5. Frações

Há 5000 anos, os geômetras dos faraós do Egito realizavam a marcação das terras que ficavam às margens do rio Nilo, para a sua população. No período de junho a setembro, o rio inundava essas terras e levava parte de suas marcações, o que obrigava a refazer a marcação. Para isso, eles utilizavam cordas marcadas e os encarregados dessa marcação eram chamados *estiradores de cordas*.

Os estiradores de corda verificavam quantas vezes aquela corda marcada, esticada, estava contida nos lados do terreno, mas raramente a medida dava um número exato, isto é, não a corda cabia um número inteiro de vezes nos lados do terreno, o que leva à necessidade de criar um novo tipo de número – o número *fracionário*.

Fração é a representação da parte de um todo (de um ou mais inteiros), assim podemos considerá-la mais uma representação de quantidade, ou seja, uma representação numérica, com que podemos efetuar todas as operações aritméticas: adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação.

Assim, podemos concluir que o número fracionário surgiu da necessidade de representar quantidades menores que um inteiro, por exemplo: 1 bolo é um inteiro, mas se comer um pedaço, como se representam com números esse pedaço e o resto do bolo? Foi a necessidade de criar uma representação numérica para as partes de um inteiro que provocou o surgimento dos números fracionários, que iremos estudar nesta seção.

A estrutura de uma fração é:

$$\frac{numerador}{denominador}$$

Uma das formas correntes de se trabalhar com frações é a *porcentagem*, em que se expressa uma proporção ou uma relação como uma fração com o denominador igual a 100. O uso de frações também é de extrema valia para a resolução de problemas que envolvem regra de três.

Fração não é necessariamente a parte que tiramos de **um** inteiro, ela pode ser parte de **dois** inteiros completos, um inteiro mais uma parte e assim sucessivamente. Levando em consideração todas as formas possíveis de encontrarmos uma fração, podemos classificá-las em: próprias, impróprias ou aparentes.

Fração Própria

É toda fração menor que um inteiro, ou seja, em que o numerador é menor que o denominador. Por exemplo, representamos 3 partes de um todo dividido em 8 partes iguais pela fração $\frac{3}{8}$.

Fração imprópria

É toda fração maior que um inteiro, que corresponde aos casos em que o numerador é maior que o denominador. Por exemplo, se dividimos vários objetos idênticos em 5 partes cada um e tomamos 6 dessas partes, escrevemos a fração $\frac{6}{5}$ para representar essas seis partes.

Fração aparente

Quando uma fração imprópria tem um denominador que é um múltiplo do numerador, ela representa um número de inteiros, mas nada nos impede de escrever essa fração, por exemplo $\frac{6}{3}$ é uma fração imprópria, uma maneira complicada de escrever o número 2 que, porém, pode ser útil em alguma situação.

Também existem as frações chamadas mistas, onde há uma parte inteira e uma fracionada: $2\frac{3}{4}$. Normalmente, evitamos essa representação, que pode ser facilmente confundida com a representação do produto $2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$, totalmente diferente do que se pretende com a fração mista $2\frac{3}{4} = \frac{11}{4}$.

Como as frações são *números*, podemos realizar operações aritméticas com elas:

Adição e subtração: só podemos somar/subtrair os numeradores de frações diferentes se tiverem denominadores iguais. Assim, a primeira etapa da soma ou subtração de duas frações consiste em determinar o mínimo múltiplo comum dos denominadores, reescrever as frações para que tenham o mesmo denominador, e somar os numeradores. Teste sua habilidade com as frações abaixo, interpretando a última como fração mista.

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{2} =$$

$$\frac{1}{3} + \frac{7}{18} =$$

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{6} =$$

$$\frac{3}{5} - \frac{3}{15} =$$

$$3\frac{2}{3} - 2\frac{2}{5} =$$

Nada impede que representemos os numeradores e/ou os denominadores das frações por quantidades algébricas. Assim, tente calcular os resultados das operações abaixo:

$$\frac{a}{2} + \frac{a}{3}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{3}{2a}$$

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{a-1}$$

$$\frac{a}{a+1}+\frac{a}{a-1}$$

Multiplicação: basta multiplicar os numeradores para achar o numerador do resultado e os denominadores, para achar o denominador do resultado. Por exemplo,

$$\frac{3}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{3}{6},$$

O processo consistiu em multiplicar 3 por 1, numeradores, e depois multiplicar 2 por 3, denominadores. Exercite com as contas abaixo.

$$\frac{3}{7}\times\frac{1}{2}=$$

$$\frac{4}{3}\times\frac{21}{16}=$$

$$\frac{ab}{d}\times\frac{df}{b}=$$

$$\frac{a^3bd}{ac}\times\frac{c^2e}{ad}=$$

$$\frac{15x^3y^6}{12}\times\frac{60}{25x^4y^6}=$$

Divisão: lembrando que a divisão é a operação inversa da multiplicação, multiplicamos a fração que estiver no numerador pelo *inverso* da fração do denominador.

$$\frac{2}{5}\div\frac{1}{4}=$$

$$\frac{25}{3}\div\frac{9}{15}=$$

$$\frac{28x^3y}{5a^2b^3}\div\frac{35x^2y^2}{30a^2b^2}=$$

$$\frac{a-a^2}{a^2-1}\div\left(\frac{a}{a+1}-a\right)=$$

$$\frac{4x^2-8x-5}{1-x^2}\div\frac{5-2x}{x-1}=$$

Agora, faça os exercícios seguintes:

$$\frac{1}{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}=$$

$$\frac{\frac{1}{11}-\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}=$$

$$\frac{1}{\frac{1}{x}-x}$$

$$\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{x}$$

Para pensar. *"Um fictício matemático árabe chamado Beremiz Samir, do século 10, época em que os matemáticos árabes eram os melhores do mundo, viajava com um amigo pelo deserto, ambos montados em um único camelo, quando encontram três irmãos discutindo acaloradamente. Haviam recebido uma herança de 35 camelos do pai, que deixava a metade para o mais velho, a terça parte para o irmão do meio e a nona parte para o irmão mais moço. O motivo da discussão era a dificuldade em dividir a herança: o mais velho receberia a metade. Acontece que a metade de 35 camelos corresponde a 17 camelos inteiros mais meio camelo! O irmão do meio receberia a terça parte, ou seja, 35 dividido por 3, o que resulta em 11 camelos inteiros mais 2/3 de camelo! O caçula receberia a nona parte de 35 camelos, ou seja, 3 camelos inteiros e 8/9 de camelo! Naturalmente, cortar camelos em partes para repartir a herança seria destruí-la. Ao mesmo tempo, nenhum irmão queria ceder a fração de camelos ao outro. Mas o sábio Beremiz resolveu o problema e apresentou a seguinte solução: 'Encarrego-me de fazer com justiça essa divisão, se permitirem que eu junte aos 35 camelos da herança este belo animal que, em boa hora, aqui vos trouxe. Os camelos agora são 36 e a divisão é fácil: o mais velho recebe 1/2 de 36, ou seja, 18; o irmão do meio recebe 1/3 de 36 , o que equivale a 12; finalmente, o caçula recebe 1/9 de 36, que é igual a 4'. Os irmãos nada reclamaram. Cada um deles ganhou mais do que receberia antes. Todos saíram lucrando. Beremiz explicou sua resolução: 'O primeiro dos irmãos recebeu 18, o segundo, 12 e o terceiro, 4. O total da herança recebida por eles é 18 + 12 + 4, ou seja, 34 camelos. Sobraram 2 camelos, um deles pertence a meu amigo, o que foi emprestado a vocês para permitir a partilha da herança, mas agora pode ser devolvido. O outro camelo que sobra fica para mim por ter resolvido esse complicado problema de herança satisfatoriamente'.*

Como o feito do matemático foi possível, e como lhes foi possível ficar com mais camelos do que lhes cabiam e ainda sobrou um?

Extraído do livro "o homem que calculava", de Malba Tahan.

Frações Parciais

Frações racionais algébricas podem ser decompostas em formas mais simples, chamadas Frações Parciais. Uma aplicação importante dessa decomposição está no Cálculo das integrais de frações racionais. Aqui, não desenvolveremos a teoria dessa decomposição, mas apenas realizá-la em casos práticos e comuns.

Um ***primeiro exemplo*** é decompor a fração algébrica

$$\frac{1}{x^2+x-2}=\frac{1}{(x+2)(x-1)}$$

que pode ser decomposta na soma de duas frações:

$$\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}$$

Para obter os valores de A e B, primeiro reescrevemos o lado direito como uma única fração, usando o mesmo denominador do membro esquerdo, que nada mais é que o mmc dos polinômios nos denominadores das frações do membro direito,

$$\frac{A(x-1)+B(x+2)}{(x+2)(x-1)}$$

que queremos que seja igual à fração original, ou seja

$$\frac{1}{(x+2)(x-1)} = \frac{A(x-1)+B(x+2)}{(x+2)(x-1)}$$

e, como os denominadores são iguais, os numeradores também precisam ser, ou seja:

$$A(x-1)+B(x+2) = 1$$

para qualquer valor de x. Olhando para essa equação, substituindo $x = 1$, obtemos B=1/3 e substituindo x = -2, obtemos A = -1/3. Assim, substituindo A e B pelos valores encontrados, obtemos:

$$\frac{1}{x^2+x-2} = \frac{-1}{3(x+2)} + \frac{1}{3(x-1)}$$

Esse modelo serve para frações com mais fatores e para fatores quadráticos quando o polinômio não é fatorável. O exemplo seguinte mostra como se decompõem a fração que tem um quadrado perfeito no denominador.

Exemplo 2. Para decompor $\frac{1}{x^2(x+1)}$, necessitamos, além dos termos com x^2 e $x+1$ no denominador, um termo em x:

$$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}$$

Juntando todos os termos do lado direito no mesmo denominador do termo do lado esquerdo, a igualdade exige que

$$1 = Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2$$

Substituindo $x = 0$ na equação acima, encontramos

$$B = 1$$

e substituindo $x = -1$, encontramos

$$C = 1.$$

Se você sabe derivar, a maneira mais fácil de calcular o valor de A é fazer a derivada da equação em x e substituir x = 0 na expressão encontrada. No entanto, é possível achar A se usarmos uma propriedade importante dos polinômios: dois polinômios são iguais (isto é, dão os mesmos valores para todos os valores de x) se e somente se todos os coeficientes forem idênticos. Assim substituindo B e C na equação acima, obtemos

$$1 = Ax(x+1) + x + 1 + x^2 \therefore$$

$$1 = (A+1)x^2 + (A+1)x + 1$$

Do lado esquerdo, temos um polinômio de grau 0, enquanto do lado direito temos um de graus 2, que não são idênticos a não ser que $A+1=0$! Assim, concluímos

$$A+1=0 \Rightarrow A=-1$$

Finalmente, o resultado é

$$\frac{1}{x^2(x+1)}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x+1}$$

O ***exemplo 3*** seguinte mostra como se decompõem a fração que tem um polinômio que **não** pode ser fatorado no denominador.

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+2x+2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+2}$$

Atente para a necessidade de usar um polinômio de grau 1 no numerador do segundo termo da decomposição. Em ambos os casos, o mesmo método que vimos aplicando permite determinar os valores de *A*, *B* e *C*. Como sempre, começamos por escrever o membro direito com o mesmo denominador que o esquerdo e concluir que

$$A(x^2+2x+2)+(Bx+C)(x+1)=1$$

Substituindo $x=-1$ na expressão acima, encontramos

$$A=1$$

que, quando substituímos na expressão anterior, dá

$$x^2+2x+2+Bx^2+(B+C)x+C=1 \therefore$$

$$(B+1)x^2+(B+C+2)x+C+2=1 \therefore$$

$$B=-1 \; e \; C=-1.$$

Note que esses valores de *B* e *C* fazem também o termo de primeiro grau se anular.

Exercícios:

1) $\frac{5x-7}{x^2-3x+2}=$

2) $\frac{x+4}{x^2-5x+6}=$

3) $\frac{x^3}{x^2+2x+1} =$

4) $\frac{3x^2+x+4}{x^3+x} =$

5) $\frac{x^4}{x^2-1}$

6) $\frac{1}{\frac{1}{x}-x}$

7) $\frac{1}{t(t-1)^2}$

8) $\frac{x}{(x+1)(x^2+2x+2)}$