Cap.III: HIDROSTÁTICA [1]

1 Equações gerais:

Consideremos neste capítulo diferentes problemas, que envolvem fluidos em repouso. Temos, neste caso, $\vec{v} = 0$ e as equações (2.12) se simplificam bastante.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 & \longrightarrow & \rho = \rho(x, y, z), \\ \frac{\partial (\rho s)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho s \vec{v}) = 0 & \longrightarrow & s = s(x, y, z), \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} & \longrightarrow & \vec{\nabla} p = \rho \vec{g} \end{array} \right. \tag{3.1}$$

isto é, ρ, s e todas as grandezas termodinâmicas são funções somente das coordenadas (constantes em t) e a equação de Euler se reduz a equação

$$\vec{\nabla} p = \rho \vec{g} \quad , \tag{3.2}$$

que descreve o *equilíbrio mecânico* de um fluido. É interessante observar que esta equação vale também para fluidos viscosos, pois pela própria natureza (atritos) os efeitos da viscosidade aparecem somente quando o fluido está em movimento. Matematicamente, os termos adicionais (à equação de Euler) seriam dependentes de $\vec{v}$ e, para um fluido em equilíbrio, não contribuiriam.

(Na ausência de gravidade, a condição de equilíbrio se reduz a $\vec{\nabla} p = 0$, i.e. a pressão é a mesma em todo o fluido.)

Vamos agora estudar alguns casos particulares.

2 Fluido incompressível sob ação da gravidade

2.1 *Sem rotação*

Suponhamos

$$\begin{cases} \rho &= \rho_0 \,(\text{constante}) \text{ e} \\ \vec{g} &= -g\vec{k} \end{cases} \tag{3.3}$$

Podemos imaginar, por exemplo, uma coluna de água, cf. fig.1.

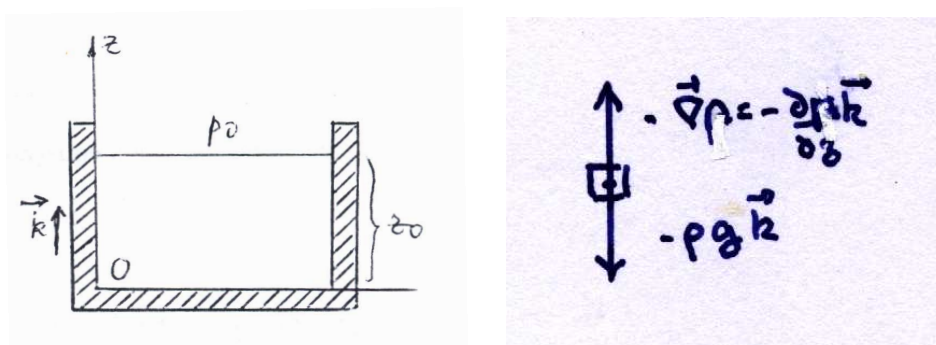


Fig.1: fluido incompressível em equilíbrio sob ação da gravidade [2].

Em coordenadas cartesianas, as componentes da nossa equação (3.3) se escrevem

$$\vec{\nabla} p = -\rho_0 g \vec{k}$$

Esta equação diferencial significa que um volume infinitesimal de fluido está em equilíbrio com o negativo do gradiente de pressão se opondo a gravidade. A solução é

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \longrightarrow p \quad = p(z) \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= -\rho_0 g \quad \longrightarrow p \quad = -\rho_0 g z + \text{const.} \end{cases}$$

Se a pressão na superfície do fluido ($z = z_0$) for $p = p_0$, como se mostra na figura, temos

$$\text{const.} = p_0 + \rho_0 g z_0$$

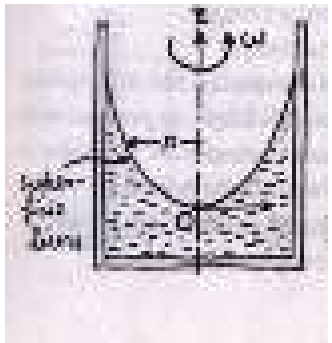
e

$$p = p_0 + \rho_0 g (z_0 - z) \quad \text{“}p_{fundo} = p + \rho g h\text{''}. \tag{3.4}$$

É a lei de Stevin que encontramos no cápitulo anterior.

2.2 *Com rotação[2]*

O problema de um fluido incompressível em rotação uniforme num campo gravitacional (cf. fig.2) também pode ser resolvido relativamente facilmente mudando de referencial.



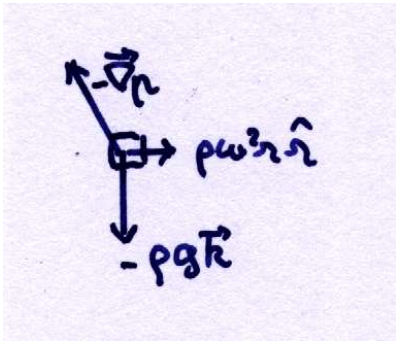


Fig.2: Fluido incompressível em rotação uniforme num campo gravitacional [2].

Após alguns instantes de o recipiente começar a girar, o líquido passa a girar rigidamente com o recipiente. Consideremos um referecial S' que gira com o recipiente, de modo que o líquido está em repouso.

Em S', além da força da gravidade (por unidade de volume), $\rho\,\vec{g}$, atua a força centrifuga (por unidade de volume), $\rho\omega^2 r\hat{r}$.

$$\vec{\nabla}p = \rho_0\vec{g} + \rho\omega^2 r\hat{r}$$

Esta equação diferencial significa que no referencial S', um volume infinitesimal de fluido está em equilíbrio com o negativo do gradiente de pressão se opondo a gravidade e a força centrifuga. (Num referencial fixo no laboatório, não tem a força centrifuga e o negativo do gradiente de pressão se decompõe em parte que se opõe a gravidade e parte que constitue a força centripeta.) A solução é em coordenadas cilíndricas

$$\left\{\begin{array}{lllll} \frac{\partial p}{\partial \phi} & = & 0 & \longrightarrow p & = p(r,z) \\ \frac{\partial p}{\partial z} & = & -\rho_0 g & \longrightarrow p & = -\rho_0 g z + c(r) \\ \frac{\partial p}{\partial r} & = & \rho\omega^2 r & \longrightarrow p & = p_0 - \rho_0 g z + \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 \end{array}\right. \qquad (3.5)$$

onde supomos $p = p_0$ no ponto O, i.e. em $z = r = 0$.

A equação da superfície livre da água ($p = p_0$) é $z = \omega^2 r^2/(2g)$, i.e. um parabolóide de revolução (cf. figura).

2.3 *Aplicações*

Várias animações sobre os assuntos desta secção podem ser encontradas na página:
http://www.fisica.ufs.br/CorpoDocente/egsantana/fluidos/estatica/introduccion/Introduccion.htm

(i) Princípio de Pascal[2]

Pela lei de Stevin, a diferença de pressão entre dois pontos de um líquido homogêneo em equilíbrio é constante, dependendo apenas do desnível entre esses pontos. Assim, **se produzirmos uma variação de pressão num ponto do líquido em equílibrio, essa variação se transmite a todo o líquido.**

Isto é a ideia atrás do funcionamento da prensa hidráulica. Na fig. 3 esq., uma força para baixo $\vec{F}_1$ é aplicada no lado esquerdo resultando numa força para cima $\vec{F}_2$ no lado direto. Para menter o sistema em equílibrio, uma massa é adicionada do lado de direta (fig.3 dir.) e exerça uma força $\vec{-}F_2$. $\vec{F}_1$ e $-\vec{F}_2$ causam um aumento de pressão (em relação à pressão atmosférica) de (principio de Pascal) $\Delta p = F_1/A_1 = F_2/A_2$ de modo que $F_2 = (A_2/A_1)\, F_1$. Assim a força aplicada sobre A_1 pode ser pequena e resultar numa força grande sobre A_2.

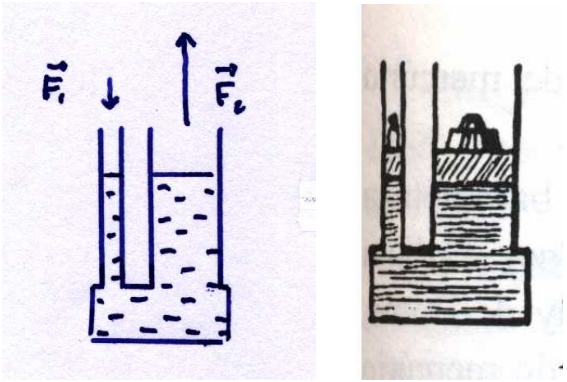


Fig.3: Prensa hidráulica [2]: uma força pequena aplicada para baixo a esquerda resulta numa força grande para cima a direta

(ii) Vasos comunicantes[2]

Se um recipiente é formado de diversos ramos comunicantes (cf. fig. 4 esquerda), a superfície livre está localizada numa mesma altura h em todos os ramos e fica à pressão (atmosférica) p_0). A pressão em qualquer ponto a altura z é $p = p_0 + \rho g(h - z)$.

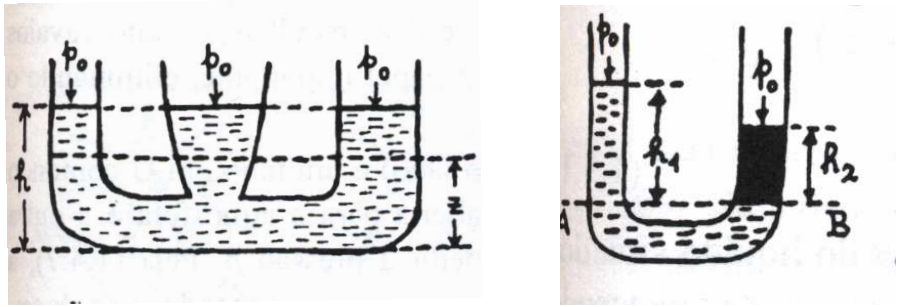


Fig.4: Vasos comunicantes [2].

Se em dois ramos de um tubo em U temos dois líquidos de densidades diferentes, que não se misturam, eles subiram a alturas diferentes nos ramos (cf. fig. 4 direta. Para pontos sobre o plano AB, temos $p = p_0 + \rho_1 g h_1 = p_0 + \rho_2 g h_2$.

(iii) Paradoxo hidrostático[2, 3, 4]

Na figura 5, consideremos recipientes com formas muito diferentes *de mesma base* A_1, cheios de um mesmo líquido até *uma mesma altura* h_1. Como eles tem mesma altura de líquido, *a pressão na suas bases é a mesma e eles exercem a mesma força sobre a mesa. Isto parece em contradição com o fato que eles tem peso diferenentes.* Este paradoxo se resolve levando em conta que o fluido exerce forças sobre suas paredes, além de sobre sua base. É a soma das forças (verticais) que ele exerce sobre paredes e base que deve ser igual ao seu peso [3, 4].

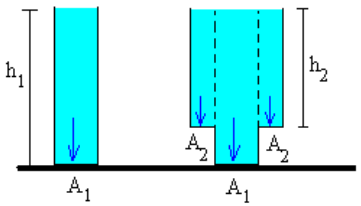


Fig.5a: as setas indicam as forças devida à pressão

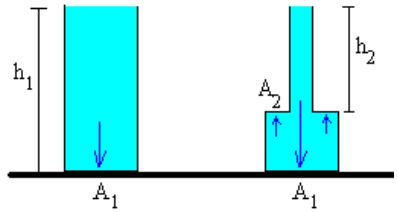


Fig.5b: as setas indicam as forças devida à pressão

Na fig. 5a, ambos recipientes tem seção A_1 em contacto com a mesa e altura de líquido h_1. Assim eles exercem a mesma pressão sobre a mesa p_1 e mesma força $F_1 = p_1 A_1 = \rho g h_1 A_1$. Para o recipiente de esquerda $F_1 = peso$ e para o de direta $F_1 \neq peso$. Para este último, tem também pressão sobre a superfície anular A_2 e a força exercida (para baixo) é $F_2 = p_2 A_2 = \rho g h_2 A_2$. A força total exercida pelo líquido de direta é $F_1 + F_2 = \rho g (h_1 A_1 + h_2 A_2) = peso$.

Similarmente, na fig. 5b, ambos recipientes tem seção A_1 em contacto com a mesa e altura de líquido h_1. Assim eles exercem a mesma pressão sobre a mesa p_1 e mesma força $F_1 = p_1 A_1 = \rho g h_1 A_1$. Para o recipiente de esquerda $F_1 = peso$ e para o de direta $F_1 \neq peso$. Para este último, tem também pressão sobre a superfície anular A_2 e a força exercida (para cima) é $F_2 = p_2 A_2 = \rho g h_2 A_2$. A força total exercida pelo líquido de direta é $F_1 - F_2 = \rho g (h_1 A_1 - h_2 A_2) = peso$.

(iv) Bomba de sucção[2]

Uma aplicação da lei de Stevin permite calcular a profundidade máxima de um poço do qual uma bomba de sucção consegue puxar a água:

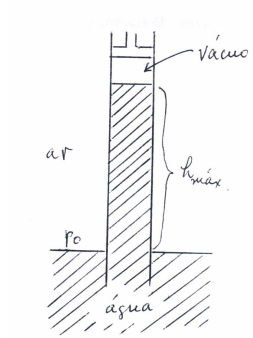


Fig. 6: Bomba de sucção [1].

Pondo $p = 0$ para $h_{\text{máx}} \equiv z_{\text{máx}} - z_0$ em (3.4), temos

$$h_{\text{máx}} = \frac{p_0}{\rho_0 g} \quad .$$

Portanto, ao nível do mar, podemos calcular

$$\left.\begin{array}{lll} p_0 & = & p_{atm} \simeq 1,013\,10^5\,N/m^2 \\ \rho_0 & \simeq 1 & \text{kg/l} \end{array}\right\} \underline{h_{max} \simeq 10.3m}$$

Isto é a altura máxima até a qual uma bomba pode elevar água usando unicamente sucção.

Assim se você, a partir da janela do seu apartamento localizado a 12 metros da altura num prêdio, quisesse beber uma coca numa lata na rua, usando um canudo grande, teria que achar uma boa ideia baseada nesta aula [5] ... ou descer a escada.

Podemos tentar calcular a altura máxima até a qual a atmosfera terrestre pode se elevar. A fórmula anterior para a atmosfera, dá $h_{\text{máx}} \simeq 8$km. Esta estimativa da espessura da atmosfera, no entanto, é muito grosseira, pois sabemos que a densidade do ar não é constante e, de fato, experimentalmente $h_{\text{máx}} >> 8$km.

(v) Barômetro de Mercúrio

Este aparelho é usado para medir a pressão atmosferica:

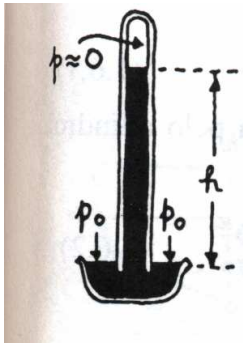


Fig. 7: barômetro de mercúrio [1].

O princípio é o mesmo da bomba de sucção. Usa-se mercúrio no lugar da água. A altura da coluna dá a pressão atmosférica: $p_0 = gh\rho_{Hg}$.

(vi) Manômetros

Estes aparelhos permitem medir uma pressão, em relação á pressão atmosférica:

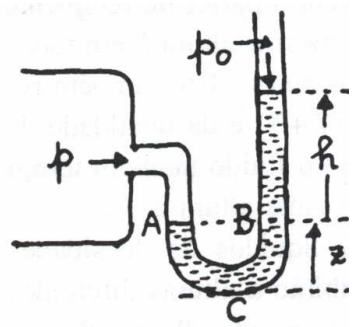


Fig.8: manômetro [1].

Existem muitos tipos de manômetro: com tubo aberto, reservatório, tubo inclinado, etc. A pressão desconhecida p vale $p_0 + \rho g h$ na fig. 8.

2.4 *Princípio de Arquimedes-Corpos flutuantes [2]*

Os resultados anteriores permitem também estudar corpos flutuantes:

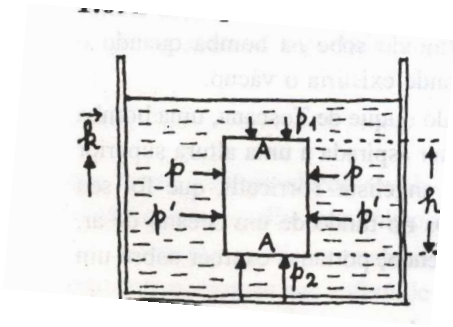


Fig. 9: empuxo sobre um corpo imerso[1]

Na figura 8, a resultante das forças exercidas pelo fluido sobre o corpo cilíndrio, ou chamado "empuxo", é:

$$E = p_2 A - p_1 A = \rho_{liq} g h A = m_{liq} g$$

Isto é, **o empuxo tem módula igual ao do peso do fluido deslocado**.

Notamos que a equação anterior pode ser re-escrita:

$$\frac{p_2 - p_1}{h} = \rho_{liq} g \quad \Rightarrow \vec{\nabla} p = \rho_{liq} \vec{g}.$$

O ponto onde se aplica o empuxo é o centro de gravidade do fluido deslocado. Num corpo flutuante como na fig. 9, há equilíbrio entre o empuxo e o peso do corpo. Se o empuxo for menor do que o peso, o corpo afunda. Se o empuxo for maior, o corpo sobe até deslocar menos água e ter equilíbrio entre empuxo e peso.

Num barco, o ponto onde se aplica o empuxo é chamado centro de carena. O centro de gravidade do barco G e seu centro de carena C ficam numa vertical.

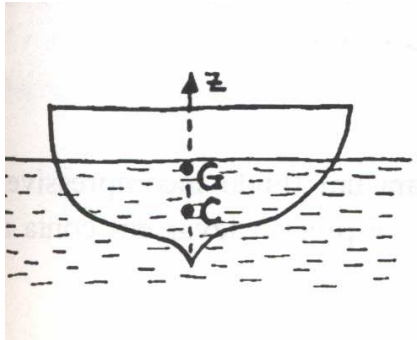


Fig. 10: centro de carena onde se aplica o empuxo e centro de gravidade se aplica o peso [1].

Mas isto não garante a estabilidade do equilíbrio. Se o barco for inclinado, a porção de barco imersa muda e o centro de carena também. Aparece um torque, cf. fig.11.

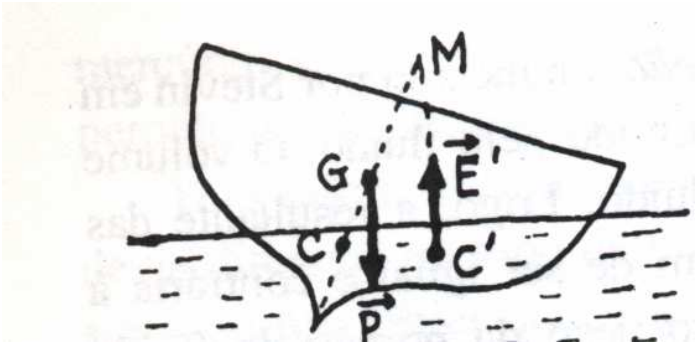


Fig. 11: torque num barco adernado[1].

Este torque é restaurador para pequenos ângulos de inclinação mas não para grandes ângulos. O maior a distância entre G e C', o maior o torque (restaurador ou não). Se G for mais baixo, o torque restaurador é maior. Similarmente o barco fica mais instável se todo mundo se levantar...(pois G fica mais alto).

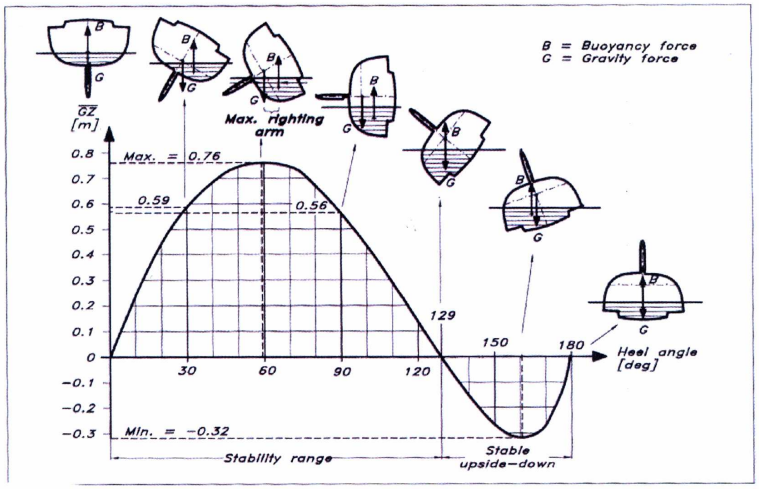


Fig 10: As the yacht tilts (heels) to the side the separation between the buoyancy and gravity force grows up to 60 degrees of tilt and this separation of two forces counteracts the separation of the sail and keel forces. Taken from Larrson and Eliasson's Principals of Yacht Design 2nd Edition

Fig.12: curva de estabilidade (distância entre G e C'=B como função do ângulo de inclinação) de um veleiro "normal". Na prática, mesmo na posição "de cabeça para baixo", se tiver ondas, o veleiro pode se levantar graças a sua quilha. (A não ser que o veleiro sejá um catamaran, i.e. sem quilha e bem largo.)

Para ter maior establidade, os veleiros atuais são mais largos (intuitivamente sabemos que isto é desejavel: preferemos entrar num barco bem largo do que numa estreita canoa). Além disto, eles podem ter quilha basculante que permite mudar a posição de G (também sabemos do papel da posição de G intuitivamente: se nosso barco adernar, subemos sobre a borda mais elevada para equilibra-o). Isto é ilustrado nas fig.13 e 14.

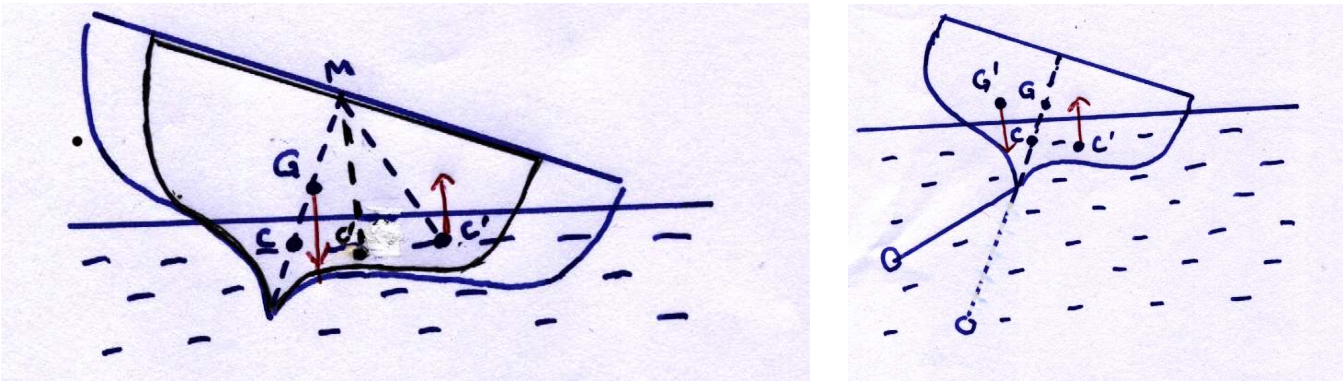


Fig.13: aumentando a estabilidade de um barco com popa mais large (esquerda) ou quilha basculante (direta).

Fig.14: teste de inclinação num veleiro moderno (o Puma que participou da Volvo Ocean race 2008-2009). Notar a quilha basculante.

Dicas de revisão

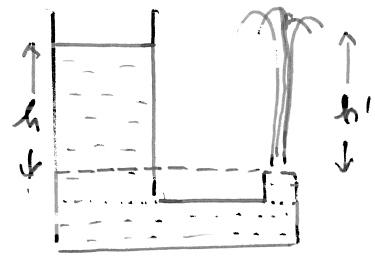
- Fluido incompressível em rotação unifrme num campo gravitacional §1.4 ref. [2]
- Princípio de Pascal, vasos comunicantes, bomba de succão, barômetro e manômetro §1.5 ref. [2]
- Paradoxo hidrostático ref. [3,4]
- Principio de Arquimedes-Corpos flutuantes §1.6 ref. [2].
- Forças de inercia §13,2 e 13.1 ref. [6].

EXERCÍCIOS

1. Um tambor contendo água é posto em movimento de rotação em torno do seu eixo vertical com velocidade angular $\vec{\omega}$ constante. Após um certo intervalo de tempo, toda a água no interior também estará em movimento com a mesma velocidade angular.
a) Determine a forma da superfície superior da água.
b) Qual deve ser a velocidade de rotação necessária para produzir uma diferença de pressão equivalente a 50 cm de água entre o eixo e a parede lateral do tambor no seu fundo, se o diâmetro do tambor for de 1 m?
(fácil)

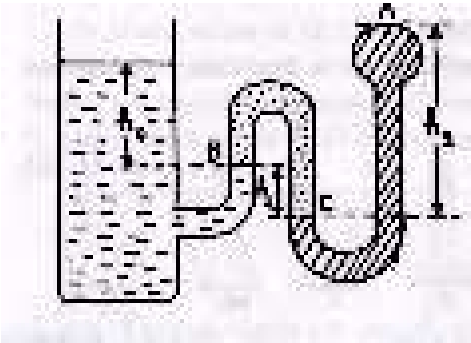
2. O caso de um fluido incompressível em rotação foi tratado na aula no referencial de repouso ligado ao fluido, como um problema de estática. Vamos trata-lo agora no referencial do laboratório como um problema de um fluido incompressível em movimento.
a) Mostrar que $\vec{v}\vec{\nabla} = \omega\partial_\phi$ com $\vec{v} = \omega r\hat{\phi}$.
b) Mostrar que $(\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v} = -r\omega^2\hat{r}$.
c) Mostrar que a equação de Euler se reduz a (3.5).
(médio)

3. Calcular a altura h' e velocidade de saida da água do chafariz da figura em função de h.



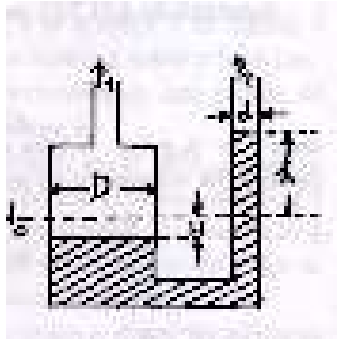
(Fácil)

4. No sistema da figura, a porção AC contem mercúrio, BC contem óleo e o tanque aberto contem água. As alturas indicadas são: $h_0 = 10$ cm, $h_1 = 5$ cm, $h_2 = 20$ cm e as densidades relativas á da água são: 13,6 (mercúrio) e 0,8 (óleo). Determine a pressão p_A no ponto A em atm.



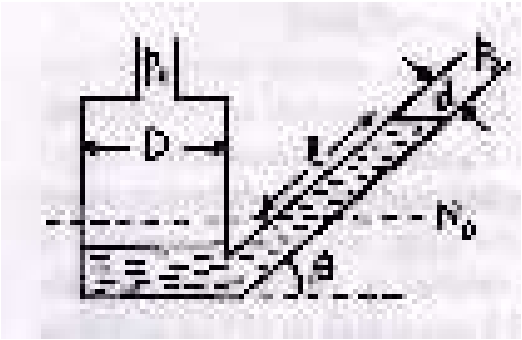
(fácil)[2]

5. No manômetro de reservatório da figura, calcule a diferença de pressãp $p_1 - p_2$ entre dois ramos em função da densidade ρ do fluido, dos diametros d e D, e da altura h de elevação do fluido no tubo, relativamente ao nível de equilíbrio N_0 que o fluido ocupa quando $p_1 = p_2$.(Não usar H).



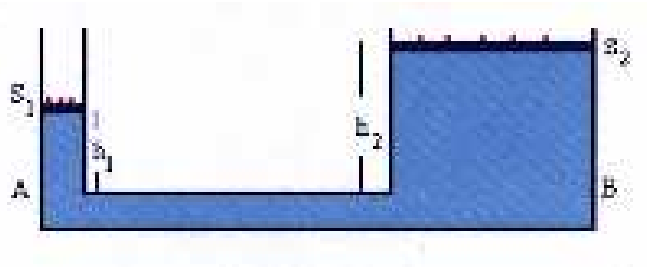
(fácil)[2]

6. O manomêtro de tubo inclinado da figura é utilizado para medir pequenas diferenças de pressão. Se o fluido empregado é óleo de densidade $0,8g/cm^3$, $d = 0,5cm$ e $D = 2,5cm$, qual deve sen θ para que $l = 5cm$ quando $p_1 - p_2 = 0,001atm$?



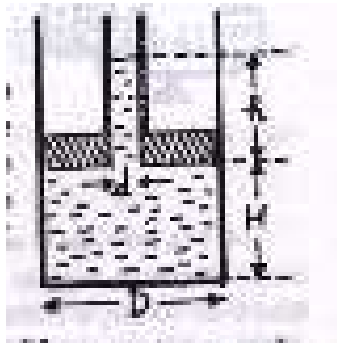
(médio?)[2]

7. Calcular h_1 e h_2 da prensa hidráulica da figura, supondo que há uma massa $m_1 = 0,75kg$ no pistão 1 da esquerda, $r_1 = 5cm$, $r_2 = 10cm$ e a altura de equilíbrio $h_0 = 20cm$.



(fácil)

8. Um pistão é constituido por um disco ao qual se ajusta um tubo oco cilíndrico de diametro d, e está adaptado a um recipiente cilíndrico de diametro D. A massa do pistão com o tubo é M e ele está inicialmente no fundo do recipiente (sem líquido). Despeja-se então pelo tubo uma massa m de líquido de densidade ρ; em consequencia o pistão se eleva de uma altura H. Calcule H em função de D, d, m, M, ρ (não h).



(médio)[2]

9. Suponha que Arquimedes tivesse verificado que colocando a coroa do rei Herão dentro de uma banheira cheia de água até a borda (i) 0,3 l transbordavam (ii) uma força de 2,85 kgf era necessária para suspender a coroa dentro da água. Sabendo que a densidade de ouro é 18,9 g/cm^3 e da prata 10,5 g/cm^3, que conclusão Arquimedes teria tirado?
(fácil)[2]

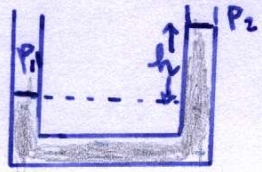
10. a) Um cubo de gelo flutua sobre água gelada num copo, com a temperatura da água em torno de 0^0C. Quando o gelo derrete, sem que haja mudan[c]a apreciável da temperatura, o nível da água no copo sobe, desce ou não se altera?
b) Um barquinho flutua numa piscina; dentro dele estão uma pessoa e uma pedra. A peessoa joga a pedra dentro da piscina. O nível da água a piscina sobe, desce ou não se altera?
(médio)[2]

11. Podemos estimar a estabilidade de uma embarcação fazendo-a balançar. Se ela oscilar rapidamente, é sinal que ela é muito estável?
[Sim. Dica: mostrar $d^2\phi/dt^2 \sim -(F\,l/I)\,\phi$]

12. Extraido da prova 1 de 2009:

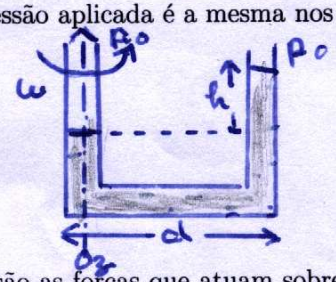
Exercício 1.

a) (1,0) Um tubo em U contendo água, tem pressões diferentes aplicadas em cada ramo.



Qual deve ser a diferença de pressão para ter $h = 5\,cm$?

b) (1,0) Este mesmo tubo é colocado em rotação em torno de um de seus ramos com velociade angular $\omega = 10\,rad/s$. A distância d entre os dois ramos é 30 cm. A pressão aplicada é a mesma nos dois ramos.



Qual é a diferença de altura h entre os dois ramos?

c) (0,5) No caso b), num referencial ligado ao fluido, quais são as forças que atuam sobre um elemento de fluido?

13. Extraido da prova 1 de 2010:

Exercício 3.

Queremos transportar um aquário de base $l \times L$ com $l < L$, cheio de água, num caminhão. Considere que há um campo gravitacional $\vec{g} = -g\hat{z}$ e que o caminhão tem aceleração constante $\vec{a} = a\hat{x}$ com $a > 0$.

a)(0,5) Escrever a equação de Euler (se quiser, pode-se introduzir uma força fictícia e trabalhar no referencial de repouso do caminhão).

b) (1,0) Para um fluido incompressível, mostrar que $p = p_0 - \rho a(x - x_0) - \rho g(z - z_0)$ onde p_0 é a presssão atmosferica e x_0,z_0 são as coordenadas de um ponto na superfície livre.

c)(1,0) Calcular a equação da superfície livre.

Para evitar que a água transborde, é melhor colocar o lado l ou o lado L paralelo à direção do movimento?

References

[1] Y.Hama "Mecanica dos Fluidos", notas de aula.

[2] H.M.Nussenzveig "Física básica" vol.2, Ed.Blücher, 3a ed.

[3] J.S.Walker, The Physics Teacher 36 (1998) 378.

[4] A.E.Wilson, The Physics Teacher 33 (1995) 538.

[5] M.B.Partensky, The Physics Teacher 40 (2002) 106.

[6] H.M.Nussenzveig "Física básica" vol.1, Ed.Blücher, 3a ed.