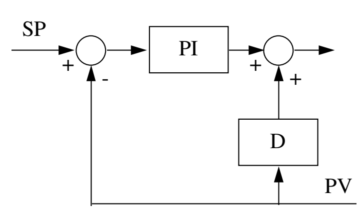
A utilização do controlador PID ilustra a possibilidade de utilizar-se ganhos "altos" para as componentes proporcional e integral e, ainda assim, obter um sobressinal extremamente reduzido e um tempo de acomodação curto, graças a ação derivativa do controlador.

Estruturas diferentes dos controladores PID

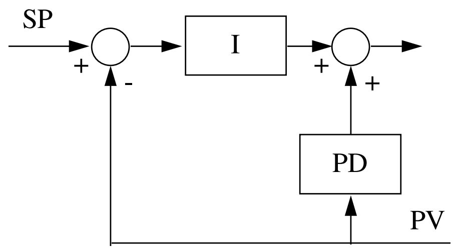
a) PID em cascata com o sistema



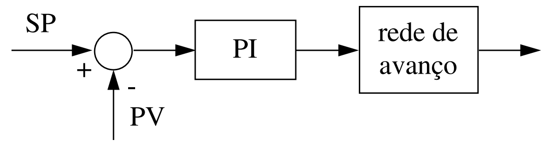
b) coloca-se a parte derivativa na saída para evitar que a derivada atue sobre a variação brusca da referência



c) Pouco utilizado



d) Pouco utilizado



Aspectos operacionais

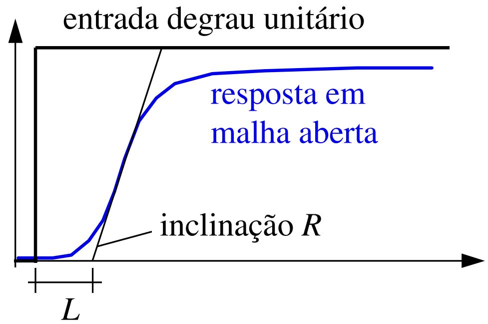
Transferências "bumpless": quando há mudança no modo de operação do controlador de manual para automático, pode haver uma variação brusca da saída do controlador devido ao fato de que a saída fornecida pelo computador pode ser diferente da saída fornecida pelo terminal de operação manual. Para evitar isso, deve-se garantir que a saída ajustada manualmente seja conduzida ao mesmo valor da saída obtida internamente pelo controlador antes de realizar o chaveamento (modo mais simples, porém há outras maneiras).

Anti-saturação da componente integral: se for utilizado um controlador PID numa condição em que o sinal de erro é persistente, elevado e não nulo, existe a tendência da componente integral aumentar muito, saturando a saída. Se, mesmo com a saída saturada, o sinal de erro persistir, a tendência será continuar aumentando internamente o valor da integral. Quando o sinal de erro inverter o seu sinal, todo esse acúmulo na integral deverá ser descontado, o que levará um tempo excessivo. A solução para isto é a anti-saturação da componente integral, que consiste em impedir acúmulos adicionais no valor da integral, enquanto persistir a saturação da saída. Neste caso, assim que ocorrer inversão no sinal de erro, a componente integral começará a diminuir, tirando imediatamente a saída do controlador da situação de saturação.

Regras de Ajuste de PID

Pode-se realizar o ajuste dos parâmetros do controlador PID através de uma série de procedimentos estabelecidos por Ziegler-Nichols. Estes métodos de ajuste são bastante utilizados no ambiente industrial devido à facilidade de implementação e as características de estabilidade e robustez do sistema em malha fechada resultante.

Primeiro método (ensaio em malha aberta): determinar os parâmetros R e L através da resposta do sistema em malha aberta a um degrau unitário, obtendo os parâmetros do controlador através da tabela abaixo.



	K_P	T_I	T_D
P	$1/RL$		
PI	$0.9/RL$	$3L$	
PID	$1.2/RL$	$2L$	$0.5L$

Segundo método (ensaio em malha fechada): com o sistema em malha fechada e utilizando inicialmente um controlador proporcional, aumentar continuamente o ganho proporcional até que surja uma oscilação sustentada. Sejam, então, K_{max} o valor do ganho nessa situação e T_p o período da oscilação verificada. O ajuste dos parâmetros do controlador é obtido através da tabela ao lado.

	K_P	T_I	T_D
P	$0.5\ K_{max}$		
PI	$0.45\ K_{max}$	$T_p\ /1.2$	
PID	$0.6\ K_{max}$	$T_p\ /2$	$T_p\ /8$

Seleção do Período de Amostragem

Outro parâmetro relevante a ser definido é o período de amostragem utilizado pelo sistema de controle digital. Valores típicos dessas taxas de amostragem são dados a seguir para as malhas industriais mais comuns:

Tipo de Variável	Tempo de Amostragem (segundos)
Fluxo	1 a 3
Nível	5 a 10
Pressão	1 a 5
Temperatura	10 a 20

Há também algumas regras relacionando o período de amostragem (T) ao tempo derivativo ou aos parâmetros utilizados no ajuste de PID através do método de Ziegler-Nichols:

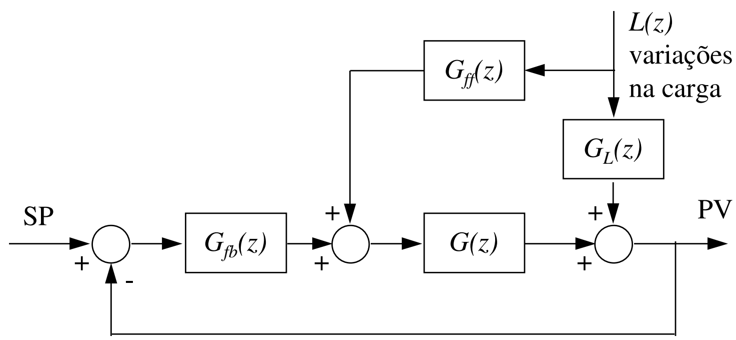
- $T / T_D = 0.1 \sim 0.5$
- $T / L = 0.05 \sim 0.25$
- $T / T_P = 0.01 \sim 0.05$

"Feedforward"

O objetivo é projetar uma pré-compensação que anule o efeito de variações na carga. Sendo conhecida a influência dessas variações na saída do sistema (Função de Transferência $G_L(z)$), pode-se escrever:

$$G_L(z)\cdot L(z)+G_{ff}(z)\cdot G(z)\cdot L(z)=0$$

$$\boxed{G_{ff}(z)=-\frac{G_L(z)}{G(z)}}$$



Sem essa pré-compensação, tem-se

$$C(z)=G_L(z)\cdot L(z)+G(z)\cdot G_{fb}(z)\cdot\left[R(z)-C(z)\right]$$

Portanto:

$$\left[1+G(z)\cdot G_{fb}(z)\right]\cdot C(z)=G_L(z)\cdot L(z)+G(z)\cdot G_{fb}(z)\cdot R(z)$$

Considerando apenas a variação na carga:

$$C(z)=\frac{G_L(z)}{1+G(z)\cdot G_{fb}(z)}\cdot L(z)$$

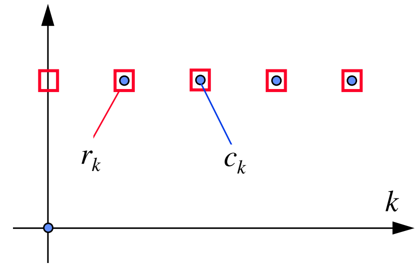
Compensador "Dead-beat"

Sejam:

$$G_A(z)=\frac{0.0453\cdot(z+0.905)}{(z-0.905)(z-0.819)}$$

$$G_C(z)=\frac{(z-0.905)(z-0.819)}{0.0453\cdot(z-1)(z+0.905)}$$

Daí:



$$G_A(z)\cdot G_C(z)=\frac{1}{z-1}$$

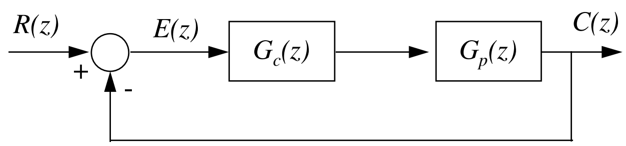
Em malha fechada:

$$\frac{C(z)}{R(z)}=\frac{1}{z}$$

Para a entrada degrau unitário:

$$R(z)=\frac{z}{z-1}\quad\Rightarrow\quad C(z)=\frac{1}{z-1}$$

Para o sistema ilustrado ao lado, tem-se:



$$M(z)=\frac{C(z)}{R(z)}=\frac{G_c(z)\cdot G_p(z)}{1+G_c(z)\cdot G_p(z)}$$

O projeto é caracterizado pelas seguintes especificações:

- especificado um sinal de entrada, o sistema deve ter erro de regime nulo nos instantes de amostragem;
- o tempo para atingir o regime deve ser mínimo;
- o controlador $G_c(z)$ deve ser fisicamente realizável (o sistema deve ser causal)

Reescrevendo a Função de Transferência, tem-se:

$$G_C(z)=\frac{1}{G_P(z)}\cdot\frac{M(z)}{1-M(z)}$$

O erro é dado por:

$$E(z)=R(z)-C(z)=R(z)-M(z)\cdot R(z)=\left[1-M(z)\right]\cdot R(z)=\frac{1}{1+G_C(z)\cdot G_P(z)}\cdot R(z)$$

Seja:

$$R(z)=\frac{A(z)}{\left(1-z^{-1}\right)^N}$$ onde $A(z)$ é um polinômio em z^{-1} (entradas tipo t^{N+1}).

$N=1$: $A(z) = 1$: degrau unitário

$N=2$: $A(z) = Tz^{-1}$: rampa unitária

Erro nulo por imposição:

$$\lim_{k\to\infty}\left[e(kT)\right]=\lim_{z\to 1}\left[\left(1-z^{-1}\right)\cdot E(z)\right]=\lim_{z\to 1}\left[\left(1-z^{-1}\right)\cdot\frac{A(z)\cdot\left[1-M(z)\right]}{\left(1-z^{-1}\right)^N}\right]=0$$

$$\left[1-M(z)\right]=\left(1-z^{-1}\right)^N\cdot F(z)$$ onde $F(z)$ é um polinômio em z^{-1}.

Portanto:

$$\boxed{M(z)=1-\left(1-z^{-1}\right)^N\cdot F(z)}\quad\text{ou}\quad\boxed{M(z)=\frac{z^N-(z-1)^N\cdot F(z)}{z^N}}$$

cuja equação característica é:

$$z^p = 0 \quad , \quad p \geq N$$ (devido à contribuição dos pólos introduzidos por F*(z)*)

A relação entre o erro, a referência e *F(z)* pode ser reescrita como:

$$E(z) = A(z) \cdot F(z)$$

Isso representa a multiplicação de dois polinômios em z^{-1}, o que significa que o erro nulo é atingido em um número finito de períodos de amostragem (conseguido por imposição).

Realizabilidade física

A realizabilidade física do compensador significa que ele é um sistema causal.

$$G_P(z) = g_n z^{-n} + g_{n+1} z^{-(n+1)} + \ldots$$

$$M(z) = m_k z^{-k} + m_{k+1} z^{-(k+1)} + \ldots$$

Combinando as duas equações, vem:

$$G_C(z) = \frac{1}{G_P(z)} \cdot \frac{M(z)}{1 - M(z)} = \frac{m_k z^{-k} + m_{k+1} z^{-(k+1)} + \ldots}{\left(g_n z^{-n} + g_{n+1} z^{-(n+1)} + \ldots\right) \cdot \left(1 - m_k z^{-k} - m_{k+1} z^{-(k+1)} - \ldots\right)}$$

Daí:

$$G_C(z) = d_{k-n} z^{-(k-n)} + d_{k-n+1} z^{-(k-n+1)} + \ldots$$

Para impor a causalidade, deve-se ter:

$$k \geq n$$

A tabela abaixo apresenta algumas funções *M*(*z*) candidatas para diversas entradas:

Entrada	*N*	*M(z)*
Degrau	1	$1 - \left(1 - z^{-1}\right) \cdot F(z)$
Rampa	2	$1 - \left(1 - z^{-1}\right)^2 \cdot F(z)$
Parábola	3	$1 - \left(1 - z^{-1}\right)^3 \cdot F(z)$

Em particular, para F(z) =1, tem-se:

Entrada	*N*	*M(z)*
Degrau	1	z^{-1}
Rampa	2	$2z^{-1} - z^{-2}$
Parábola	3	$3z^{-1} - 3z^{-2} + z^{-3}$

Exemplo: $G_P(z) = \dfrac{z^{-2}}{1 - z^{-1} - z^{-2}}$

$$M(z) = z^{-1} \quad \Rightarrow \quad G_C(z) = \frac{1 - z^{-1} - z^{-2}}{z^{-2}} \cdot \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{z^2 - z - 1}{z - 1}$$

Nesse caso o sistema tem mais zeros que pólos, portanto é não causal.

$$M(z) = z^{-2} \quad \Rightarrow \quad G_C(z) = \frac{1 - z^{-1} - z^{-2}}{z^{-2}} \cdot \frac{z^{-2}}{1 - z^{-2}} = \frac{z^2 - z - 1}{z^2 - 1}$$

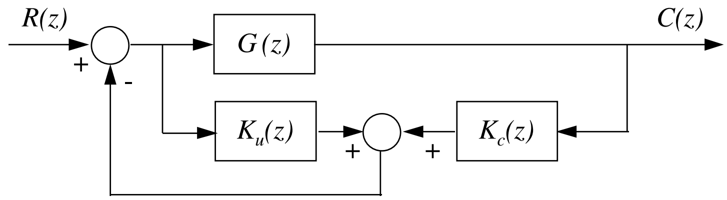
Agora sim, tem-se um sistema causal.

Compensador Dinâmico por Imposição de Pólos

A imposição de pólos em malha fechada pode ser alcançada utilizando-se um esquema como o indicado na figura abaixo. Note que, além da conhecida realimentação da saída do processo ($K_c(z)$) existe, também, uma realimentação da entrada da planta ($K_u(z)$).

Escrevendo as Funções de Transferência do processo e das realimentações explicitando os polinômios, tem-se:

$$G(z) = \frac{b(z)}{a(z)}$$



$$K_u(z) = \frac{\eta_u(z)}{\delta(z)}$$

$$K_c(z) = \frac{\eta_c(z)}{\delta(z)}$$

$$\delta(z) = z^{n-1} + \delta_2 z^{n-2} + \ldots + \delta_n \qquad \text{(polinômio arbitrariamente estável)}$$

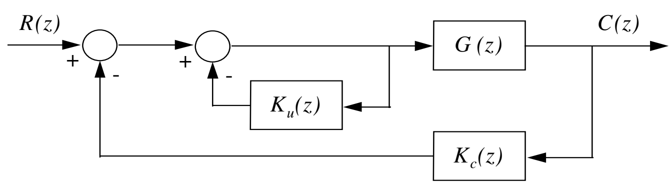
$$\eta_u(z) = \beta_1 z^{n-1} + \beta_2 z^{n-2} + \ldots + \beta_n$$

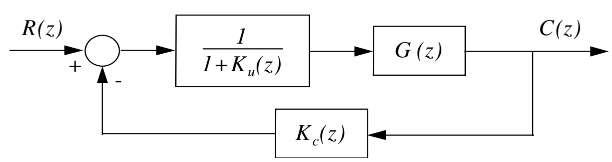
$$\eta_c(z) = \gamma_1 z^{n-1} + \gamma_2 z^{n-2} + \ldots + \gamma_n$$

Problema: determinar $\eta_u(z)$ e $\eta_c(z)$ de modo que o sistema em malha fechada tenha Função de Transferência:

$$G^*(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{b(z)}{\alpha(z)}$$

Fazendo algumas manipulações, obtem-se:





A Função de Transferência em malha fechada pode, então, ser obtida:

$$\boxed{G^*(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + K_u(z) + G(z) \cdot K_c(z)}}$$

Reescrevendo $G^*(z)$ utilizando os polinômios:

$$G^*(z) = \frac{\dfrac{b(z)}{a(z)}}{1 + \dfrac{\eta_u(z)}{\delta(z)} + \dfrac{b(z)}{a(z)} \cdot \dfrac{\eta_c(z)}{\delta(z)}} = \frac{b(z)}{\alpha(z)}$$

Portanto:

$$\left[\eta_u(z) + \delta(z)\right] \cdot a(z) + b(z) \cdot \eta_c(z) = \delta(z) \cdot \alpha(z)$$

Adicionalmente, vamos impor "erro de regime" nulo:

$$E(z) = R(z) - C(z) = \left[1 - G^*(z)\right] \cdot R(z)$$

Para entrada degrau:

$$e_\infty = \lim_{z \to 1} \left[\frac{z-1}{z} \cdot \left(1 - G^*(z)\right) \cdot \frac{z}{z-1}\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad G^*(1) = 1$$

Com deduções análogas para rampa, parábola, etc.

Exemplo) Dado $G(z) = \dfrac{1}{z \cdot (z-1)}$, projetar um compensador com realimentação de entrada e saída do processo, tal que:

$$\boxed{G^*(z) = \frac{K}{z \cdot (z - 0.1)} \qquad e_\infty(degrau) = 0}$$

$$e_\infty(degrau) = 0 \quad \Rightarrow \quad G^*(1) = \frac{K}{1 \cdot (1 - 0.1)} = 1$$

Daí:

$$\boxed{K = 0.9}$$

Os polinômios são, então:

$$\alpha(z) = z^2 - 0.1z$$

$$b(z) = 0.9$$

$$a(z) = 0.9 \cdot \left(z^2 - z\right)$$

$$\eta_u(z) = \beta_1 z + \beta_2$$

$$\eta_c(z) = \gamma_1 z + \gamma_2$$

$$\delta(z) = z + \delta_2 = z \qquad \text{(escolha arbitrária)}$$

A identidade polinomial é:

$$\left[\eta_u(z) + \delta(z)\right] \cdot a(z) + b(z) \cdot \eta_c(z) = \delta(z) \cdot \alpha(z)$$

$$\left[\beta_1 z + \beta_2 + z\right] \cdot 0.9 \cdot \left(z^2 - z\right) + 0.9 \cdot \left[\gamma_1 z + \gamma_2\right] = z^3 - 0.1z^2$$

$$0.9 \cdot \left(1 + \beta_1\right) \cdot z^3 - 0.9 \cdot \left(\beta_2 - 1 - \beta_1\right) \cdot z^2 + 0.9 \cdot \left(\gamma_1 - \beta_2\right) \cdot z + 0.9\gamma_2 = z^3 - 0.1z^2$$

Resolvendo a identidade:

$$0.9 \cdot \left(1 + \beta_1\right) = 1 \qquad \beta_1 = 0.111$$

$$0.9 \cdot \left(\beta_2 - 1 - \beta_1\right) = -0.1 \qquad \beta_2 = 1$$

$$\gamma_1 - \beta_2 = 0 \qquad \gamma_1 = 1$$

$$\gamma_2 = 0 \qquad \gamma_2 = 0$$

Ou seja:

$$K_u(z) = \frac{0.111z + 1}{z}$$

$$K_c(z) = \frac{z}{z} = 1$$